[Torres 1998] Torres, M. M. M. (1998). Aplicação da Tecnologia de Multi Agentes na Investigação do Processo de Construção do *Conhecimento nos Seres Humanos*. Monografia de Graduação. Departamento de Informática e Matemática Aplicada, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Brasil.

[Tsoukalas 1997] Tsoukalas, L. H. E Uhring, R. E. (1997). Fuzzy And Neural Approaches In Engineering. Ed. John Wiley & Suns Inc.

[Turksen 1986] Turksen, I. B. (1986). *Interval value fuzzy sets based on normal form*. Fuzzy Sets and Systems 20. pp. 191-210.

[Turner 1984] Turner, R. (1984). Logics for Artificial Intelligence. Ellis Horwood Limited series in Artificial Intelligence. West Sussex, England.

[Watannabe 1992] Watannabe, H., Simon, J., Detloff, W. e Yont, K. (1992). VLSI fuzzy chip and inference accelerator board systems. Em [Zadeh1992].

[Yam1999] Yam, Y, Mukaidono, M e Kreinovich, V. (1999). *Beyond [0, 1] to Interval and Further: Do We Need All New Fuzzy Values?* In: Proceeding of the Eighth International Fuzzy Systems Associations Would Congress IFSA'99. Taipe, Taiwan, pp. 143 - 146.

[Zadeh 1965] Zadeh, L. (1965) *Fuzzy Sets*. Information Control 8.

[Zadeh 1973] Zadeh, L. (1973) *Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes interval-valued fuzzy sets*. IEEE Trans. Syst. Man Cybernet 3. pp. 28-44.

[Zadeh 1992] Zadeh, L.A. e Kacprzyk, J. (Editors) (1992). Fuzzy Logic for the Management of Uncertainty. Ed. John Wiley & Suns Inc.

[Silveira 2000] Silveira, M. M. M. T. e Bedregal, B. R. C. (2000) *Uma Analise a Inferência Fuzzy*. Relatório de Pesquisa. DIMAp/UFRN. 2000.

[Silveira 2001a] Silveira, M.M.M.T. e Bedregal, B.R.C, (2001a), *Toward an Interval Fuzzy System*. In: Proceedings the 2001 International Conference on Artificial Intelligence. Las Vegas-USA, June 2001, Vol. 2, pp. 931-937.

[Silveira 2001b] Silveira, M.M.M.T. e Bedregal, B.R.C, (2001b), *Um Método de Inferência Min Max Fuzzy Intervalar*. XXI Congresso da Sociedade Brasileira de Computação, Encontro Nacional de Inteligência Artificial. Fortaleza-CE, Agosto 2001. ISBN 8588442043.

[Silveira 2001c] Silveira, M.M.M.T. e Bedregal, B.R.C, (2001c), *Conjuntos Fuzzy Intervalares*. ERMAC'2001 - Encontro Regional de Matemática Aplicada a Computação. Recife-PE. Agosto 2001.

[Silveira 2001d] Silveira, M.M.M.T. e Bedregal, B.R.C, (2001d), *Versões Intervalares de Alguns Métodos de Inferência e Defuzzificação Fuzzy*. CNMAC'2001 – Congresso Nacional de Matemática Computacional. Belo Horizonte-MG, Setembro 2001.

[Silveira 2001e] Silveira, M.M.M.T. e Bedregal, B.R.C, (2001e), *Concepção de um Sistema Fuzzy Intervalar*. Revista Bate Byte, nº 113. Companhia de Informática do Paraná. Setembro 2001.

[Silveira 2001f] Silveira, M.M.M.T. e Bedregal, B.R.C, (2001f), *A Method of Inference and Defuzzification Fuzzy Interval*. In: The 2001 Artificial Intelligence and Application. Marbella-Spanish, September 2001.

[Silveira 2001g] Silveira, M.M.M.T. e Bedregal, B.R.C, (2001g), *Uma Teoria de Conjuntos Fuzzy Intervalar*. WAI'2001 – Workshop Artificial Intelligence 2001, JCC'2001 – 2001 Jornadas Chilenas de Computacion. Punta Arenas – Chile, Novembro 2001.

[Silveira 2001h] Silveira, M.M.M.T. e Bedregal, B.R.C, (2001h), *Um Método de Simplificação de Conjuntos Fuzzy Usando Intervalos*. LAPTEC'2001 – Second Congress of Logic Applied to Tecnology: Logic, Artificial Intelligence and Robotic. São Paulo-SP, Novembro 2001. Vol. 2, pp. 247-254.

[Silveira 2002] Silveira, M.M.M.T. e Bedregal, B.R.C, (2002), *Foundations of an Interval Fuzzy Theory*. WCCI'2002– World Congress on Computational Intelligence. Honolulu, Hawaii, May 2-7, 2002. (Submetido)

[Song 1993] Song, B. G. Marks II, R. J. Arabshahi, Oh P. Caudell, T. P. and Choi, J. J. *Adaptive Membership Fuction Fusion and Annihilation in Fuzzy If-Yhen Rules*. In Proc. FUZZ-IEEE/IFES'93, 1993, pp. 961-967.

[Stefik 1995] Stefik, M.(1995). Introduction to Knowledge Systems.MK Morgan Kaufmann Publishers, Inc. San Francisco, California.

[Terano 1992] Terano, Toshiro, Asai, Kiyoji, Sugeno, Michio (Editor) (1992). *Fuzzy Systems Theory and Its Applications*. Prentice Hall.

[Oliveira 2000b] Oliveira, M. A. (2000b). Concepção Multi-agentes para a implementação do Raciocínio Aproximado. M. Sc. diss. DIMAp/Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

[Pedrycz 1996] Pedrycz, W. (Editor) (1996). Fuzzy Modelling – Paradigms and Practice. KAP Kluwer Academic Publishers.

[Rocha 1994] Rocha L. M.(1994). *Cognitive Categorization Revised: Extending Interval Valued Fuzzy Sets as Simulation Tools for Concept Combination*. In: Proceedings of the International Conference of NAFIPS/IFIS/NASA. IEEE Press. pp 400-404.

[Rocha 1995] Rocha L. M.(1995). *Interval Based Evidence Sets*. In: Proceedings of the ISUMA-NAFIPS'95. B. Ayub (Ed.). IEEE Press. pp 624-629.

[Rocha 1996] Rocha, L.M, Kreinovich, V. (1996). *Computing Uncertainty in Interval Based Sets.* In. [Kearfott 1996b] pp. 337-380.

[Rocha 1997a] Rocha, L.M. (1997a). *Evidence Sets: Contextual Categories*. In Proceedings of the meeting on Control Mechanisms for Complex Systems. New Mexico. pp. 339-357.

[Rocha 1997b] Rocha, L.M. (1997b). *Evidence Sets: Modelling Subjective Categories*. In International Journal of General Systems. Vol 27. pp. 457-494.

[Ross 2000] Ross, T. J. Wu, B. and Kreinovich, V. (2000). *Optimal Elimination of Inconsistency in Expert Knowledge: Formulation of the Problem, Fast Algorithms*. In Proc. Of International Conference on Intelligent Technologies, Bangkok, Thailand.

[Ruan 1997] Ruan, Da (Editor) (1997) *Intelligent Hybrid Systems – Fuzzy Logic, Neural Networks and Genetic Algorithms* Kluwer Academic Publishers.

[Santiago 1999] Santiago, R. H. (1999). *Teoria das Equações Intervalares Locais*. D. Sc. diss. Universidade Federal de Pernambuco, Pernambuco, Brasil.

[Scott 1997] Scott, A. S., Kreinovich, V. at all. (1997) *Strong Negations: Its Relations to Intervals and Its use in Expert Systems*. In: Goetz Alefeld and Raul A. Trejo (eds.), Interval Computations and its Applications to Reasoning Under Uncertainty, Knowledge Representation, and Control Theory. Proceedings of MEXICON'98, Workshop on Interval Computations, 4th World Congress on Expert Systems, Mexico City, México.

[Scott 2000] Scott, A. S. and Kreinovich, V. (2000). *Aerospace Applications of Soft Computations (with an emphasis on Multi-spectral satellite imaging)*. In Proceedings of the 2000 Would Automatics Congress. Maui, Hawaii.

[Setness 1995] Setnes, M. (1995) *Fuzzy rule-base simplification using similarity measures*. M.Sc. thesis, Dep. Elect. Eng. Contr. Lab. Delft Univ. Techonol, 1995.

[Setness 1998] Setnes, M., Babuska, R., Kaymak, U. and Lemke, H.R. van N. (1998) *Similarity Measure in Fuzzy Rule Base Simplification*. IEEE Transaction on System, Man and Cybernetics – Part B: Cybernetics. Vol. 28, Nº 3, June..

[Kreinovich 1998] Kreinovich, V., Lakeyev, A., Rohn, J., Kahl P. (1998). *Computational Complexity and Feasibility of Data Processing and Interval Computations (Applied Optimization, Vol 10)* Kluwer Academic Press, 1998.

[Kreinovich 1999] Kreinovich, V., Mukaidono, M. and Atanassov, K. (1999) *From Fuzzy Values to Intuitionistic Fuzzy Values to Intuitionistic Fuzzy Intervals etc.: Can We Get an Arbitrary Ordering?* Published in Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets, 1999, Vol. 5, No. 3, pp. 11-18.

[Kreinovich 2000a] Kreinovich, V., Mukaidono, M. (2000) *Intervals (Pairs of Fuzzy Values), Triples, etc.: Can We Thus Get an Arbitrary Ordering?* In: Proceedings of the 9th IEEE International Conference on Fuzzy Systems. San Antonio, Texas. Vol. 1, pp. 234-238.

[Kreinovich 2000b] Kreinovich, V. (2000) et all, *From Interval Methods of Representing Uncertainty to a General Description of Uncertainty.* In: Hrushikesha Mohanty and Chitta Baral (eds.), *Trends in Information Technology, Proceedings of the International Conference on Information Technology: CIT'99, Bhubaneswar, India,* Tata McGraw-Hill, New Delhi, pp. 161-166.

[Kosko 1992] Kosko, B. (1992). Neural Networks and Fuzzy Systems – A Dynamical Systems Approach To Machine Intelligence. Prentice Hall.

[Kulish 1981] Kulish, U.K. and Miranker, W.L. (1981). *Computer Arithmetic Theory and Practice.* Academic Press.

[Lyra 1999] Lyra, A. (1999) Computabilidade no Espaço dos Intervalos Reais: Um Modelo BSS Intervalar. M. Sc. diss. DIMAp/UFRN. 1999.

[Lyra 2000] Lyra, A. e Bedregal, B. R. C. (2000) *Representação e Problemas com a Computação Numérica.* Relatório de Pesquisa. DIMAp/UFRN. 2000.

[Moore 1966] Moore, R. E. (1966). *Interval Analysis.* Prentice Hall, New Jersey.

[Moore 1979] Moore, R. E. (1979). *Methods and Applications of Interval Analysis.* SIAM.

[Mukaidono 1999] Mukaidono, M.; Yam, Y. and Kreinovich, V. (1999). *Interval is All We Need: An Argument.* In Proceeding of the Eighth International Fuzzy Systems Associations Would Congress IFSA'99. Taipe, Taiwan, pp. 147-150.

[Nguyen 1999] Nguyen, Hung T. and Walker, Elbert A. (1999). *A First Course in Fuzzy Logic.* Chapman and Hall.

[Oliveira 1997] Oliveira, P. W. de. at all. (1997) *Fundamentos de Matemática Intervalar.* 1ª ed. Instituto de Informática da UFRGS: SAGRA-Luzzato.

[Oliveira 2000a] Oliveira, M. A. e Gottgtroy, M. P. B. (2000a) Uncertainties Management in Information Systems by an Intelligent Agents Society. 4th World Multiconference on Systemics, Cybernetics and Informatics (SCI'2000) e 6th International Conference on Information Systems Analysis and Synthesis (ISAS'2000), Orland, USA.

[FIDE 1999] *Fuzzy Inference Development Environment. D*isponível em http://www.aptronix.com/index-fuzzy.htm. Última atualização em 30/05/1999.

[Gath 1989] Gath, I. and Geva, A. B. (1989) *Unsupervised optimal fuzzy clustering.* IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intel. Vol. 11, pp. 773-781. 1989.

[Giarratano 1993] Giarratano, J. C. e Riley G. (1993). *Expert Systems: Principles And Programming*. PWS Publishing Company.

[Goldberg 1989] Goldberg, D. E. (1989) *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning.* Addison Wesley Publishing, 1989.

[Gottgtroy 1990] Gottgtroy, M.P.B. (1990). *O Processo de Aquisição do Conhecimento na Construção de Sistemas Especialistas*. M. Sc. diss. COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro Federal, Rio de Janeiro, Brasil.

[Gottgtroy 1998] Gottgtroy, M.P.B. Paiva, N.A.M.S. (1998) Sistemas Baseados em Agentes. I Escola Regional de Informática da Sociedade Brasileira de Computação Regional RJ/ES.

[Gottgtroy 1996] Gottgtroy, M. P. B. (1996). *Aplicação de Técnicas de Engenharia do Conhecimento na Análise do Risco em Sistemas Estruturais.* D. Sc. diss. COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil.

[Guesgen 1996] H.W. Guesgen and J.W. Histed. Towards qualitative spatial reasoning in geographic information systems. In *Proc. AAAI-96 Workshop on Spatial and Temporal Reasoning*, pages 39-46, Portland, Oregon, 1996. [Jang 1997] Jang, J-S.R., Sun, C-T., Mizutani, E. (1997). *Neuro-Fuzzy and Soft Computing – A Computational Approach to Learning and Machine Intelligence*. Prentice Hall.

[Guesgen 1997a] H.W. Guesgen. and U. Lörch. Qualitative spatial reasoning under uncertainty in geographic information systems. In *Proc. IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics*, pages 2169-2174, Orlando, Florida, 1997.

[Guesgen 1997b] H.W. Guesgen. On fuzzy geographic information systems. In *Proc. FLAIRS-97*, pages 155-160, Daytona Beach, Florida, 1997.

[Kandel 1996] Kandel, A., Pacheco, R., Martins, A. e Khator, S. (1996). *The Foundations of Rule-Based Computations In Fuzzy Models*. Em [Pedrycz1996]

[Kasabov 1996] Kasabov, N. K. (1996). *Foundations of Neural Networks, Fuzzy Systems, and Knowledge Engineering.* Ed. The MIT Press, Massachusetts Institute of Technology.

[Kaymak 1997] Kaymak, U., Babuska, R. Setnes, M. Verbruggen, H. B. and Lemke, H. R. N. (1997) *Methods for Simplification of Fuzzy Models*. In. [Ruan 1997].

[Kearfott 1996a] Kearfott, R. B. (1996a). *Interval Computations: Introductions, Uses, and Resources*. Euromath Bulletin 2 (1), pp. 95-112.

[Kearfott 1996b] Kearfott, R. B. and Kreinovich, V. (Eds.) (1996b). *Applications of Interval Computer*. Kluwer Academic Press.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[Aciòly 1991] Aciòly, B. M. (1991). Fundamentação Computacional da Matemática Intervalar. D. Sc. diss., Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil.

[Altmann 1994] Altmann, D. Fuzzy Set-Theoretic Appoaches for Handling Imprecision in Spatial Analysis. Journal of GIS, v. 8, n. 3, p.271-289, 1994.

[Babuska 1996] Babuska, R., Setnes, M., Kaymak, U. Lemke, H.R. (1996). *Rule Base Simplification with Similarity Meansures.*. In Proc. Fifth IEEE Int. Conf. On Fuzzy Systems 3, 1642-1647, New Orleans, USA.

[Bedregal 1996] Bedregal, B. R. C. (1996). *Sistemas de Informação Contínuos: Uma Abordagem Lógica e Computacional para a Matemática Intervalar*. D. Sc. diss., Universidade Federal de Pernambuco, Pernambuco, Brasil.

[Bojadziev 1996] Bojadziev, G. & Bojadziev, M. (1996). *Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, Applications*. World Scientific Publishing.

[Breuker 1985] Breuker, J. Wielinga, B. (1985) *Analysis Techniques for Knowledge Based Systems.* ESPRIT PROJECT P12 Report 1.2, University of Amsterdam.

[CASL 2001] CASL, Common Algebraic Specification Language, In http://www.brics.dk/projects/COFI2001.

[Chanas 2001] Chanas, S. (2001) *On the interval approximation of a fuzzy number*. Fuzzy Sets and Systems 122, pp 353-356.

[Cross 1993] Cross, V.V. (1993) *An analysis of fuzzy set aggregators and compatibility measure*. Ph.D. Thesis, Wright State Univ. Dayton, OH.

[Cox 1994] Cox, E. (1994). *The Fuzzy Systems Handbook: the practitioner's guide to building, using, and maintaining fuzzy systems.* Academic Press Professional Inc.

[Cox 1995] Cox, E. (1995). *Fuzzy Logic for Business and Industry.* Charles River Media Inc.

[Cruz 2000] Cruz, M. M. C. (2000) *Equivalência e Consistência entre Funções Intervalares*. M. Sc. diss. DIMAp/UFRN. 2000.

[Dutra 2000] Dutra, J. E. M. (2000) JAVA-XSC: *Uma Biblioteca Java para Computações Intervalares.* M. Sc. diss. DIMAp/UFRN. 2000.

[Dugundji 1966] Dugundji, J. (1966) Topology. Allyn and Bacon, New York.

capturar informações temporais e espaciais, as quais possam ser usadas para raciocinar sobre tais tipos de informações [Altmann 1994], [Frank 1994], [Guesgen 1996], [Guesgen 1997a], [Guesgen 1997b].

Especificamente este último é o plano de estudo de doutorado da pesquisadora submetido a CAPES, para ser desenvolvido de julho de 2002 a julho de 2005.

exemplos de uso prático crescem, o interesse da sociedade será despertado e a necessidade surge normalmente. Esse processo se torna o estímulo para o desenvolvimento teórico adicional. As pesquisas com conjuntos fuzzy intervalares vêm crescendo a cada dia e seu interesse aumentando proporcionalmente.

2. Trabalhos Futuros

Como já foi dito este trabalho é o ponta pé inicial para uma série de trabalhos de pesquisa que podem ser feitos a partir deste, alguns já estão sendo realizados outros são sugestões para trabalhos futuros. Dentre os vários trabalhos que podem ser desenvolvidos, pode-se destacar:

- O levantamento das pesquisas que utilizam a teoria fuzzy e a computação intervalar, fazendo uma comparação entre elas;
- A implementação do estudo de caso desta dissertação, comparando os resultados fuzzy e fuzzy intervalar;
- Estudo sobre a aquisição do conhecimento, para verificar a facilidade de especificar intervalos ao invés de números reais;
- Especificar um método de simplificação de conjuntos fuzzy intervalar, atribuindo pesos ao especialistas;
- Definir funções que melhor representem os intervalos fornecidos pelos especialistas;
- Propor uma metodologia de desenvolvimento de sistemas fuzzy intervalar;
- Especificação algébrica para a teoria fuzzy intervalar usando CASL (Common Algebraic Specification Language)[CASL 2001];
- Utilização da teoria fuzzy intervalar para o tratamento de imagens, especificamente com segmentação de imagem;
- Conceber um framework que permita desenvolver Sistemas de Informações Geográficas, que trabalhe com o conhecimento impreciso, utilizando a teoria fuzzy intervalar e sejam capazes de

A primeira condição é necessidade, que é sentida claramente se olhada do ponto de vista da engenharia e do ponto de vista humano. A vantagem tecnológica está intimamente ligada à vida das pessoas; a conexão da inteligência artificial e o "pensamento" que é a essência da humanidade têm uma grande influência por si só. Para os mestres da inteligência artificial, para dominar o cotidiano, é necessário que os computadores entendam a linguagem dos homens. O problema é que existe muita ambigüidade na linguagem do dia-a-dia, e não pode ser controlado através de processos lógicos padrão. Uma nova ferramenta lógica que pode expressar a ambigüidade é necessária, e os conjuntos fuzzy podem ser considerados apropriados neste caso. No entanto, foi discutido neste trabalho algumas deficiências encontrada nesta teoria. Além disso, em problemas que envolvam erros de aproximação e/ou necessidade de precisão das informações, os conjuntos fuzzy intervalar vêm suprir esta carência, podendo-se concluir que a sociedade necessita de conjuntos fuzzy intervalar para um crescimento futuro.

Sobre uma nova metodologia? A teoria dos conjuntos fuzzy intervalar, além de mapear os problemas tratados pela teoria fuzzy como a ambigüidade e conceitos opostos como: subjetividade e objetividade, incerteza e precisão, pontos de vista macro e micro, e emoção e lógica, também mapeia problemas de erros de aproximação tratados pela matemática intervalar, tornando possível o desenvolvimento de uma metodologia mais precisa.

A terceira condição é um campo atrativo de estudo, e isso tem sido objeto tanto do lado da inteligência computacional como da matemática intervalar. Como um sistema matemático, os conjuntos fuzzy intervalares expandem frameworks atuais e constroem um mundo que traz novos conceitos, assim esse é um campo de pesquisa bastante abrangente que tem interessado muitos pesquisadores de ambas as áreas. Os pesquisadores de inteligência computacional vão buscar na matemática intervalar sua necessidade de lidar com erros de aproximação dos valores fornecidos pelos especialistas, por outro lado, os pesquisadores da matemática intervalar se interessam pela possibilidade de tratar os dados cognitivos.

As três condições acima são um pouco complementares. Isto é, se uma nova metodologia é desenvolvida, um desejo de fazer algum tipo de uso dela aparece. E se mecanismo de inferência e de defuzzificação fuzzy intervalar, assegurado pelo teorema da continuidade.

- O processo de inferência min-max é simplificado no estudo de caso, e não é resolvido pela forma matemática, mostrada nos capítulos anteriores, pois se trata de um problema contínuo. A solução matemática é inviável manualmente, pois se trata de produtos cartesianos de conjuntos contínuos levando a quantidade de pares muito grande.
- O método utilizado é apenas uma proposta dentre muitas que estão surgindo com o estudo da teoria fuzzy intervalar, e outros métodos devem aparecer nos próximos trabalhos. Pode-se ter variações utilizando operadores de implicação diferentes, assim como, na forma de estabelecer as funções limitantes dos conjuntos fuzzy intervalar.
- Ainda não se tem nenhum resultado de implementação, o estudo até o momento é totalmente teórico, mas é uma perspectiva para os próximos trabalhos.
- Essa teoria não está ainda totalmente sedimentada, muitas propostas estão sendo desenvolvidas neste sentido. Apesar disto, não se procurou estudar o que já estava sendo desenvolvidos por outros pesquisadores para não haver nenhum tipo de influência no desenvolvimento deste trabalho.

Desta forma, a teoria fuzzy intervalar é uma nova perspectiva de desenvolvimento de sistemas mas, segundo Terano, [Terano 1992] três condições são necessárias para o estabelecimento de um novo *campo de desenvolvimento de sistema*: a primeira, *a necessidade da sociedade*; segunda, *uma nova metodologia* (idéias e técnicas); e terceira, *atratividade para os pesquisadores*. A teoria fuzzy intervalar é um campo promissor para o desenvolvimento de sistemas e em poucos anos, estará sedimentado o suficiente para cumprir as três condições anteriores. No entanto, é mostrada a seguir uma explanação nesse sentido:

CAPÍTULO 6 – CONSIDERAÇÕES FINAIS

1. Conclusões

Por tudo que foi exposto, pode-se dizer que a teoria fuzzy intervalar é uma proposta de novo campo de desenvolvimento de sistemas que lidam com incertezas, assim e com o raciocínio aproximado chegando-se a resultados mais precisos que os tratados pela teoria fuzzy.

No entanto, este trabalho é apenas o começo de um estudo grandioso que tem trazido muitas contribuições para a comunidade científica. Pode-se destacar os seguintes pontos:

- A utilização da teoria fuzzy intervalar para desenvolvimento de sistemas não possui uma complexidade grande, no sentido de que pode ser facilmente implementada, como é implementada a teoria fuzzy.
- O principal objetivo do uso da função de pertinência intervalar é facilitar a aquisição de conhecimento, ou seja, em vez do especialista se preocupar com um valor a fornecer ele pode incluir esse valor dentro de um intervalo, tornando mais fácil o mapeamento do conhecimento através de intervalos.
- A simplificação de conjuntos fuzzy através de intervalos garante que as informações fornecidas pelos especialistas não sejam desprezadas, e, portanto também garante uma maior precisão nos dados de saída do sistema.
- A facilidade de gerar funções de pertinência para o especialista proporcionou o desenvolvimento do raciocínio aproximado, com

como não foram descartadas valores com interpolação ou simplificações que perdem valores importantes para o desenvolvimento do sistema.

Os resultados na defuzificação são bastante próximos com relação aos sistemas fuzzy (12.56 e 12.76). Neste exemplo particular não possui um impacto grande, mas se for aplicado em situações onde a precisão de décimos ou até milésimos sejam relevantes, como em problemas de economia ou extração de petróleo, uma pequena diferença na fasão de um barril faz uma grande diferença quando se tem milhares de barris de petróleo.

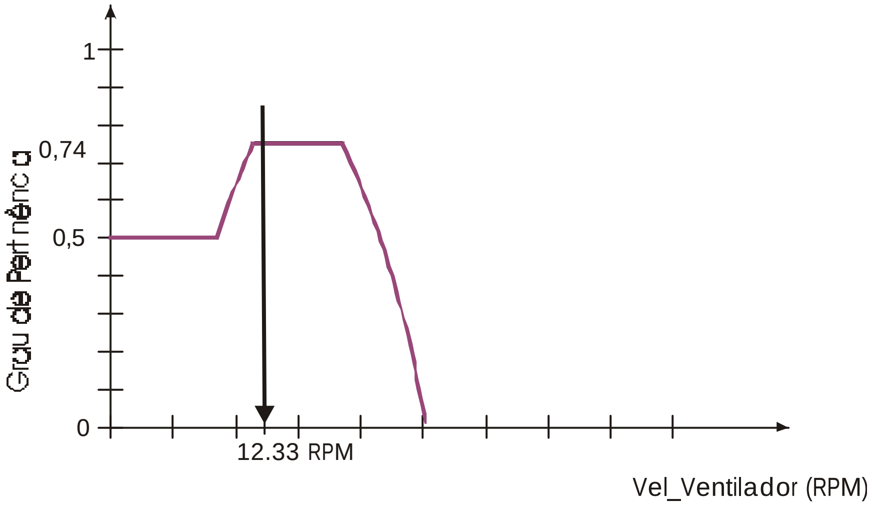


Figura 62 – Defuzzificação Intervalar Superior

Assim a defuzzificação intervalar é o intervalo

D = [12.33;12.79]

Perceba que o valor defuzzificado pela defuzzificação fuzzy está contido no intervalo solução da defuzzificação intervalar.

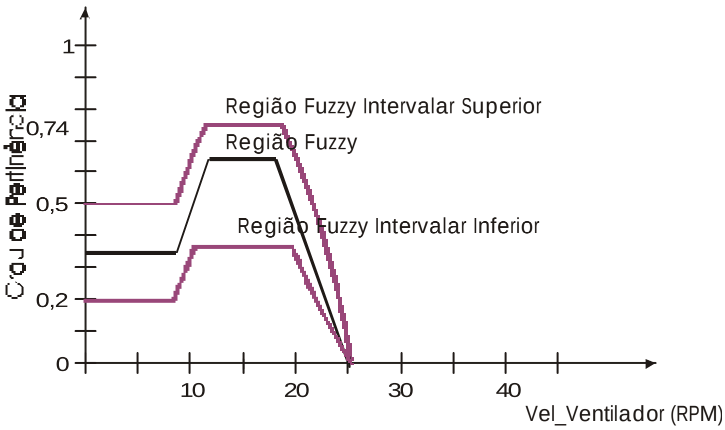


Figura 63 – Região Fuzzy Solução e Região Fuzzy Intervalar Solução

Encontrando o ponto médio do intervalo acima encontra-se um valor final para a defuzzificação igual a:

D = 12.56

Este valor possui um grau de precisão maior que o fuzzy pois foi dado uma margem de erro aos valores durante a construção da função de pertinência, assim

5.3. Defuzzificação Intervalar

A defuzzificação intervalar D é um intervalo obtido pela defuzzificação da região fuzzy inferior e superior respectivamente, de acordo com a equação 81.

$D = [\min(d_i, d_s);\max(d_i,d_s)]$

Defuzzificação da região fuzzy inferior é um valor aproximadamente igual a 12.56 RPM, ilustrado na figura 61:

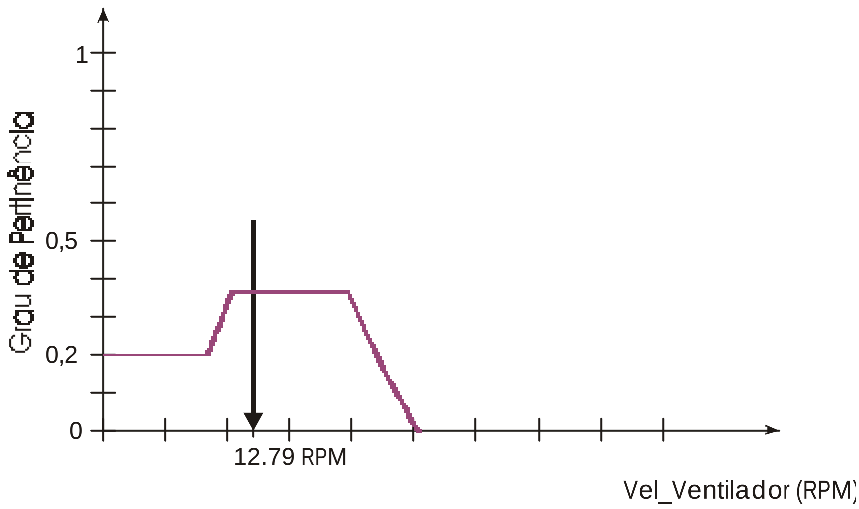


Figura 61 – Defuzzificação Intervalar Inferior

De acordo com a equação 48 a defuzzificação centróide é dada por

$$x^* = \frac{\sum x_i \mu_{OUT}(x_i)}{\sum \mu_{OUT}(x_i)}$$

d_i = (0*0.2+8.1*0.2+11*0.38+19*0.38+21.9*0.2+25*0) /
(0.2+0.2+0.38+0.38+0.2+0)

d_i = 12.79 RPM

E a defuzzificação da região fuzzy de limite superior é aproximadamente igual a 12.33 RPM, ilustrado na figura 62:

d_s = (0*0.5+8.5*0.5+11.2*0.74+18.4*.74+21.2*0.5+25*0) /
(0.5+0.5+0.74+0.74+0.5+0)

Pela R4: A vel_ventilador é *parado* com grau de pertinência superior min(0.38; 0.8)

Pela R7: A vel_ventilador é *parado* com grau de pertinência superior min(0.74; 0.5)

Pela R8: A vel_ventilador é *parado* com grau de pertinência superior min(0.38; 0.5)

Como resultado o mínimo de cada regra é projetada no conjunto fuzzy superior do conseqüente das regras, conjunto fuzzy superior da velocidade do ventilador. Como mostra a figura 59.

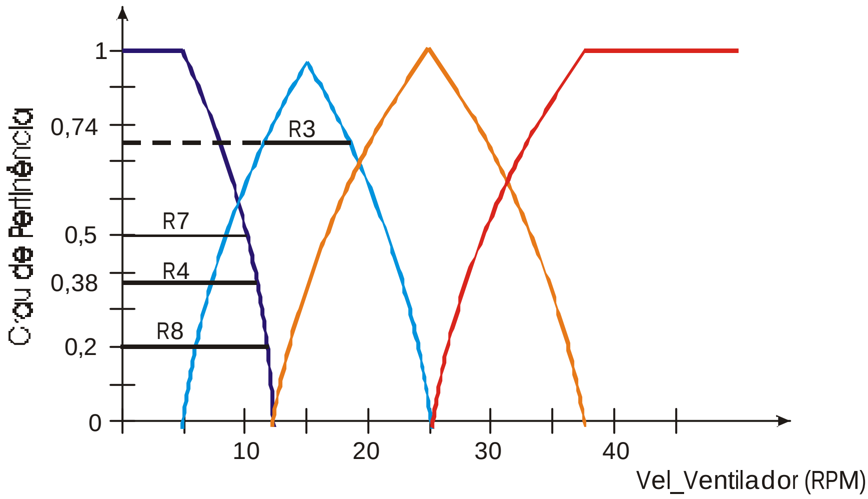


Figura 59 – Inferência Fuzzy Intervalar Min-Max Supeior

Obtendo-se a região fuzzy solução superior ilustrada na figura 60.

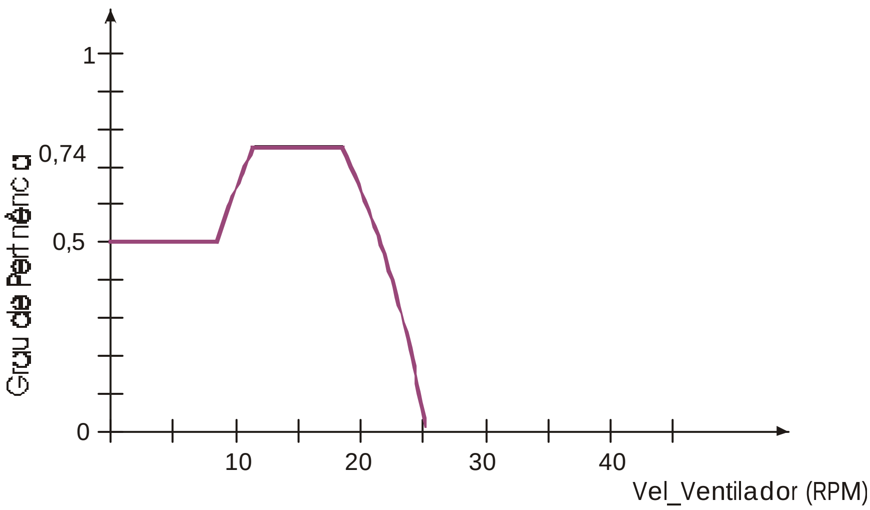


Figura 60 - Região Fuzzy Solução Superior

Como resultado o mínimo de cada regra é projetada no conjunto fuzzy inferior do conseqüente das regras, conjunto fuzzy inferior da velocidade do ventilador. Como mostra a figura 57.

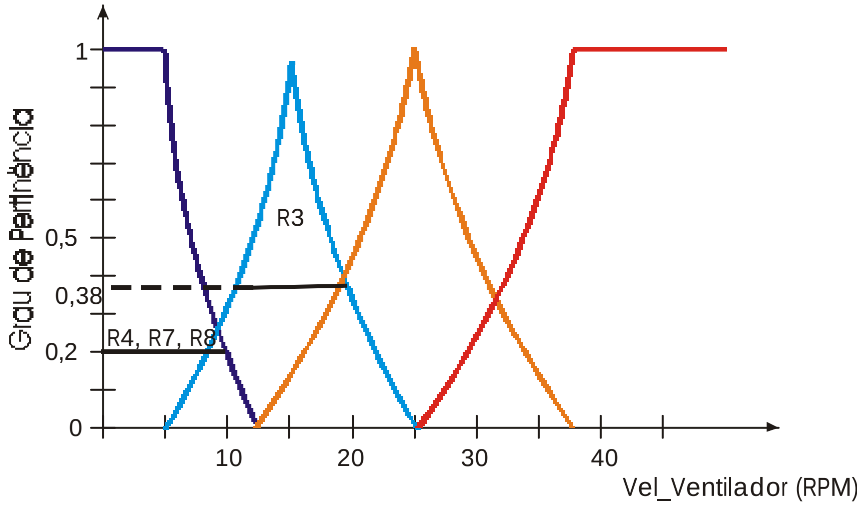


Figura 57 – Inferência Fuzzy Intervalar Min-Max Inferior

Ficando-se com a região máxima da projeção das regras ilustrada na figura 58, a região fuzzy solução inferior.

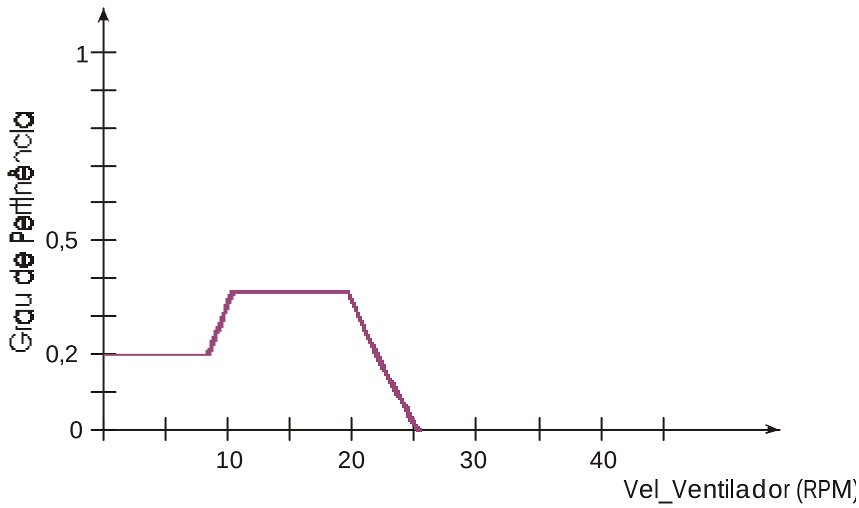


Figura 58 – Região Fuzzy Solução Inferior

Para a função de limite superior procede-se semelhantemente:

Pela R3: A vel_ventilador é *baixa* com um grau de pertinência intervalar superior que é o mínimo entre o grau de pertinência superior para ter temperatura morna (0.74) e umidade alta (0.8). Ou seja min(0.74;0.8)

Para a umidade de 70% obtem-se o grau de pertinência intervalar para médio de [0.2;0.5] e o grau de pertinência intervalar para alto de [0.5;0.8], como mostra a figura 56.

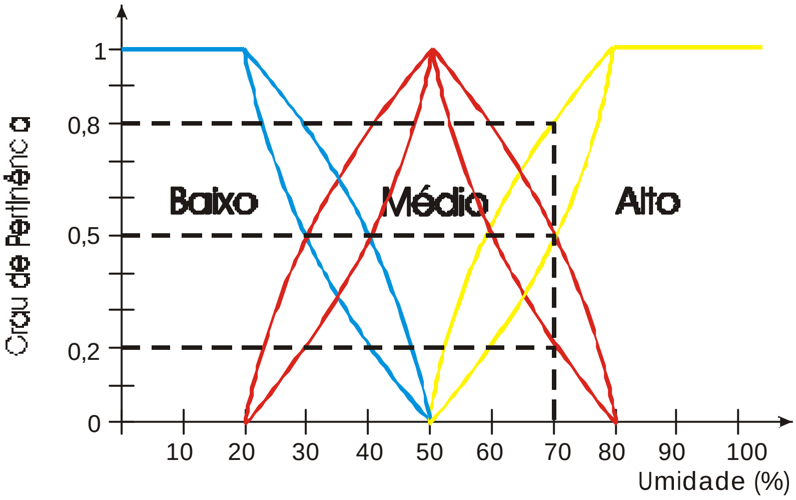


Figura 56 – Fuzzificação Intervalar para 70% de umidade

5.2. Avaliação das Regras ou Inferência Fuzzy Intervalar

Durante a etapa de inferência fuzzy intervalar a função de pertinência intervalar será desmembrada na função de limite inferior e função de limite superior, para serem trabalhadas separadamente.

Para a função de limite inferior as regras são aplicadas e obtem-se como resultado o seguinte:

Pela R3: A vel_ventilador é *baixa* com um grau de pertinência intervalar inferior que é o mínimo entre o grau de pertinência inferior para ter temperatura morna (0.38) e umidade alta (0.5). Ou seja min(0.38;0.5)

Pela R4: A vel_ventilador é *parado* com grau de pertinência inferior min(0.2; 0.5)

Pela R7: A vel_ventilador é *parado* com grau de pertinência inferior min(0.38; 0.2)

Pela R8: A vel_ventilador é *parado* com grau de pertinência inferior min(0.2; 0.2)

Também será utilizada a inferência fuzzy min-max intervalar, o processo é similar ao descrito anteriormente, a principal diferença é que neste caso se trabalhará com duas funções de pertinência a de limite inferior e a de limite superior.

4.4. Defuzzificação Intervalar

Da mesma forma será utilizado o método de defuzzificação centróide, para cada região fuzzy solução inferior e superior gerando o intervalo solução ou se preferir, pode-se obter um valor crisp atraindo o ponto médio do intervalo.

5. Execução do Sistema Fuzzy Intervalar

A execução do sistema fuzzy intervalar é semelhante à execução do sistema fuzzy. A diferença está na utilização das funções de limite inferior e superior que serão tratadas como duas funções separadamente conforme garante o teorema da continuidade discutido anteriormente.

5.1. Fuzzificação Intervalar

As entradas fornecidas ao sistemas serão fuzzificadas em intervalo de pertinência, determinados pela função de limite inferior e superior respectivamente.

Para o valor da temperatura igual a 78°F tem-se o grau de pertinência intervalar para quente igual a [0.2;0.38] e para morno igual a [0.38; 0.74]. Conforme mostra a figura 55.

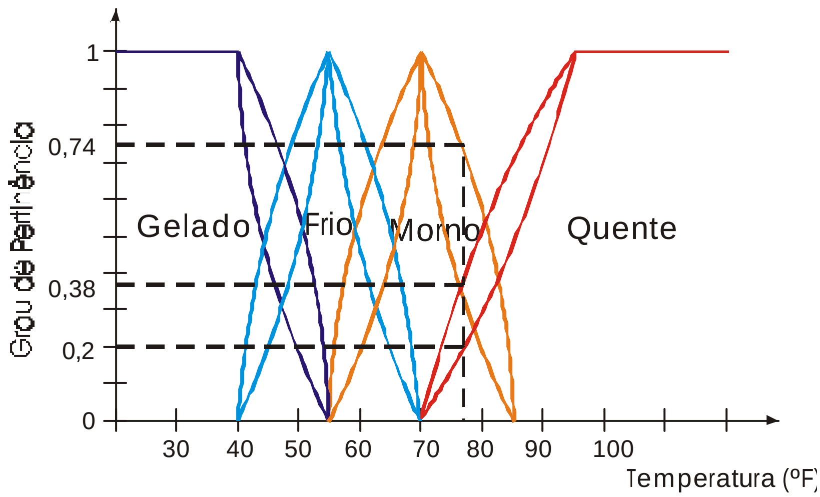


Figura 55 – Fuzzificação Intervalar para 78° F

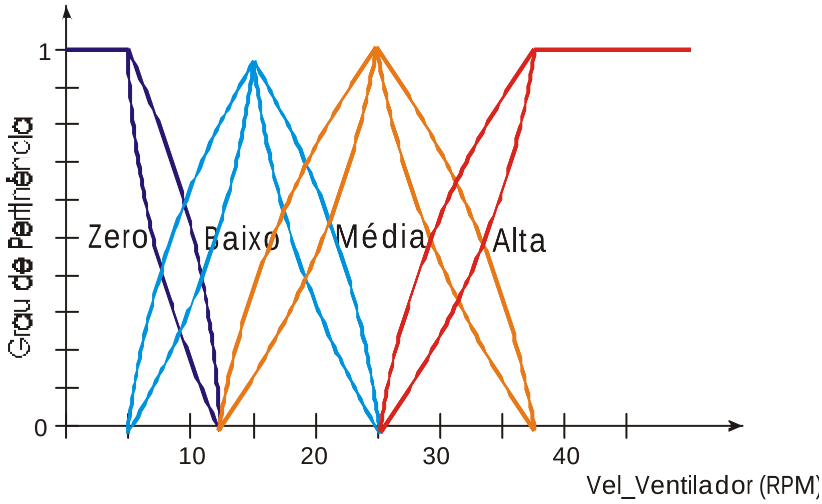


Figura 54 – Conjunto Fuzzy Intervalar Velocidade do Ventilador

4.3. Regras e Mecanismo de Inferência Fuzzy Intervalar

As regras fuzzy intervalar são baseados nos conjuntos fuzzy intervalar definidos anteriormente. Assim tem-se as seguintes regras:

R1: *If* temperatura *is* gelada *and* umidade *is* alta *Then* vel_ventilador *is* alta

R2: *If* temperatura *is* fria *and* umidade *is* alta *Then* vel_ventilador *is* media

R3: *If* temperatura *is* morna *and* umidade *is* alta *Then* vel_ventilador *is* baixa

R4: *If* temperatura *is* quente *and* umidade *is* alta *Then* vel_ventilador *is* parado

R5: *If* temperatura *is* gelada *and* umidade *is* média *Then* vel_ventilador *is* média

R6: *If* temperatura *is* fria *and* umidade *is* média *Then* vel_ventilador *is* baixa

R7: *If* temperatura *is* morna *and* umidade *is* média *Then* vel_ventilador *is* parado

R8: *If* temperatura *is* quente *and* umidade *is* média *Then* vel_ventilador *is* parado

R9: *If* temperatura *is* gelada *and* umidade *is* baixa *Then* vel_ventilador *is* média

R10: *If* temperatura *is* fria *and* umidade *is* baixa *Then* vel_ventilador *is* baixa

R11: *If* temperatura *is* morna *and* umidade *is* baixa *Then* vel_ventilador *is* parado

R12: *If* temperatura *is* quente *and* umidade *is* baixa *Then* vel_ventilador *is* parado

Perceba que as regras são as mesmas definidas para conjuntos fuzzy, a diferença será como essas regras serão utilizadas, pela função de limite inferior e superior.

4.2. Função de Pertinência Fuzzy Intervalar

Os conjuntos fuzzy intervalar temperatura, umidade e velocidade do ventilador possuem as respectivas funções de pertinência:

O domínio e o universo em discussão são os mesmos definidos para os conjuntos fuzzy.

Neste caso, as funções de pertinência intervalar foram definidas a partir das funções de pertinência fuzzy colocando uma margem de erro de aproximadamente 0.5 para valores na região de maior indecibilidade e essa margem vai diminuindo a medida que os valores se aproximam da extremidade, visto que são regiões onde se possui um maior grau de certeza sobre os valores.

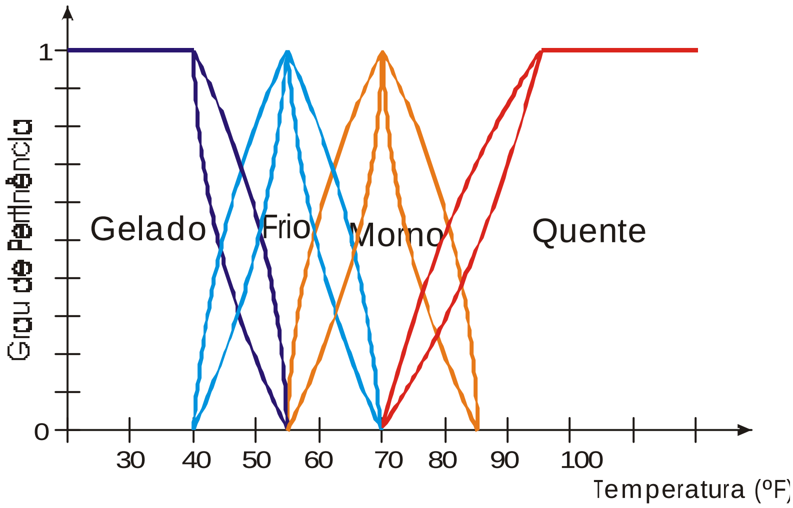


Figura 52 – Conjunto Fuzzy Intervalar Temperatura

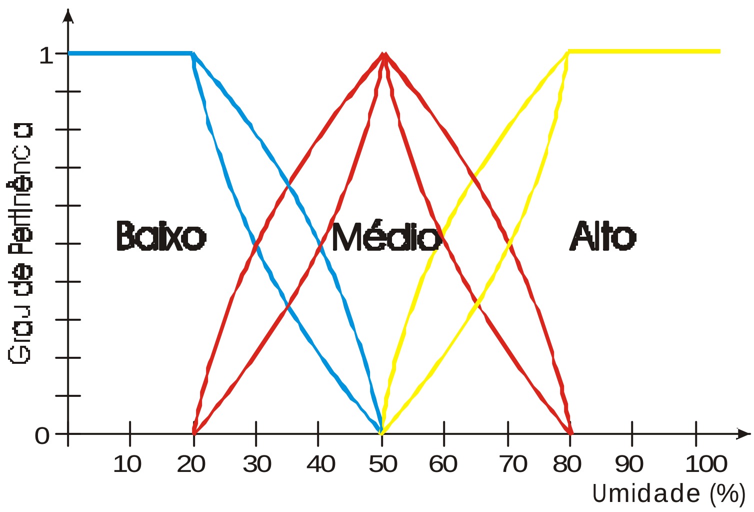


Figura 53 – Conjunto Fuzzy Intervalar Umidade

$x^* = 12.76$ rpm

4. Definição do Sistema Controlador de Temperatura Fuzzy Intervalar

O Sistema é exatamente o mesmo definido anteriormente, mas existem alguns motivos para modelá-lo através da teoria fuzzy intervalar. O mais importante é a melhor precisão nos dados fornecidos pelo especialista. Como foi mencionada anteriormente, a escolha a função de pertinência é de fundamental importância no desenvolvimento do sistema fuzzy. Ao invés de se fazer a interpolação nas entradas fornecidas pelo especialista, o que leva a perda de informação, pode-se criar duas funções limitando a esses valores, garantindo que todos os valores estarão contidos no intervalo definido por estas funções. Além disso, para facilitar a aquisição do conhecimento o especialista pode especificar intervalos diretamente para o grau de pertinência.

Desta forma o controlador de temperatura pode ser definido da seguinte forma:

4.1. Identificação das Variáveis ou Conjuntos Fuzzy Intervalar

As variáveis são exatamente as mesmas com os mesmos atributos, o que vai mudar é a sua representação, ou seja, a sua função de pertinência.

Tem-se os seguintes conjuntos fuzzy intervalar

Temperatura: gelado, frio, morno, quente;

Umidade: alto, médio, baixo;

Velocidade do ventilador: parado, baixo, médio, alto.

Todos esses conceitos são conceitos fuzzy intervalar e serão tratados como tal.

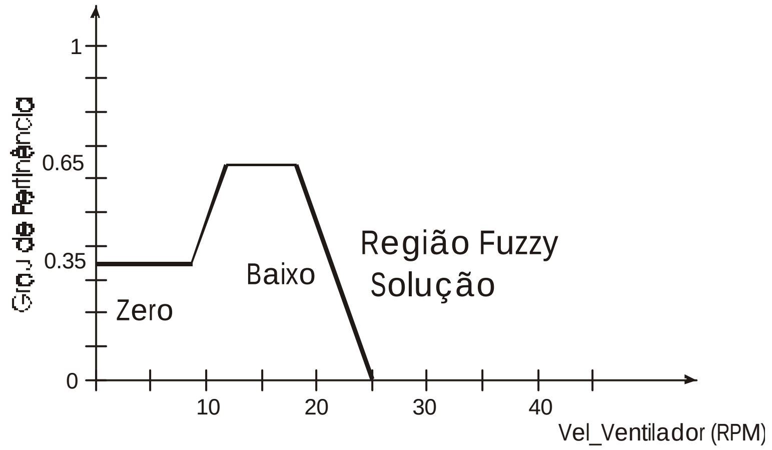


Figura 50 – Região Fuzzy Solução

3.3. Defuzzificação Fuzzy

Durante a etapa de defuzzificação é extraído um valor crisp da região fuzzy solução obtida anteriormente na figura 50. Neste caso, utilizando o método de defuzzificação centróide é obtido do valor de 12.76 RPM para a velocidade do ventilador.

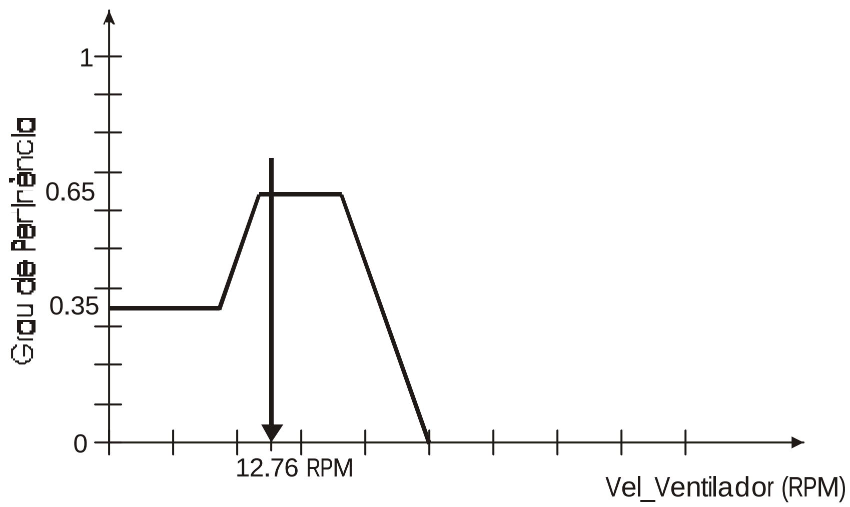


Figura 51 – Defuzzificação do Conjunto Fuzzy Solução

Segundo a equação 48 o método de defuzzificação centróide é dado por:

$$x^* = \frac{\sum x_i \mu_{OUT}(x_i)}{\sum \mu_{OUT}(x_i)}$$

x* = (0*0.35 + 8.9*0.35 + 12*0.65 + 18*0.65 + 21.1*0.35 + 25*0) /(0.35+0.35+0.65+0.65+0.35+0)

3.2. Avaliação das Regras ou Inferência Fuzzy

Durante a etapa de avaliação das regras, as regras são avaliadas e algumas delas são disparadas. Para 78ºF e umidade de 70% apenas as regras R3, R4, R7 e R8 são disparadas das 12 regras existentes. Especificamente tem-se o seguinte:

Pela R3: A vel_ventilador é *baixa* com um grau de pertinência que é o mínimo entre o grau de pertinência para ter temperatura morna (0.65) e umidade alta (0.7), de acordo com o operador de composição especificado.

Pela R4: A vel_ventilador é *parado* com grau de pertinência min(0.3; 0.7)

Pela R7: A vel_ventilador é *parado* com grau de pertinência min(0.65; 0.35)

Pela R8: A vel_ventilador é *parado* com grau de pertinência min(0.3; 0.35)

O resultado destas operações são projetados nos respectivos conjuntos fuzzy baixo e parado (figura 49) obtendo o máximo da região solução, como mostra a figura 50, que representa o resultado da inferência fuzzy min-max.

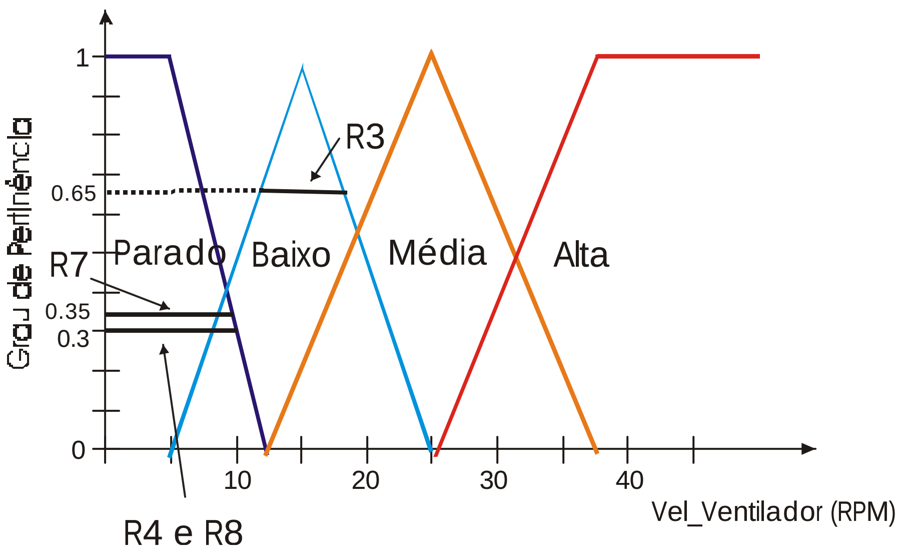


Figura 49 – Inferencia Fuzzy Min-Max

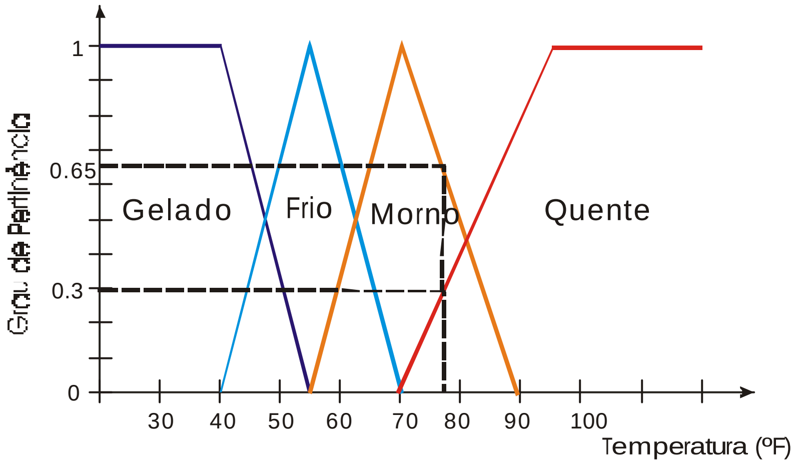


Figura 47 – Fuzzificação para 78º F

Suponha que num dado instante a temperatura é igual e 78ºF e a umidade é de 70%. Esses valores são transformados em valores verdades fuzzy, ou seja, 78ºF é fuzzificado como morno com um grau de pertinência de 0.65 e quente com um grau de pertinência de 0.3. Como mostra a figura 47.

Enquanto, para uma umidade 70% é fuzzificado como alto com um grau de pertinência de 0.7 e médio com um grau de pertinência de 0.35, como mostra a figura 48.

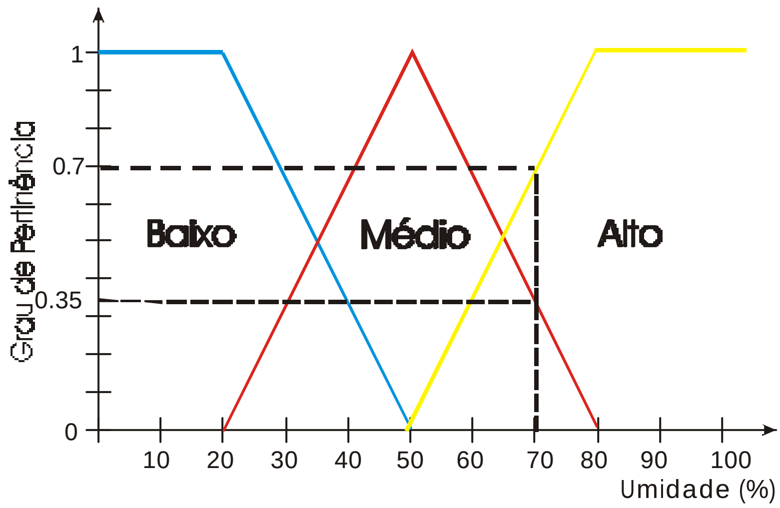


Figura 48 – Fuzzificação de 70% de umidade

Neste exemplo será utilizada a inferência min-max criada por Zadeh, que pode ser definida simplificadamente como: durante o processo de inferência pega-se o menor dos graus de pertinência de todas as condições da regra disparada pelo valor de entrada fuzzificado, e aplica-o no conjunto fuzzy da variável de saída correspondente (velocidade do ventilador). O resultado da inferência é a região máxima definida por esses valores, conhecida como conjunto fuzzy solução. Este método de inferência utiliza os operadores de composição e implicação min-max.

2.4. Defuzzificação

Se as conclusões dos conjuntos de regras fuzzy envolvem conceitos fuzzy, então esses devem ser transformados de volta em um número de saída que pode ser utilizado na prática.

Neste exemplo será utilizado o método centróide ou centro de gravidade que pega cada valor multiplica pelo seu grau de pertinência e o somatório divide pela soma dos graus de pertinência, como definido anteriormente.

3. Execução do Sistema Fuzzy

Um controlador fuzzy trabalha semelhante a um sistema convencional: ele aceita um valor de entrada, desenvolve alguns cálculos, e gera um valor de saída. Este processo é chamado de sistema de inferência fuzzy e trabalha com as três etapas já definidas:

3.1. Fuzzificação

Primeiramente os dados de entradas são fornecidos ao sistema, neste caso os dados são capturados pelos sensores de temperatura e umidade que serão transformados em valores fuzzy.

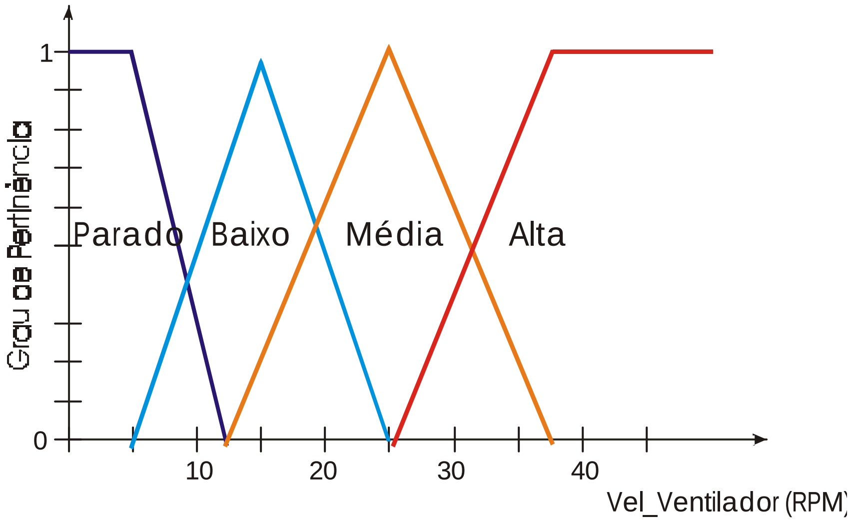


Figura 46 – Conjunto Fuzzy Velocidade do Ventilador

2.3. Regras e Mecanismos de Inferência Fuzzy

As regras são elaboradas baseadas nos conjuntos fuzzy definidos anteriormente e servirão para gerar as conclusões a partir das entradas do sistema.

O controlador de temperatura descrito acima pode ser definido pelas seguintes regras:

R1: *If* temperatura *is* gelada *and* umidade *is* alta *Then* vel_ventilador *is* alta

R2: *If* temperatura *is* fria *and* umidade *is* alta *Then* vel_ventilador *is* media

R3: *If* temperatura *is* morna *and* umidade *is* alta *Then* vel_ventilador *is* baixa

R4: *If* temperatura *is* quente *and* umidade *is* alta *Then* vel_ventilador *is* parado

R5: *If* temperatura *is* gelada *and* umidade *is* média *Then* vel_ventilador *is* média

R6: *If* temperatura *is* fria *and* umidade *is* média *Then* vel_ventilador *is* baixa

R7: *If* temperatura *is* morna *and* umidade *is* média *Then* vel_ventilador *is* parado

R8: *If* temperatura *is* quente *and* umidade *is* média *Then* vel_ventilador *is* parado

R9: *If* temperatura *is* gelada *and* umidade *is* baixa *Then* vel_ventilador *is* média

R10: *If* temperatura *is* fria *and* umidade *is* baixa *Then* vel_ventilador *is* baixa

R11: *If* temperatura *is* morna *and* umidade *is* baixa *Then* vel_ventilador *is* parado

R12: *If* temperatura *is* quente *and* umidade *is* baixa *Then* vel_ventilador *is* parado

O domínio do conjunto fuzzy umidade é a percentagem de vapor d'água contida no ar e o universo compreende entre 0% e 100% (figura 45).

Enquanto o domínio do conjunto fuzzy velocidade do ventilador é a velocidade em rotações por minutos (RPM) e seu universo está entre 0 RPM e 50 RPM (figura 46).

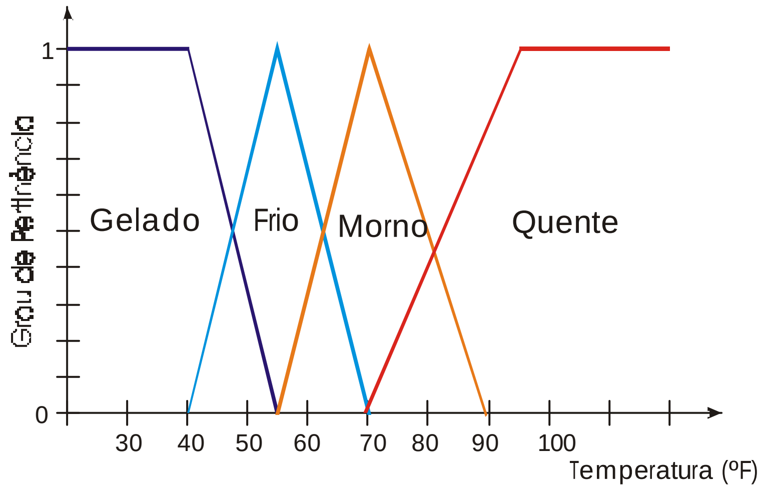


Figura 44 – Conjunto Fuzzy Temperatura

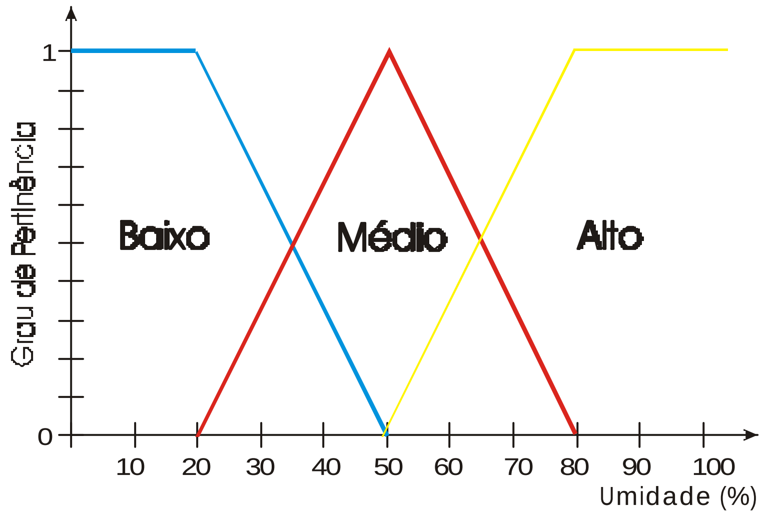


Figura 45 – Conjunto Fuzzy Umidade

Um termostato fuzzy trabalha com funções onde a temperatura está relacionada com uma série de áreas sobrepostas. Por exemplo, 78ºF é 65% morno e 30% quente. O controlador é programado com regras simples If-Then que determinam o quanto é a velocidade do ventilador. Como um resultado, quando a temperatura muda a velocidade do ventilador continuamente será ajustada para manter a temperatura no nível desejado. A seguir será especificado o suficiente para ser analisado o desenvolvimento de um sistema fuzzy.

2.1. Identificação das variáveis

O primeiro passo no projeto do controlador de temperatura é caracterizar quais as variáveis de entrada e saída do controlador, ou seja, quais os conjuntos fuzzy necessários para o desenvolvimento do mesmo.

Como entrada tem-se duas variáveis lingüísticas: *temperatura* e *umidade*, E como variável de saída pode identificar a *velocidade do ventilador*, as quais possuem atributos ou termos lingüísticos.

A variável lingüística *temperatura* possui os seguintes atributos: *gelado*, *frio*, *morno* e *quente*. Enquanto a variável *umidade* tem como atributos: *alto*, *médio* e *baixo*. E a variável de saída *velocidade do ventilador* possui os atributos: *parado*, *baixo*, *médio* e *alto*.

2.2. Função de Pertinência

A escolha da função de pertinência é muito importante para o desempenho do sistema. Funções não lineares podem ser utilizadas, no entanto quando se tem muita variável, a utilização destas funções pode requerer grande quantidade de memória no seu processamento. Uma alternativa para amenizar o esforço de processamento é a interpolação das funções de pertinência mais complexas, transformando-as em funções lineares.

Desta forma foram escolhidas as funções triangulares para representar os conjuntos fuzzy.

O domínio do conjunto fuzzy temperatura é a temperatura em graus Farenhait (ºF) e seu universo de discussão está entre 0ºF e 100ºF (figura 44).

- Criar as funções de pertinência para os conjuntos fuzzy;
- Construir a base de regras e o mecanismo de inferência;
- Especificar os métodos de defuzzificação a ser aplicado.

2. Definição de um Sistema Controlador de Temperatura Fuzzy

Considere o exemplo de um sistema para controlar o termostato do aquecedor de um ventilador ilustrado na figura 43, adaptada do exemplo mostrado em [FIDE 1999]. A temperatura da sala é detectada através de um sensor o qual é uma das entradas do controlador de temperatura, outro sensor detecta a umidade relativa da sala a qual também é uma entrada para o controlador de temperatura. O controlador tem como saída a velocidade do ventilador, ou seja, quanto o ventilador deve ser ajustado para deixar a sala na temperatura desejada.

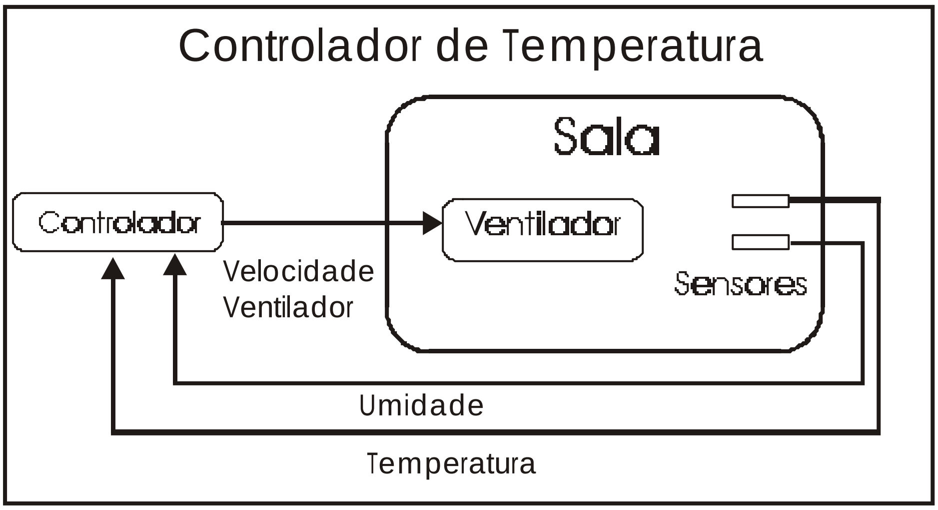


Figura 43 – Controlador de Temperatura Fuzzy

Um termostato convencional trabalha com duas opções ligado e desligado. Se for setado a temperatura de 78°F[1] então o ventilador é acionado apenas quando a temperatura descer abaixo de 75°F. Quando a temperatura chegar a 81°F então o aquecedor do ventilador é desligado. Como resultado a temperatura desejada da sala nem é tão morna nem tão quente.

[1] Lembrando que a converção de Graus Farehait para graus Ceusius se dá pela fórmula C=(F-32)* 5/9.

CAPÍTULO 5 - ESTUDO DE CASO

1. Introdução

Neste capítulo será mostrado um exemplo de um sistema modelado através de conceitos fuzzy e posteriormente este mesmo exemplo será modelado através de conceitos fuzzy intervalar.

Como foi visto nos capítulos anteriores, ao contrário dos conjuntos tradicionais, nos quais um elemento pertence ou não a este conjunto, a idéia de conjunto fuzzy está associada a um grau de pertinência que varia conforme o elemento em questão. Assim um elemento pode pertencer muito ou pouco e até não pertencer a um conjunto fuzzy. O grau de pertinência varia de 0 a 1, da completa exclusão a total pertinência assumindo todos os valores intermediários.

Os sistemas fuzzy são compostos basicamente por:

- Entrada: São dados numéricos nos quais o sistema se baseará para tomar decisões.
- Fuzzificador: Transforma os dados numéricos em informações fuzzy
- Sistema de Inferência: composto da base de conhecimento (regras), mecanismos de inferência, que utilizam operadores de implicação e composição.
- Defuzzificador: Transforma a saída fuzzy do sistema em um número crisp.

Para a criação de um sistema fuzzy precisa-se identificar as seguintes etapas:

- Identificar as variáveis que definem o problema;

5.2.3. Defuzzificação Fuzzy Intervalar

O processo de defuzzificação intervalar é obtido através da defuzzificação dos conjuntos soluções inferior (d_i) e superior (d_s), utilizando qualquer dos métodos de defuzzificação fuzzy visto na seção 5.3 do capítulo 2. O resultado é um intervalo formado pelo valor da defuzzificação da função inferior (d_i) e superior (d_s):

$$DI = [\min(d_i, d_s), \max(d_i, d_s)]. \quad \text{Equação 91}$$

Para calcular um único valor como solução para a defuzzificação intervalar é extraído o ponto médio do intervalo encontrado:

$$d = (d_i + d_s) / 2 \quad \text{Equação 92}$$

Para a defuzzificação pelo método de defuzzificação Maxplateau ou média dos máximos que é dado por: [Bojadziev 1996], [Cox 1994], [Kasabov 1996]

$$x^* = \sum x_m / M \quad \text{Equação 93}$$

onde x_m é o m-ésimo elemento no universo em discussão, a função de pertinência de $\mu_{OUT}(x)$ está no valor máximo, e M é o número total de elementos.

No estudo de caso mostrado a seguir pode-se visualizar melhor o funcionamento do sistema de inferência fuzzy intervalar.

A interpretação gráfica para a inferência fuzzy min-max intervalar, é similar à interpretação fuzzy, sendo que neste caso se trabalha com as funções de limite inferior (φ_i) e superior (φ_s) gerando duas regiões fuzzy solução como mostra as regiões sombreadas da figura 40.

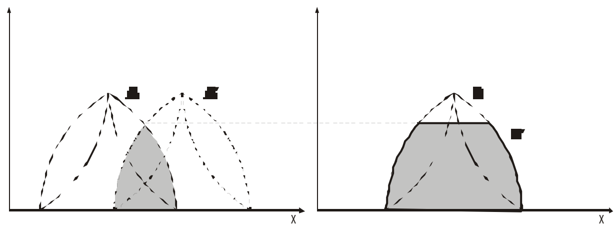


Figura 40 - Interpretação Gráfica da Inferência Min-Max Intervalar

De acordo com o teorema 1, a função intervalar φ: R→[0,1], onde $\varphi(x) = [\varphi_i(x), \varphi_s(x)]$, pode ser tratada como duas funções contínuas separadamente, ou seja o mecanismo de inferência é aplicado na função do limite inferior φ_i e na função do limite superior φ_s independentemente, gerando a região de limites inferior (B_i’ - figura 41) e superior (B_s’ - figura 42) do intervalo solução da função intervalar φ.

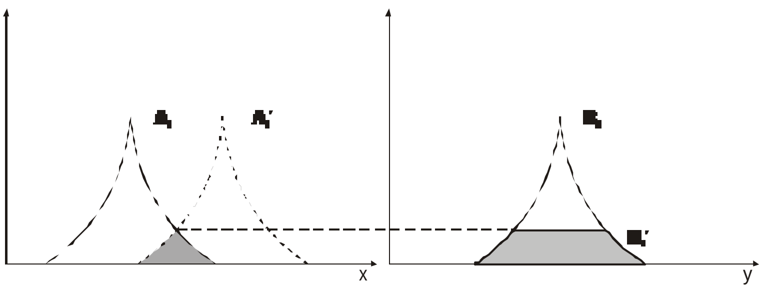


Figura 41 - Região do Limite Inferior

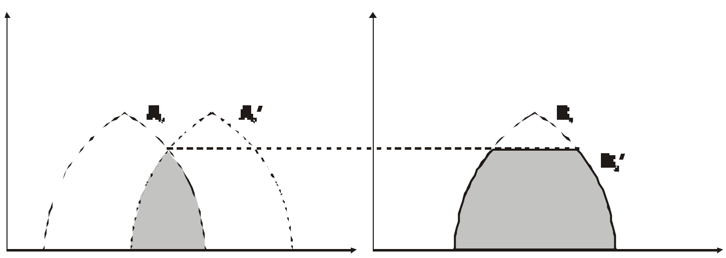


Figura 42 - Região do Limite Superior

5.1. Fuzzificação Intervalar

Durante a fuzzificação intervalar os valores de entradas do sistema são mapeados nos conjuntos fuzzy intervalar relevantes para o problema. São produzido os graus de pertinência para cada conjunto em questão, neste caso serão produzidos dois graus de pertinência para cada conjunto fuzzy, o grau de pertinência intervalar inferior $\varphi_i(x)$, e o grau de pertinência intervalar superior $\varphi_s(x)$.

5.2. Inferência Fuzzy Intervalar

Assim como nos sistemas fuzzy o mecanismo de inferência fuzzy intervalar utiliza a generalização da inferência modus ponens.

5.2.1. Modus Ponens Generalizado

Como foi visto no capítulo 2, a inferência fuzzy utiliza uma generalização da inferência modus ponens (GMP) e uma regra de inferência composicional, assim a inferência fuzzy é definida como:

Premissa 1: x is A → y is B

Premissa 2: x is A’

Consequente: y is B’

Logo, $B' = A' \circ R(x, y) = A' \circ (A \rightarrow B)$ Equação 89

onde A, A’ B e B’são conjuntos fuzzy, x e y são variáveis fuzzy, R(x, y) é a relação binária fuzzy de implicação e ◦ é o operador de composição. O conjunto fuzzy B’ também chamado de região fuzzy solução B’ como mostrado na seção 5.2 do capítulo 2.

5.2.2. Inferência Fuzzy Intervalar

A inferência fuzzy intervalar é dada através da utilização das definições fuzzy intervalar, a equação 79 é generalizada para:

$B' = A' \bullet \hat{A}(x, y) = A' \bullet (A \rightarrow B)$ Equação 90

onde A, A’ B e B’são conjuntos fuzzy intervalar, x e y são variáveis fuzzy intervalar, $\Re$ (x, y) é a relação fuzzy intervalar, e ● é o operador de composição intervalar.

Perceba que, como os valores são positivos necessariamente o resultado do limite inferior do intervalo é menor ou igual ao limite superior do intervalo, ou seja $\varphi_{Ai}(x) \bullet \varphi_{Bi}(y) \bullet \quad \varphi_{As}(x) \bullet \varphi_{Bs}(y)$.

4.4.1.4. Booleano Intervalar

O operador de implicação booleano intervalar é baseado na lógica clássica.

$$\phi_b(\varphi_A(x), \varphi_B(y)) = MAX\{(1-\varphi_A(x)); \varphi_B(y)\} \qquad \text{Equação 88}$$

5. Sistema de Inferência Fuzzy Intervalar

Como o sistema de inferência fuzzy intervalar é baseado no sistema de inferência fuzzy, ele possui basicamente os mesmo componentes, sendo que todo o tratamento é feito em cima de intervalos. Como ilustra a figura 39:

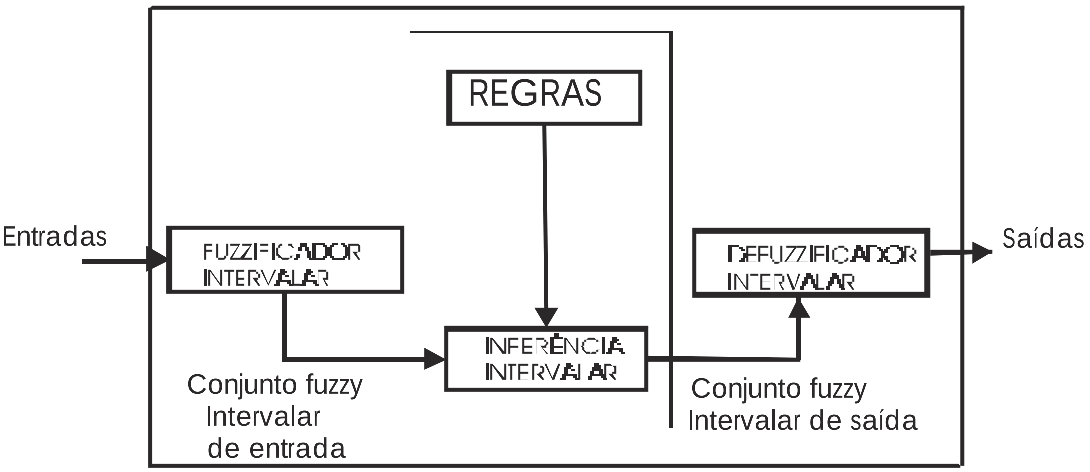


Figura 39 – Sistema de Inferência Fuzzy Intervalar

Os sistemas de inferência fuzzy intervalar funcionam igualmente aos sistemas de inferência fuzzy, os dados de entradas são capturados pelo fuzzificador intervalar mapeando-os nos conjuntos fuzzy intervalar, na fase de ***fuzzificação intervalar***. As regras fuzzy intervalar são executadas e através do processo de ***inferência fuzzy intervalar*** os conjuntos fuzzy intervalar solução são gerados, para só então poder ser extraído o resultado final do sistema através da ***defuzzificação intervalar.***

4.4. Relação de Implicação Intervalar

As relações de implicação são obtidas através de diferentes *operadores de implicação fuzzy intervalar ¢*. As informações dos antecedentes e conseqüentes das regras são entradas para o ¢, e sua saída é uma relação de implicação intervalar.

A forma básica de representar uma regra fuzzy intervalar é a relação de implicação intervalar:

$$\Re(x, y) = \int_{(x,y)} (x, y) / \varphi_{\Re}(x, y) \qquad \text{Equação 84}$$

onde $\varphi_{\Re}$ (x, y) é a função de pertinência fuzzy intervalar da relação de implicação intervalar.

4.4.1. Operadores de Implicação Fuzzy Intervalar

Os operadores de implicação são importantes para se obter as relações de implicação no processo de inferência [Kandel 1996], [Tsoukalas 1997]. Existem muitos operadores de implicação, neste trabalho serão levados em consideração os mais utilizados.

4.4.1.1. Max-Min de Zadeh Intervalar

A versão intervalar do operador de implicação max-min de Zadeh é definido como:

¢m(j A(x), j B(y)) =MAX {MIN{ j A(x); j B(y)}; (1- j A(x))} Equação 85

4.4.1.2. Mamdani Min Intervalar

É uma versão simplificada do operador max-min de Zadeh intervalar, definido como:

¢c(j A(x), j B(y)) = MIN{ j A(x); j B(y)} Equação 86

4.4.1.3. Produto de Larsen Intervalar

A versão intervalar do operador de implicação produto de Larsen utiliza o produto aritmético e é definido como:

¢p(j A(x), j B(y)) = [j Ai(x) . j Bi(y), j As(x) . j Bs(y)] Equação 87

4.2.1. Composição Max –Min Fuzzy Intervalar

A composição max-min fuzzy intervalar entre duas relações fuzzy intervalar $\Re_1 \subseteq U_1 \times U_2$ e $\Re_2 \subseteq U_2 \times U_3$ usa as operações básicas de intervalos MAX e MIN. A composição de $\Re_1$ e $\Re_2$ é uma nova relação $\Re_1 \bullet \Re_2 \subseteq U_1 \times U_3$ definida como:

$$j_{\tilde{A}1 \bullet \tilde{A}2}(x,z) = MAX\{MIN\{ j_{\tilde{A}1}(x,y),\ j_{\tilde{A}2}(y,z)\} / \ y\ î\ U_2\} \qquad \text{Equação 81}$$

4.2.2. Composição Max-Star Fuzzy Intervalar

Operações binárias intervalares podem ser utilizadas no lugar do MIN da composição min-max definida anteriormente. A este tipo de composição chamamos de max-star. Assim a composição max-star de $\Re_1 \subseteq U_1 \times U_2$ e $\Re_2 \subseteq U_2 \times U_3$ e a nova relação:

$$j_{\tilde{A}1 * \tilde{A}2}(x,z) = MAX\ \{ j_{\tilde{A}1}(x,y) * j_{\tilde{A}2}(y,z)\ /\ y\ î\ U_2\} \qquad \text{Equação 82}$$

onde * representa qualquer operação binária intervalar.

4.2.3. Composição Max-Produto Fuzzy Intervalar

A composição max-produto é uma composição max-star que utiliza o produto intervalar (.) como operação binária. Então a composição max-produto de duas relações fuzzy intervalar $\Re_1 \subseteq U_1 \times U_2$ e $\Re_2 \subseteq U_2 \times U_3$ é

$$j_{\tilde{A}1 \tilde{A}2}(x,z) = MAX\{ j_{\tilde{A}1}(x,y) . j_{\tilde{A}2}(y,z)\ /\ y\ î\ U_2\} \qquad \text{Equação 83}$$

4.3. Regras Fuzzy Intervalar

Os sistemas fuzzy intervalar utilizam regras fuzzy intervalar, que são implicações entre proposições fuzzy intervalar. O primeiro passo para a modelagem das regras fuzzy intervalar é especificar como uma implicação é logicamente representada. Uma forma de representa-la é através de uma implicação lógica entre os antecedentes e os conseqüentes. Dada a regra "IF x is A Then y is B" a implicação lógica derivada é $(x \in A) \rightarrow (y \in B)$, ou simplesmente $A \rightarrow B$.

Aplicada as funcões de pertinência inferior e superior:

$\varphi_{nãoAi}(x) = 1 - \varphi_{As}(x)$

$\varphi_{nãoAs}(x) = 1 - \varphi_{Ai}(x)$

4. Raciocínio Aproximado

O raciocínio aproximado pode ser entendido como o processo de inferir conclusões imprecisas de premissas imprecisas. Serão definidos os conceitos relevantes para a definição do sistema de inferência fuzzy intervalar na próxima seção.

4.1. Relação Fuzzy Intervalar

O conceito de relação fuzzy vem da generalização do conceito de relação entre conjuntos clássicos. Em conjuntos fuzzy intervalar as relações são importantes para representar a associação formal entre os antecedentes e os consequentes das regras. Uma regra como "IF x is A Then y is B" descreve a relação entre as variáveis x e y. Os pares de uma relação fuzzy intervalar binária podem ser definidos como:

Â (x, y) = {((x,y), j$_{Â}$ (x,y))/ x Î U$_A$ e y Î U$_B$} Equação 80

onde x e y são variáveis fuzzy intervalar, U_A e U_B são universos de discussão de x e y e $\varphi_{\Re}(x,y)$ é o grau de pertinência fuzzy intervalar da relação. Neste caso diz-se que $\Re$ é uma relação fuzzy intervalar nos universos U_A e U_B e denotado por $\Re \subseteq U_A \times U_B$.

4.2. Composição de Regras Fuzzy Intervalar

As relações fuzzy intervalar definidas nos produtos cartesianos podem ser combinadas uma com as outras de diferentes formas através de composição. A principal tarefa na composição é computar os graus de pertinência dos pares (x, z) na relação composta, denotado por $\varphi(x, z)$.

As principais relações de composição intervalar para o grau de pertinência intervalar de duas relações fuzzy intervalar $\Re_1$ e $\Re_2$ são definidas abaixo:

3.4.1. Muito

O modificador lingüístico *muito* corresponde ao operador fuzzy *concentração*, definido por CON(A).

$\varphi_{muitoA}(x) = (\varphi_A(x))^2$ é equivalente a

$\varphi_{CON(A)}(x) = (\varphi_A(x))^2$

Em termos das funções de limite inferior e superior tem-se:

$\varphi_{muitoAi}(x) = (\varphi_{Ai}(x))^2$

$\varphi_{muitoAs}(x) = (\varphi_{As}(x))^2$

3.4.2. Mais ou menos

O modificador lingüístico *mais ou menos* corresponde ao operador fuzzy *dilatação*, denotado por DIL(A).

$\varphi_{mais\ ou\ menosA}(x) = (\varphi_A(x))^{1/2}$ é equivalente a,

$\varphi_{DIL(A)}(x) = (\varphi_A(x))^{1/2}$

Para as funções de limite inferior e superior obtem-se:

$\varphi_{mais\ ou\ menosAi}(x) = (\varphi_{Ai}(x))^{1/2}$

$\varphi_{mais\ ou\ menosAs}(x) = (\varphi_{As}(x))^{1/2}$

3.4.3. Extremamente

$\varphi_{extremamenteA}(x) = (\varphi_A(x))^3$

Em termos das funções de limite inferior e superior tem-se:

$\varphi_{extremamenteAi}(x) = (\varphi_{Ai}(x))^3$

$\varphi_{extremamenteAs}(x) = (\varphi_{As}(x))^3$

3.4.4. Não

O modificador *não* é equivalente ao operador de complemento definido anteriormente.

$\varphi_{nãoA}(x) = 1 - \varphi_A(x)$

A seguir serão definidos as variáveis lingüísticas, os modificadores lingüísticos e o raciocínio aproximado para conjuntos fuzzy intervalar necessários para o desenvolvimento do sistema de inferência fuzzy intervalar.

3.3. Variáveis Lingüísticas

Assim como nos conjuntos fuzzy as variáveis linguísticas são variáveis cujos valores são conjuntos fuzzy intervalar. A figura 38 representa o conceito da variável linguística idade formada pelos conjuntos fuzzy intervalar *muito jovem, jovem, adulto, velho* e *muito velho* definidos no universo U=[0,100].

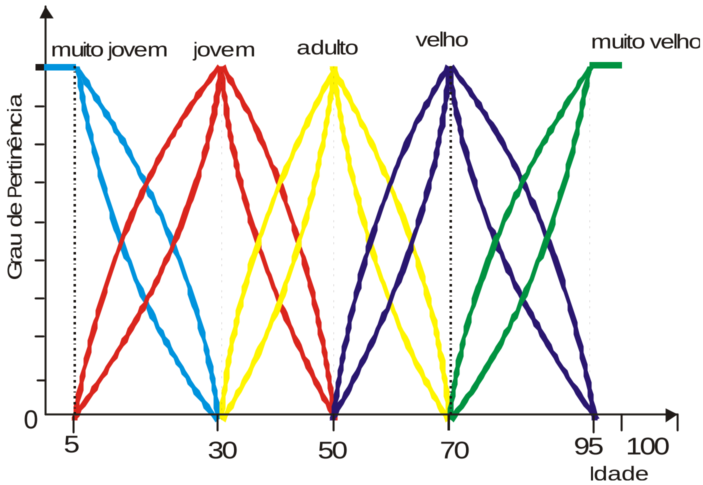


Figura 38 – Variável Lingüística Fuzzy Intervalar Idade

As proposições podem ser utilizadas exatamente como estão definidas na lógica fuzzy seção 3 do capítulo 2.

3.4. Modificadores Fuzzy Intervalar

Assim como os modificadores lingüísticos fuzzy ou hedges [Cox 1994, Kasabov 1996] os modificadores fuzzy intervalar transformam a forma de um conjunto fuzzy intervalar causando uma alteração na sua função de pertinência. Então um modificador transforma um conjunto fuzzy intervalar em um novo conjunto fuzzy intervalar. Os principais hedges definidos por Zadeh será extendidos para suas versões fuzzy intervalar a seguir.

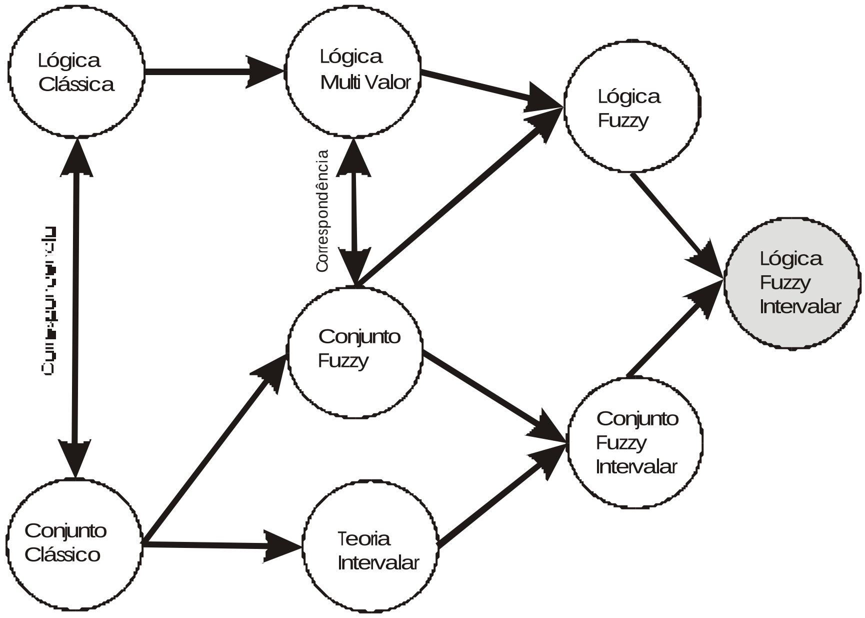


Figura 37 – Lógica Fuzzy Intervalar

A Lógica Fuzzy Intervalar está intimamente ligada à Lógica Fuzzy, pois todos os seus componentes são derivados dela, e também envolve os conceitos da teoria dos intervalos definidas nos conjuntos fuzzy intervalar, assim esquematicamente tem-se a figura 37 baseada do esquema de [Bojadziev 1996]

3.2. Conectivos Lógicos

Sejam A e B conjuntos fuzzy intervalares com universos U_A e U_B, respectivamente, e as proposições:

p = x is A e

q = y is B

O grau de verdade da proposição p, denotado por tr(p), é dada pela função de pertinência intervalar.

Os conectivos lógicos AND, OR e NOT são aplicados às proposições p e q tendo o grau de verdade mostrado a seguir:

$$tr(p \text{ AND } q) = tr(p \wedge q) = MIN\{\mu_A(x), \mu_B(y)\} \quad \text{Equação 77}$$

$$tr(p \text{ OR } q) = tr(p \vee q) = MAX\{\mu_A(x), \mu_B(y)\} \quad \text{Equação 78}$$

$$tr(\text{NOT } p) = 1 - tr(p) = 1 - \mu_A(x) \quad \text{Equação 79}$$

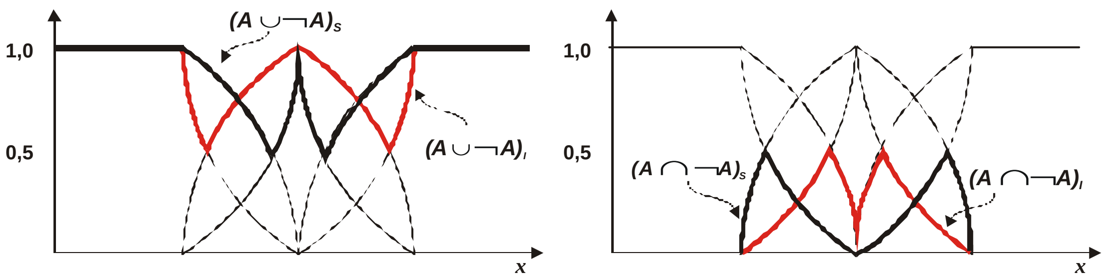
2.5.2.8. *Leis da Exclusão Mútua e da Contradição*

Analogamente a conjuntos fuzzy, apenas as propriedades da exclusão mútua e contradição de Aristóteles não são válidas para conjuntos fuzzy intervalar.

Perceba que a união de um conjunto fuzzy intervalar A com seu complemento ¬A não é necessariamente o conjunto fuzzy intervalar universo Û e a interseção entre os dois não é necessariamente igual ao conjunto fuzzy intervalar vazio Ô, como ilustrado na figura 36. De fato sempre que A ≠ Ô e A ≠ Û tem-se que

A ∩ ¬A ≠ Ô

A ∪ ¬A ≠ Û



(a) (b)

Figura 36 - A lei da exclusão mútua não é válida para conjuntos fuzzy intervalar. (a) A È ØA (b) A Ç ØA.

Depois do que foi exposto pode-se afirmar que todas as operações para conjuntos fuzzy são facilmente extendidas para conjuntos fuzzy intervalar.

3. Lógica Fuzzy Intervalar

3.1. Introdução

A Lógica Fuzzy Intervalar é baseada na teoria dos conjuntos fuzzy intervalar, e serve de base para o desenvolvimento do raciocínio aproximado e conseqüentemente o desenvolvimento de um sistema de inferência fuzzy intervalar.

$=\{(x, MIN\{MAX\{\varphi_A(x);\varphi_B(x)\}; MAX\{\varphi_A(x);\varphi_C(x)\}\})/ x\in U\}$

$= (A \cup B) \cap (A \cup C)$

2.5.2.6. Complemento Duplo

$\neg(\neg A) = \neg(\{(x, 1-\varphi_A(x)) / x \in U\})$

$= \{(x, 1- (1-\varphi_A(x))) / x \in U\}$

$= \{(x, 1-1+ \varphi_A(x)) / x \in U\}$

$= \{(x, \varphi_A(x)) / x \in U\}$

$= A$

2.5.2.7. Leis de De Morgan

$\neg(A \cap B) = \neg(\{(x, MIN\{\varphi_A(x); \varphi_B(x)\}) / x \in U\})$

$= \neg(\{(x, [min(\varphi_{Ai}(x); \varphi_{Bi}(x)), min(\varphi_{As}(x); \varphi_{Bs}(x))]) / x \in U\})$

$= \{(x, 1- [min(\varphi_{Ai}(x); \varphi_{Bi}(x)), min(\varphi_{As}(x); \varphi_{Bs}(x))]) / x \in U\}$

$= \{(x, [1- min(\varphi_{As}(x); \varphi_{Bs}(x)), 1- min(\varphi_{Ai}(x); \varphi_{Bi}(x))]) / x \in U\}$

$= \{(x, [max(1-\varphi_{As}(x); 1- \varphi_{Bs}(x)), max(1- \varphi_{Ai}(x); 1- \varphi_{Bi}(x))]) / x \in U\}$

$= \{(x, MAX\{1- \varphi_A(x); 1- \varphi_B(x)\}) / x \in U\}$

$= \neg A \cup \neg B$

$\neg(A \cup B) = \neg(\{(x, MAX\{\varphi_A(x); \varphi_B(x)\}) / x \in U\})$

$= \neg(\{(x, [max(\varphi_{Ai}(x); \varphi_{Bi}(x)), max(\varphi_{As}(x); \varphi_{Bs}(x))]) / x \in U\})$

$= \{(x, 1- [max(\varphi_{Ai}(x); \varphi_{Bi}(x)), max(\varphi_{As}(x); \varphi_{Bs}(x))]) / x \in U\}$

$= \{(x, [1- max(\varphi_{As}(x); \varphi_{Bs}(x)), 1- max(\varphi_{Ai}(x); \varphi_{Bi}(x))]) / x \in U\}$

$= \{(x, [min(1-\varphi_{As}(x); 1- \varphi_{Bs}(x)), min(1- \varphi_{Ai}(x); 1- \varphi_{Bi}(x))]) / x \in U\}$

$= \{(x, MIN\{1- \varphi_A(x); 1- \varphi_B(x)\}) / x \in U\}$

$= \neg A \cap \neg B$

2.5.2.4. Associativa

$$(A \cap B) \cap C = \{(x, MIN\{MIN\{\varphi_A(x); \varphi_B(x)\}; \varphi_C(x)\}\} / x \in U\}$$

$$= \{(x, MIN\{\varphi_A(x); \varphi_B(x); \varphi_C(x)\}) / x \in U\}$$

$$= \{(x, MIN\{\varphi_A(x); MIN\{\varphi_B(x); \varphi_C(x)\}\}) / x \in U\}$$

$$= A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = \{(x, MAX\{MAX\{\varphi_A(x); \varphi_B(x)\}; \varphi_C(x)\}\} / x \in U\}$$

$$= \{(x, MAX\{\varphi_A(x); \varphi_B(x); \varphi_C(x)\}) / x \in U\}$$

$$= \{(x, MAX\{\varphi_A(x); MAX\{\varphi_B(x); \varphi_C(x)\}\}) / x \in U\}$$

$$= A \cup (B \cup C)$$

2.5.2.5. Distributiva

$$A \cap (B \cup C) = \{(x, MIN\{\varphi_A(x); MAX\{\varphi_B(x); \varphi_C(x)\}\}) / x \in U\}$$

$$= \{(x, [min(\varphi_{Ai}(x),max(\varphi_{Bi}(x),\varphi_{Ci}(x))),$$

$$min(\varphi_{As}(x),max(\varphi_{Bs}(x),\varphi_{Cs}(x)))]) / x \in U\}$$

$$= \{(x, [max(min(\varphi_{Ai}(x),\varphi_{Bi}(x)),min(\varphi_{Ai}(x),\varphi_{Ci}(x))),$$

$$max(min(\varphi_{Ai}(x),\varphi_{Bi}(x)),min(\varphi_{Ai}(x),\varphi_{Ci}(x)))]) / x \in U\}$$

$$= \{(x, MAX\{MIN\{\varphi_A(x);\varphi_B(x)\}; MIN\{\varphi_A(x);\varphi_C(x)\}\})/ x\in U\}$$

$$= (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = \{(x, MAX\{\varphi_A(x); MIN\{\varphi_B(x); \varphi_C(x)\}\}) / x \in U\}$$

$$= \{(x, [max(\varphi_{Ai}(x),min(\varphi_{Bi}(x),\varphi_{Ci}(x))),$$

$$max(\varphi_{As}(x),min(\varphi_{Bs}(x),\varphi_{Cs}(x)))]) / x \in U\}$$

$$= \{(x, [min(max(\varphi_{Ai}(x),\varphi_{Bi}(x)),max(\varphi_{Ai}(x),\varphi_{Ci}(x))),$$

$$min(max(\varphi_{Ai}(x),\varphi_{Bi}(x)),max(\varphi_{Ai}(x),\varphi_{Ci}(x)))]) / x \in U\}$$

$= \{(x, MAX\{\varphi_A(x); [0,0]\}) / x \in U\}$

$= \{(x, \varphi_A(x)) / x \in U\}$

$= A$

$A \cap \hat{O} = \{(x, MIN\{\varphi_A(x); \varphi_{\hat{O}}(x)\}) / x \in U\}$

$= \{(x, MIN\{\varphi_A(x); [0,0]\}) / x \in U\}$

$= \{(x, [0,0]) / x \in U\}$

$= \{(x, \varphi_{\hat{O}}(x)) / x \in U\}$

$= \hat{O}$

$A \cup \hat{U} = \{(x, MAX\{\varphi_A(x); \varphi_{\hat{U}}(x)\}) / x \in U\}$

$= \{(x, MAX\{\varphi_A(x); [1,1]\}) / x \in U\}$

$= \{(x, [1,1]) / x \in U\}$

$= \{(x, \varphi_{\hat{U}}(x)) / x \in U\}$

$= \hat{U}$

2.5.2.3. Comutativa

$A \cap B = \{(x, MIN\{\varphi_A(x); \varphi_B(x)\}) / x \in U\}$

$= \{(x, MIN\{\varphi_B(x); \varphi_A(x)\}) / x \in U\}$

$= B \cap A$

$A \cup B = \{(x, MAX\{\varphi_A(x); \varphi_B(x)\}) / x \in U\}$

$= \{(x, MAX\{\varphi_B(x); \varphi_A(x)\}) / x \in U\}$

$= B \cup A$

2.5.1.6. Diferença

$$A - B = \{(x, MIN\{\varphi_A(x); \varphi_{\neg B}(x)\}) / x \in U\}$$

$$= \{(x, MIN\{[\varphi_{Ai}(x), \varphi_{As}(x)]; 1 - [\varphi_{Bi}(x), \varphi_{Bs}(x)]\}) / x \in U\}$$

$$= \{(x, [min(\varphi_{Ai}(x), 1-\varphi_{Bs}(x)), min(\varphi_{As}(x), 1-\varphi_{Bi}(x))]) / x \in U\}$$

2.5.2. Propriedades de Conjuntos Fuzzy Intervalar

Considere A, B e C conjuntos fuzzy intervalar, as seguintes propriedades para união, interseção e complemento são válidas.

2.5.2.1. Idempotência

$$A \cup A = \{(x, MAX\{\varphi_A(x); \varphi_A(x)\}) / x \in U\}$$

$$= \{(x, \varphi_A(x)) / x \in U\}$$

$$= A$$

$$A \cap A = \{(x, MIN\{\varphi_A(x); \varphi_A(x)\}) / x \in U\}$$

$$= \{(x, \varphi_A(x)) / x \in U\}$$

$$= A$$

2.5.2.2. Identidade

Sejam os conjuntos fuzzy intervalares $\hat{U} = \{(x, [1,1]) / x \in U\}$ universo fuzzy intervalar e $\hat{O} = \{(x, [0,0]) / x \in U\}$ vazio fuzzy intervalar.

$$A \cap \hat{U} = \{(x, MIN\{\varphi_A(x); \varphi_{\hat{U}}(x)\}) / x \in U\}$$

$$= \{(x, MIN\{\varphi_A(x); [1,1]\}) / x \in U\}$$

$$= \{(x, \varphi_A(x)) / x \in U\}$$

$$= A$$

$$A \cup \hat{O} = \{(x, MAX\{\varphi_A(x); \varphi_{\hat{O}}(x)\}) / x \in U\}$$

$$= \{(x, [\max(\varphi_{Ai}(x), \varphi_{Bi}(x)), \max(\varphi_{As}(x), \varphi_{Bs}(x))])\}$$

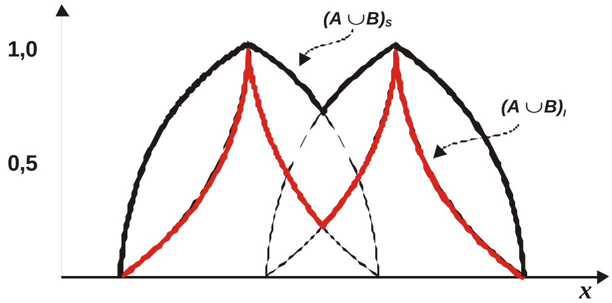


Figura 33 – União de Conjuntos Fuzzy Intervalar

2.5.1.4. Intersecção:

$$A \text{ AND } B = A \cap B = \{(x, \text{MIN}\{\varphi_A(x); \varphi_B(x)\}) \,/\, x \in U\}$$

$$= \{(x, [\min(\varphi_{Ai}(x), \varphi_{Bi}(x)), \min(\varphi_{As}(x), \varphi_{Bs}(x))])\}$$

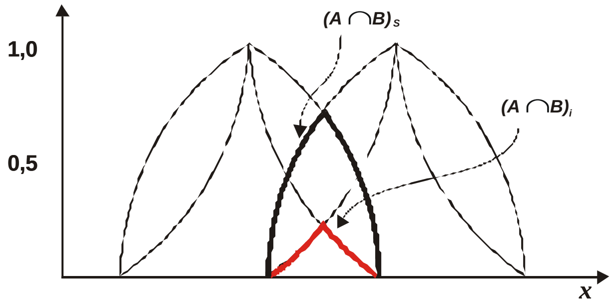


Figura 34 – Interseção de Conjuntos Fuzzy Intervalar

2.5.1.5. Complemento:

$$\text{NOT } A = \neg A = \{(x, 1 - \varphi_A(x)) \,/\, x \in U\}$$

$$= \{(x, [1-\varphi_{As}(x), 1-\varphi_{Ai}(x)]) \,/\, x \in U\}$$

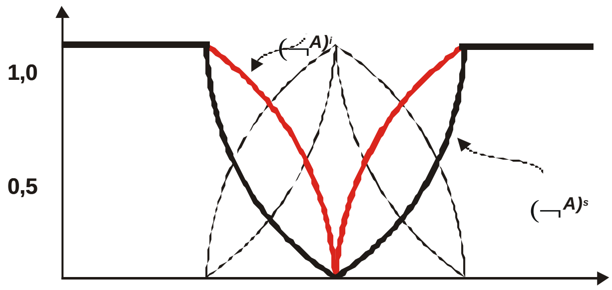


Figura 35 - Complemento de Conjuntos Fuzzy Intervalar

2.5.1. Operação Básica com Conjuntos Fuzzy Intervalar

As operações básicas para conjuntos fuzzy intervalar são derivadas das operações básicas definidas por Zadeh [Zadeh 1965]. Sejam A e B conjuntos fuzzy intervalar no universo U,

$A = \{(x, \varphi_A(x)) / x \in U\}$, $\varphi_A(x) \in I[0,1]$ e

$B = \{(x, \varphi_B(x)) / x \in U\}$, $\varphi_B(x) \in I[0,1]$

Considere que $\varphi_A(x) = [\varphi_{Ai}(x), \varphi_{As}(x)]$ e $\varphi_B(x)=[\varphi_{Bi}(x), \varphi_{Bs}(x)]$, $\forall x \in U$. Onde o índice i significa limite inferior do intervalo, e o índice s o limite superior do intervalo, tem-se as seguintes propriedades:

2.5.1.1. *Igualdade*

$A = B \leftrightarrow (\varphi_A(x) = \varphi_B(x)), \forall x \in U$

Ou seja, o conjunto fuzzy intervalar A é igual ao conjunto fuzzy intervalar B, se e somente se, $\varphi_{Ai}(x)=\varphi_{Bi}(x)$ e $\varphi_{As}(x)=\varphi_{Bs}(x)$, para todo elemento pertencente ao universo.

2.5.1.2. *Inclusão*

É utilizada a ordem de Kulish e Miranker definida na seção 5 do capítulo 3, que é a ordem que melhor se aplica a inclusão de conjuntos fuzzy intervalar.

$A \subseteq B \leftrightarrow (\varphi_A(x) \bullet_K \varphi_B(x)), \forall x \in U$

Ou seja, o conjunto fuzzy intervalar A está contido no conjunto fuzzy intervalar B, se e somente se $[\varphi_{Ai}(x), \varphi_{As}(x)] \bullet_K [\varphi_{Bi}(x), \varphi_{Bs}(x)]$, ou melhor, se $\varphi_{Ai}(x) \leq \varphi_{Bi}(x)$ e $\varphi_{As}(x) \leq \varphi_{Bs}(x)$ para todo elemento do universo.

Então A é dito subconjunto fuzzy intervalar de B.

2.5.1.3. *União:*

Os operadores MAX e MIN são operadores intervalares definidos no capítulo 3, enquanto que max e min são operadores convencionais.

$A \text{ OR } B = A \cup B = \{(x, MAX\{\varphi_A(x); \varphi_B(x)\}) / x \in U\}$

A figura 32 ilustra um exemplo, de duas funções de pertinência fuzzy intervalar φ_{A1} e φ_{A2} com suas respectivas funções inferiores e superiores f_{iA1}, f_{sA1}, f_{iA2}, f_{sA2}. A função simplificada φ_S tem sua função inferior f_i e superior f_s.

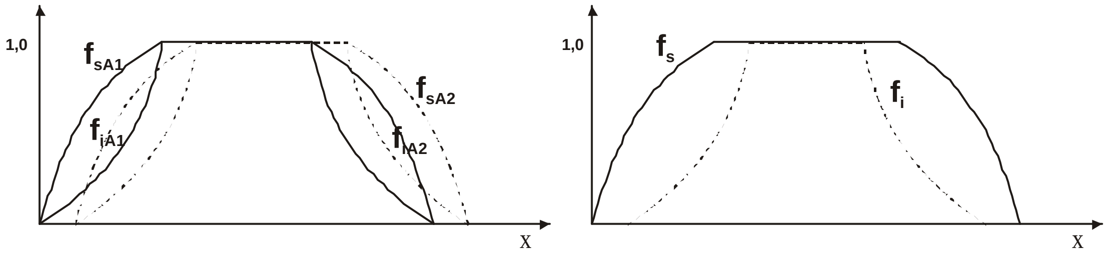


Figura 32 – Simplifição de funções intervalares por intervalos

Desta forma os conjuntos fuzzy e o fuzzy intervalar podem ser simplificados através de intervalos gerando um novo conjunto fuzzy intervalar, que possui todos os valores fornecidos pelos especialistas. A seguir são apresentadas as operações e propriedades para conjuntos fuzzy intervalar.

2.5. Operações com Conjuntos Fuzzy Intervalar

No desenvolvimento de uma teoria de conjuntos é necessária a especificação de suas principais operações. A teoria dos conjuntos fuzzy intervalar precisa que seus operadores sejam especificados. Baseados nos operadores dos conjuntos fuzzy [Zadeh 1965], os operadores básicos para conjuntos fuzzy intervalar são propostos. Os modificadores de função de pertinência fuzzy intervalar e os operadores de composição e de implicação necessários para a realização da inferência fuzzy intervalar são mostrados na seção 3 e 4 respectivamente [Silveira 2001b], [Silveira 2001g].

Estas operações são extensões das operações para conjuntos fuzzy adicionando-as as definições de intervalos. Neste trabalho, é mostrada a extensão das operações e propriedades básicas definidas por Zadeh. A partir destas é fácil ver que é possível extender todas as operações.

onde $\varphi_S(x)$ é *o grau de pertinência intervalar simplificado*, $\mu_{Ai}(x)$ é o grau de pertinência de todos os conjuntos fuzzy A_i, com i variando e 1 a n.

Assim, para cada valor de x se terá um intervalo formado pelo mínimo e o máximo de todos os conjuntos em questão, para os valores de $f_i(x)$ e $f_s(x)$ respectivamente, será utilizada esta notação nesta seção apenas para efeito de simplificação. Os conjuntos A e B da figura 30, neste caso, é simplificado pelas funções de limite inferior f_i e superior f_s, ilustrados na figura 31. O grau de pertinência intervalar é $\varphi_S(x) = [f_i(x), f_s(x)]$.

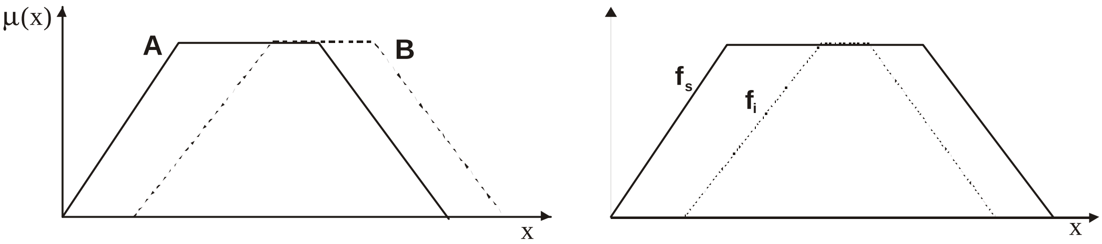


Figura 31 – Simplificação utilizando intervalos.

O conjunto fuzzy intervalar obtido da simplificação dos conjuntos fuzzy é trabalhado pela teoria intervalar apresentada neste trabalho.

2.4.3. Simplificação de Conjuntos Fuzzy Intervalar por Intervalos

Uma extensão natural da simplificação de conjuntos fuzzy é a simplificação para conjuntos fuzzy intervalar. Os conjuntos fuzzy quando definidos como intervalos, podem apresentar conjuntos fuzzy intervalar diferentes para cada especialistas, neste caso a simplificação é dada por:

Sejam os conjuntos fuzzy intervalares A_1 até A_n

$\varphi_{A1}(x) = [f_{iA1}(x), f_{sA1}(x)]$

$\varphi_{A2}(x) = [f_{iA2}(x), f_{sA2}(x)]$

+

$\varphi_{An}(x) = [f_{iAn}(x), f_{sAn}(x)]$

$$\varphi_S(x) = [\min_{j=1\ldots n}(f_{iAj}(x)), \max_{j=1\ldots n}(f_{sAi}(x))] \qquad \text{Equação 76}$$

desprezadas utilizando um valor, por exemplo, obtido pela fusão desses conjuntos [Song 1993], [Setness 1998].

Esta seção propõe a utilização de intervalos para gerar um conjunto fuzzy intervalar no mapeamento das informações fornecidas pelos especialistas. Desta forma todas as informações são levadas em consideração, dando assim, uma maior margem aos valores obtidos dos especialistas, o que leva uma maior precisão das soluções.

2.4.2. Simplificação de Conjuntos Fuzzy por Intervalos

Nos métodos de simplificação tradicionais há sempre uma perda de informação quando os conjuntos fuzzy similares são fundidos, como visto na figura 12 do capítulo 2, e será repetida aqui a título de organização. A utilização de intervalos na simplificação de conjuntos fuzzy similares, vem facilitar o mapeamento dos dados fornecidos pelos especialistas, além de proporcionar uma maior exatidão na solução dos problemas.

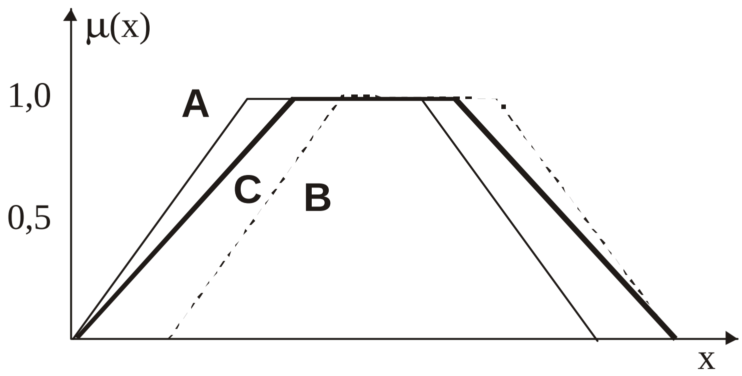


Figura 30 – Simplificação dos Conjuntos Fuzzy A e B.

A simplificação por intervalos é um método bastante simples, esse método é baseado na construção de um conjunto fuzzy intervalar, obtido a partir dos conjuntos fuzzy semelhantes ou similares, gerados pela redundância das informações dos especialistas.

O grau de pertinência intervalar para um conjunto fuzzy intervalar simplificado obtido de n conjuntos fuzzy é dado da seguinte forma [Silveira 2001h]:

$$\mu_S(x) = [\min_{i=1...n}(\mu_{Ai}(x)), \max_{i=1...n}(\mu_{Ai}(x))] \quad \text{Equação 75}$$

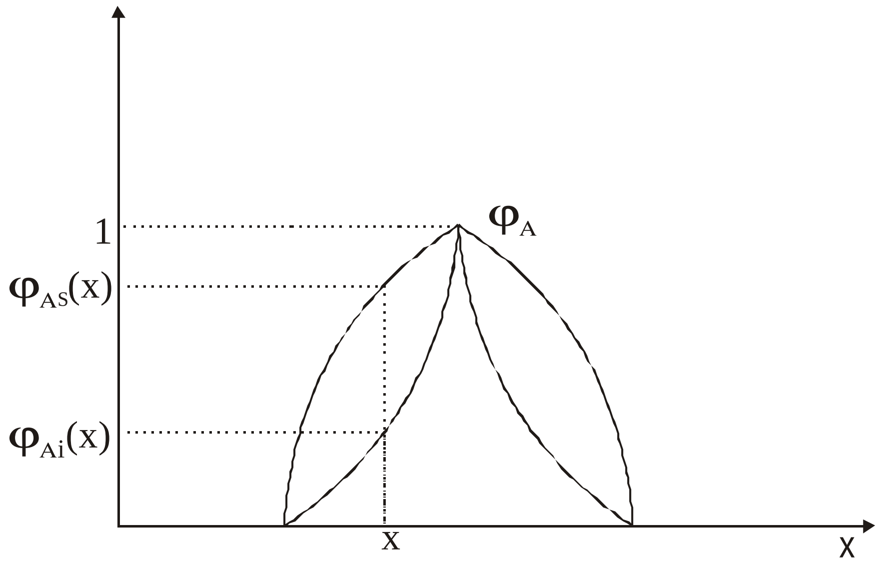


Figura 29 – Função de Pertinência Fuzzy Intervalar

Como foi dito na seção 2.4 do capítulo 2, a pertinência é menos ambígua nos extremos do conjunto fuzzy, por isso, o grau de pertinência para os extremos do conjunto fuzzy intervalar, ou seja, quando o grau de pertinência é próximo de 0 ou 1, são as mesmas do conjunto fuzzy tradicional, o valor de pertinência sofre uma maior variação no intervalo na região de máxima nebulosidade, onde possui maior ambigüidade, ou seja, na região de indecibilidade. Neste ponto, a função de pertinência intervalar inferior e superior são mais afastadas para suportar uma maior possibilidade de casos.

É importante salientar que, nem sempre as funções limitantes (φ_{Ai} e φ_{As}) possuem o comportamento uniforme como o da figura 29. A seguir é mostrada a simplificação de conjuntos fuzzy intervalar.

2.4. Simplificação de Conjuntos Fuzzy Intervalar

2.4.1. Introdução

Como foi visto na seção 2.6 do capítulo 2 sobre simplificação de conjuntos fuzzy existem algumas técnicas para resolver o problema da redundância dos conjuntos fuzzy, simplificando os conjuntos semelhantes em um único conjunto fuzzy comum. No entanto, todas essas técnicas perdem informações fornecidas pelos especialistas e que devem ser levadas em consideração, e não simplesmente

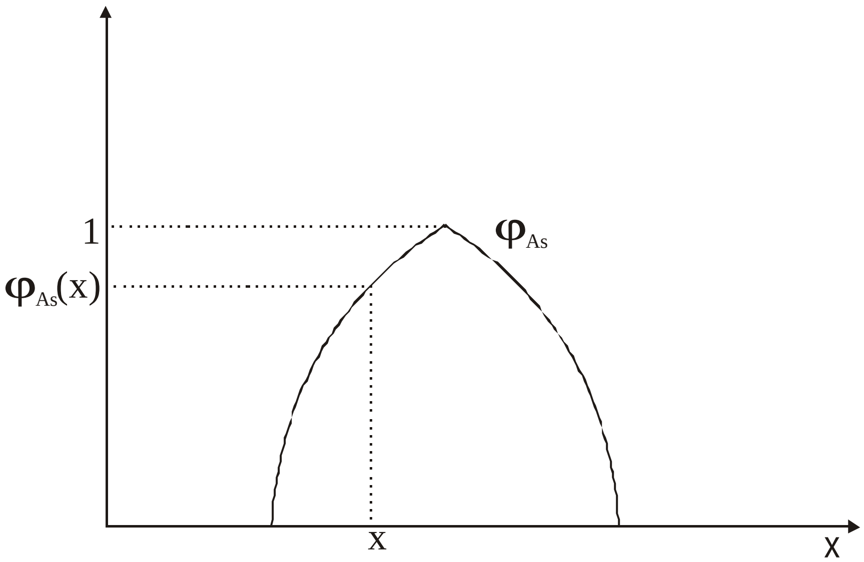


Figura 28 – Função de Limite Superior

A função de pertinência intervalar φ é dada pela justaposição das funções de limite inferior φ_i (figura 27) e superior φ_s (figura 28). Na figura 29 está representado um conjunto fuzzy intervalar A qualquer.

O grau de pertinência intervalar é dado pelo intervalo formado pelo grau de pertinência da função de limite inferior e pelo grau de pertinência da função de limite superior, ou seja:

$$\varphi_A(x) = [\varphi_{Ai}(x), \varphi_{As}(x)] \qquad \text{Equação 74}$$

A função de pertinência intervalar sendo formada pela função de limite inferior e superior garante que todas as operações e propriedades utilizadas para conjuntos fuzzy podem ser estendidas a conjuntos fuzzy intervalar. Isto é válido graças ao teorema da continuidade apresentado na seção 7 do capíltulo 3.

Além das operações e propriedades consegue-se gerar um sistema de inferência fuzzy intervalar, com a fuzzificação fuzzy intervalar, inferência fuzzy intervalar e defuzzificação fuzzy intervalar.

A construção da função de pertinência intervalar é feita utilizando intervalos na função de pertinência fuzzy, assim, em vez de tratar o valor de pertinência como um número real em sua imagem, a função de pertinência definida para o conjunto fuzzy intervalar trabalhará com um intervalo de números reais no intervalo [0, 1], ou seja, um subintervalo do intervalo [0, 1] em sua imagem.

A função de pertinência intervalar é definida em [Silveira 2001a], [Silveira 2001c], [Silveira 2001g]:

$$\varphi_A : U \rightarrow I[0,1] \qquad \text{Equação 73}$$

onde U é o conjunto universo, que neste trabalho será considerado como um sub conjunto dos números reais, pois na maioria dos casos práticos é trabalhado com o universo numérico.

Observe que as funções de pertinência fuzzy usuais (linear, curva-S, curva tipo sino, triangular, trapézio, etc.) são continuas. Assim, é uma conseqüência natural que as funções fuzzy intervalar sejam continuas.

O grau de pertinência intervalar para um conjunto fuzzy intervalar A, é dado por φ_A, obedecendo ao teorema 1 da continuidade, seção 7 do capítulo 3, isto é, existem funções φ_{Ai}, φ_{As} : R → [0, 1] contínuas, tais que $\forall x \in R$, $\varphi_A(x) = [\varphi_{Ai}(x), \varphi_{As}(x)]$, portanto $\varphi_{Ai}(x) \leq \varphi_{As}(x)$, onde φ_{Ai} é chamada de função de limite inferior e φ_{As} de função de limite superior [Silveira 2001g].

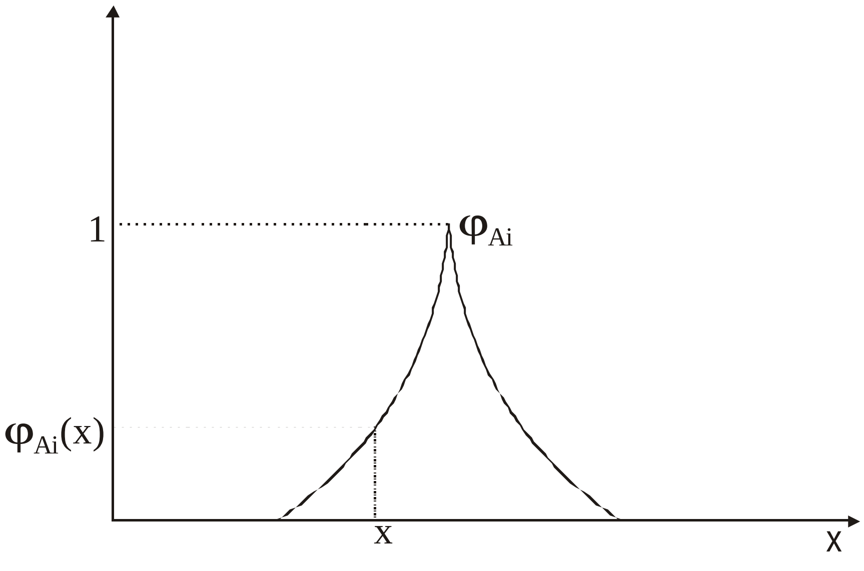


Figura 27 – Função de Limite Inferior

Para o conjunto fuzzy intervalar *temperatura quente*, pode-se ver sua representação na figura 26, com os graus de pertinência intervalares para 40ºC, 50ºC e 60ºC, respectivamente os intervalos [0.1,0.25], [0.18,0.65] e [0.4,0.8].

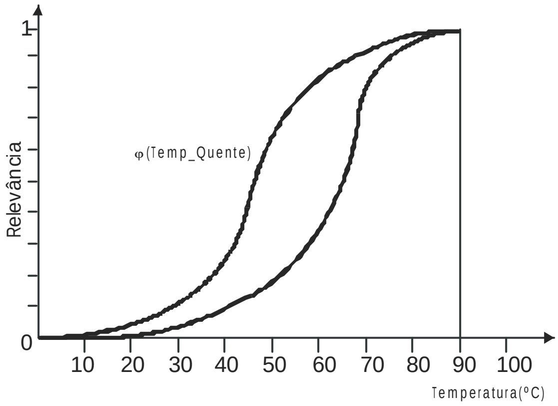


Figura 26 – Conjunto Fuzzy Intervalar quente

2.2. Representação de Conjuntos Fuzzy Intervalar

Um conjunto fuzzy intervalar também pode ser representado por uma coleção de pares ordenados (x, φ_A(x)) como definido na equação 70, o primeiro elemento é um valor pertencente a um universo e o segundo é um intervalo, que é o grau de pertinência intervalar desse valor ao conjunto fuzzy intervalar.

Por exemplo, um conjunto fuzzy intervalar pode ser dado por:

A = {(1, [0,0.1]), (2, [0.05,0.2]), (3,[0.18,0.31]), ...}

Ou simplesmente uma representação através de funções de pertinência intervalar como da figura 26.

2.3. Função de Pertinência Intervalar

Admitindo que um especialista possa mapear suas incertezas sobre o grau de pertinência de um elemento a um conjunto de forma exata, o que acontece quando se tem diversos especialistas opinando sobre o mesmo assunto? Usualmente se usa uma técnica chamada de similaridade, mas esta técnica permite determinar uma função de pertinência próxima a dos especialistas (uma espécie de média), porém fazendo isso se está descartando a opinião deles. Uma melhor forma seria atribuir uma função de pertinência intervalar que considere a opinião de todos [Silveira 2001h].

2. Teoria dos Conjuntos Fuzzy Intervalar

Para o mapeamento de problemas que tratam do raciocínio aproximado a modelagem fuzzy [Bojadziev 1996], [Cox 1994], [Gottgtroy 1996], [Kasabov 1996], [Nguyen 1999] vem sendo utilizada, sem nenhuma sombra de dúvida, com sucesso desde os anos 80. A crescente utilização desta abordagem tem proporcionado a observação de suas deficiências. Uma delas é que, com o mapeamento das informações nebulosas o especialista precisa construir uma função fuzzy atribuindo aos valores do domínio, por exemplo, um número real para seu grau de certeza, algumas vezes é difícil para o especialista determinar se o grau de certeza é 0.5 ou 0.501, por exemplo [Yam 1999]. E outra questão é referente a problemas que exijam uma maior precisão nos dados de saída do sistema.

2.1. Definição de Conjunto Fuzzy Intervalar

A principal diferença entre um conjunto fuzzy e um conjunto fuzzy intervalar está no grau de pertinência, no primeiro o grau de pertinência é um *número real* pertencente ao intervalo [0,1], no segundo o grau de pertinência é um *subintervalo* do intervalo [0,1].

Na equação 5, foi definido conjuntos fuzzy como sendo:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) / x \in U\}$$

onde $\mu_A(x) \in [0,1]$ e U é o universo de discurso.

Dessa forma, um conjunto fuzzy intervalar é definido como um conjunto fuzzy que possui um intervalo como grau de pertinência [Silveira 2001a], [Silveira 2001c], [Silveira 2001g]:

$$A = \{(x, \varphi_A(x)) / x \in U\} \qquad \text{Equação 71}$$

onde $\varphi_A(x) \in I[0,1]$, é a função de pertinência para o conjunto fuzzy intervalar A, sendo:

$$\mathbf{I[0, 1] = \{[a, b] \in IR / 0 \le a \le b \le 1\}} \qquad \text{Equação 72}$$

> incerteza; isto é, uma pessoa pode significativamente distinguir entre o grau de pertinência de 0.6 e 0.7, mas ninguém é capaz de descrever que sua crença do grau de pertinência é 0.6 e não 0.601. Assim como resultado, uma representação mais adequada de graus de pertinência não é um simples número real, mas um intervalo ou um conjunto de números reais possíveis."

Pior ainda, será que um especialista é capaz de afirmar que existe um grau de pertinência $\sqrt{0.2}$? Esse tipo de problema é freqüente em sistemas que tratam com aproximações e arredondamentos. Com esses problemas o ideal é trabalhar com computação intervalar, para minimizar o erro do especialista. E se, além disso, o sistema tratar de conhecimento impreciso? Então é necessário o uso da teoria dos conjuntos fuzzy. E porque não utilizar as duas soluções para o problema?

Desta forma, este trabalho se propõe a fundamentar uma teoria fuzzy intervalar, a qual vem sendo desenvolvida nos últimos trabalhos publicados por M. M. M. T. Silveira e B. R. C. Bedregal [Silveira 2001a], [Silveira 2001b], [Silveira 2001c], [Silveira 2001d], [Silveira 2001e], [Silveira 2001f], [Silveira 2001g], [Silveira 2001h], [Silveira 2002].

Baseada na teoria dos conjuntos fuzzy foi desenvolvida a teoria fuzzy intervalar, assim os conceitos e as definições mostradas no capítulo 2, servem de base para o desenvolvimento deste capítulo. Este capítulo está dividido da seguinte forma: na próxima seção será definida a teoria dos conjuntos fuzzy intervalar, com a definição e representação de conjuntos fuzzy intervalar, especificação função de pertinência fuzzy intervalar, um método de simplificação de conjuntos fuzzy intervalar, além das operações e propriedades fuzzy intervalar. Na seção 3, é mostrada a lógica fuzzy intervalar. Na seção 4 é abordado o raciocínio aproximado e finalmente na seção 5 o sistema de inferência fuzzy intervalar.

CAPÍTULO 4 – TEORIA FUZZY INTERVALAR

1. Introdução

O desenvolvimento de sistemas computacionais eficientes e com qualidade é uma tarefa árdua. Na busca por esta qualidade e eficiência os cientistas do mundo inteiro vêm procurando técnicas cada vez mais especializadas na solução dos problemas do dia-a-dia.

Na lógica clássica só existem duas possibilidades para representar os valores verdade das proposições, verdadeiro e falso, que são representados no computador por 1 e 0 respectivamente.

Para representar as incertezas, Zadeh criou a lógica fuzzy, a qual utiliza graus de pertinência para os valores verdade no intervalo [0, 1], como foi visto no capítulo 2. Desde a década de 80, a lógica fuzzy tem sido bastante utilizada principalmente em aplicações que envolvem o raciocínio aproximado.

Porém em algumas situações é desejável que os valores não sejam pontos no intervalo [0, 1] e sim valores mais genéricos. Em [Yam 1999] é dado três exemplos desta situação, mas será levado em consideração apenas o primeiro, que trata de uma representação mais adequada de grau de pertinência:

> "A lógica fuzzy é baseada no intervalo [0, 1], que descreve as incertezas de um especialista através de um número real. Porém se um especialista está incerto sobre alguma coisa, ele pode estar incerto sobre a sua crença do grau de pertinência desta coisa, e é possível que o especialista não seja capaz de descrever exatamente o seu grau de

Este resultado será muito importante na definição da função de pertinência fuzzy intervalar na seção 2.3 do capítulo 4.

Com a definição da teoria fuzzy e a computação intervalar, agora se pode definir a teoria fuzzy intervalar mostrada a seguir.

5.4. Ordem da Informação

$$[a,b] \leq_I [c,d] \Leftrightarrow [c,d] \subseteq [a,b]$$
$$\Leftrightarrow a \leq_R c \leq_R d \leq_R b$$

6. Mínimos e Máximos Intervalares

Para o desenvolvimento da função dos operadores fuzzy intervalar, no capítulo 4, será necessário a definição de máximo e mínimo intervalar, como definidos abaixo:

MIN{[a, b]; [c,d]} = [min(a,c), min(b,d)]

MAX{[a, b]; [c, d]} = [max(a,c), max(b,d)]

onde MIN e MAX são o mínimo e o máximo intervalares respectivamente, enquanto min e max são o mínimo e o máximo tradicional.

7. Continuidade

A noção de continuidade é uma noção advinda de espaços topológicos. O conjunto dos números reais, R, assim como RXR, têm uma topologia bem aceita no mundo matemático, e, portanto uma noção de continuidade. Essa noção de continuidade coincide com a visão geométrica de continuidade de funções no plano cartesiano. Como IR pode ser encarado como um subconjunto de RXR, é razoável esperar que uma função intervalar seja contínua se, e somente se, ela for contínua na topologia IR induzida por RXR. Um resultado clássico é que uma função f: R → RXR é contínua se existem duas funções f_1: R → R e f_2: R → R contínuas tais que f = $f_1 X f_2$ [Dugundji 1966]. Uma extensão natural desse resultado para IR é o seguinte:

Teorema 1: Seja f: R → IR. f é contínua se, e somente se, existem funções contínuas f_i: R → R e f_s: R → R tais que, $\forall x \in R$, $f(x)=[f_i(x), f_s(x)]$. Portanto $f_i(x)$ ● $f_s(x)$ para cada $x \in R$.

3.3.5. Subdistributiva

X . (Y + Z) ⊆ (X . Y) + (X . Z)

4. Função Intervalar

Seja f: X → Y uma função.

Se X = Dom(f) ⊆ IR e Y = Cod(f) ⊆ IR, X → f(X), então f é uma função intervalar de uma variável intervalar.

Exemplo: f : IR → IR uma função intervalar.

X → f (X) = [2, 3].X + [4, 5]

5. Ordem

Existem várias ordens que podem ser definidas para intervalos, como por exemplo, a ordem de Moore [Moore 1966], a ordem da teoria dos conjuntos, a ordem de Kulish-Miranker [Kulish 1981], e a ordem da informação [Acióly 1991]. Neste trabalho, será utilizada a ordem de Kulish-Miranker na seção 2.5 do capítulo 4.

5.1. Ordem de Moore

$$[a,b] <_M [c,d] \Leftrightarrow \forall x \in [a,b] \ \ \forall y \in [c,d], x <_R y$$
$$\Leftrightarrow b <_R c$$
$$Então, \ [a,b] \leq_M [c,d] \Leftrightarrow [a,b] <_M [c,d] \ \ ou \ \ [a,b] = [c,d]$$

5.2. Ordem de Kulish-Miranker

$$[a,b] \leq_K [c,d] \Leftrightarrow \forall x \in [a,b] \ \exists y \in [c,d], x \leq_R y \ \ e \ \ \forall y \in [c,d] \ \exists x \in [a,b], x \leq_R y$$
$$\Leftrightarrow a \leq_R c \ \ e \ \ b \leq_R d$$

[a, b] ● $_K$ [c, d] ⇔ a ● c e b ● d.

5.3. Ordem da Teoria dos Conjuntos

$$[a,b] \leq_S [c,d] \Leftrightarrow [a,b] \subseteq [c,d]$$
$$\Leftrightarrow c \leq_R a \ \ e \ \ b \leq_R d$$

X / Y = [min{2/5, 3/5, 2/4, 3/4}, max{ 2/5, 3/5, 2/4, 3/4}] = [2/5, 3/4]

Pode-se encontrar a prova e outros exemplos dessas operações em [Oliveira 1997], [Cruz 2000].

3.2.7. Quadrado

$$[a,b]^2 = \{x^2 / x \in [a,b]\} = \begin{cases} [a^2, b^2], & se \quad 0 \le a \\ [b^2, a^2], & se \quad b \le 0 \\ [0, \max(a^2, b^2)] & senão \end{cases}$$ Equação 70

Observe que $X^2 \subseteq X . X$.

3.3. Propriedades Algébricas da Aritmética Intervalar

Sejam X, Y, Z ∈ IR Intervalos Reais. Então valem as seguintes propriedades para as operações mostradas na seção anterior:

3.3.1. Fechamento

Se X, Y ∈ IR, então X + Y ∈ IR

Se X, Y ∈ IR, então X . Y ∈ IR

3.3.2. Comutativa

X + Y = Y + X

X . Y = Y . X

3.3.3. Associativa

X + (Y + Z) = (X + Y) + Z

X . (Y . Z) = (X . Y) . Z

3.3.4. Elemento Neutro

X + [0, 0] = [0, 0] + X = X

X . [1, 1] = [1, 1] . X = X

Exemplo: Seja $X = [2, 3]$ e $Y = [4, 5]$

$X + Y = [2 + 4, 3 + 5] = [6, 8]$

3.2.2. Pseudo Inverso Aditivo

$$- X = - [a, b] = \{-x \,/\, x \in [a,b]\} = [-b, -a]$$ Equação 65

Exemplo: $X = [2, 3]$.

$- X = [-3, -2]$

3.2.3. Subtração

$$X - Y = X + (-Y) = [a, b] + [-d, -c] = [a - d, b - c]$$ Equação 66

Exemplo: Seja $X = [2, 3]$ e $Y = [4, 5]$

$X - Y = [2 - 5, 3 - 4] = [-3, -1]$

3.2.4. Multiplicação

$$X \,.\, Y = [a, b] \,.\, [c, d] = \{x.y \,/\, x \in [a,b] \text{ e } y \in [c,d]\}$$

$$= [\min\{ac, bc, ad, bd\}, \max\{ac, ad, bc, bd\}]$$ Equação 67

Exemplo: Seja $X = [2, 3]$ e $Y = [4, 5]$

$X \,.\, Y = [\min(8, 12, 10, 15), \max(8, 12, 10, 15)] = [8, 15]$

3.2.5. Pseudo Inverso Multiplicativo

Seja $X = [a, b]$, tal que $0 \notin X$ então:

$$X^{-1} = 1/X = [1/b , 1/a]$$ Equação 68

Exemplo: $X = [2, 3]$.

$X^{-1} = 1/X = [1/3 , 1/2]$

3.2.6. Divisão

$$X / Y = X \,.\, 1/Y = [a, b] \,.\, [1/d, 1/c]$$

$$= [\min\{a/d, b/d, a/c, b/c\}, \max\{a/d, b/d, a/c, b/c\}], \text{ se } 0 \notin [c, d]$$ Equação 69

Exemplo: Seja $X = [2, 3]$ e $Y = [4, 5]$

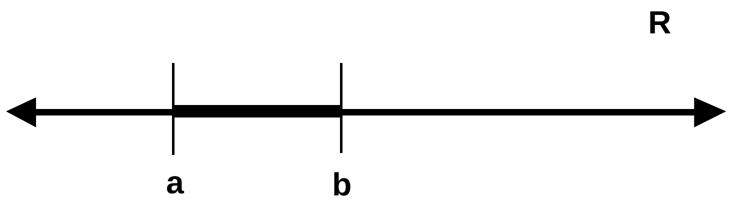


Figura 25 - Um Intervalo na Reta Real R

Exemplo: Os intervalos [2, 3], [5, 5], [-7, -3] e [-6, 4] são exemplos de alguns intervalos. Observe que os intervalos da forma [a, a] representam números reais, como o intervalo [5, 5] que representa o número real 5, pois o único elemento do intervalo [5, 5] é o número real 5. Esses intervalos são chamados **intervalos degenerados**.

O conjunto de todos os intervalos é definido como sendo:

$$IR = \{[a,b] \;/\; a,b \in R \text{ e } a \leq b\}$$ Equação 62

Perceba que a idéia por traz de intervalos é que eles são representações (aproximações) de números reais.

3.1.3. Igualdade

Sejam $X = [x_1, x_2]$ e $Y = [y_1, y_2]$ dois intervalos de IR.

Então $X = Y$ se, e somente se, $x_1 = y_1$ e $x_2 = y_2$. **Equação 63**

Assim como a igualdade, a definição das operações aritméticas intervalares pode ser feita através das operações com conjuntos da reta real. Essas operações são mostradas a seguir.

3.2. Operações Aritméticas Intervalares

Sejam $X = [a, b]$ e $Y = [c, d]$. As operações aritméticas com intervalos são definidas sobre os extremos de seus intervalos, como é mostrado a seguir [Moore 1966].

3.2.1. Soma

$$X + Y = [a, b] + [c, d] = \{x+y \;/\; x \in [a,b] \text{ e } y \in [c,d]\}$$

$$= [a + c, b + d]$$ Equação 64

3. Aritmética Intervalar

A aritmética intervalar é uma aritmética bem elaborada matematicamente, onde são definidas as principais operações aritméticas para intervalos, baseadas nas respectivas operações aritméticas reais sobre os extremos dos intervalos [Bedregal 1996], [Oliveira 1997b], [Lyra 1999], [Cruz 2000], [Dutra 2000].

3.1. Definições Básicas

3.1.1. A Reta Real

Em [Oliveira 1997b] a reta real é definida como "Definimos e denotamos por R o conjunto de todos os pontos da reta real, munidos das respectivas operações aritméticas: soma, oposto, diferença, produto, inverso, e quociente. Os pontos da reta real são denotados por letras latinas minúsculas, tais como a, b, c, etc." Essa notação será utilizada neste trabalho.

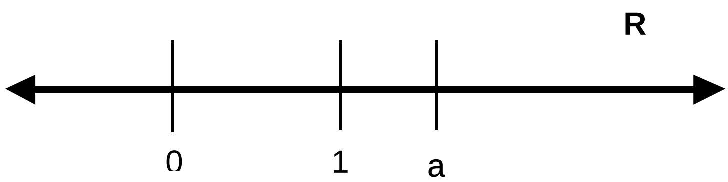


Figura 24 – A reta dos Reais

Exemplo: Os números 2, 3, -5,- ¼ , ð, são alguns exemplos de números reais.

3.1.2. Intervalo de Reais

Seja R o conjunto dos números reais, e sejam a, b ∈ R, tais que a ≤ b. Então o conjunto {x ∈ R / a ≤ x ≤ b} é um **intervalo de reais** ou simplesmente um **intervalo,** que será denotado por

X = [a, b] = { x Î R / a £ x £ b}. Equação 61

Os pontos do conjunto dos intervalos de reais serão denotados por letras latinas maiúsculas, tais como X, Y, Z,...

Este capítulo está dividido da seguinte forma: na seção 2 tem uma justificativa do uso da computação intervalar; na seção 3 são definidos os conceitos básicos da aritmética intervar, suas operações e propriedades, na seção 4 é mostrada a função intervalar, na seção 5 é apresentada as principais ordens para intervalos e na seção 6 são definidos os operadores mínimo e máximo intervalar, e finalmente na seção 7 é colocado o conceito de continuidade, tão importante para o desenvolvimento deste trabalho.

2. Matemática Intervalar

A qualidade do resultado na computação científica depende do conhecimento e controle dos erros na computação dos dados. Para resolver essa questão surgiu a matemática intervalar baseada na aritmética de Moore [Moore 1966], [Moore 1979], [Acióly 1991], [Bedregal 1996], [Lyra 1999], [Keartoff 1996b], [Krenovich 1998], [Santiago 1999], [Cruz 2000], [Dutra 2000].

Existem três tipos de fontes erros em computação numérica clássica (a qual representa números reais como ponto flutuante): a propagação do erro nos dados iniciais, os arredondamentos e o erro de truncamento. A matemática intervalar busca resolver esse problema que se concentra fundamentalmente nos seguintes aspectos [Acióly 1991], [Bedregal 1996], [Lyra 1999], [Dutra 2000]:

1. Na criação de um modelo computacional que exprima o controle e a análise dos erros que ocorrem no processo computacional;
2. Na escolha de técnicas de programação adequadas para desenvolvimento de softwares científicos buscando minimizar os erros nos resultados.

O usuário não pode afirmar a exatidão da resposta estimada sem auxilio de uma análise de erro, que é extensa, dispendiosa e nem sempre viável. No entanto, a matemática intervalar busca dar suporte a estes problemas, utilizando a aritmética intervalar definida por Moore.

CAPÍTULO 3 – TEORIA INTERVALAR

1. Introdução

A Computação Intervalar é uma área relativamente nova das ciências da computação, que surgiu da necessidade dos pesquisadores da programação científica de obterem valores mais precisos, e com o menor erro possível. A aritmética intervalar é uma aritmética que está definida no conjunto dos intervalos de números reais. O desenvolvimento moderno da aritmética intervalar começou em 1964 com R. E. Moore [Moore 1966], [Moore 1979], [Acióly 1991], [Bedregal 1996], [Keartoff 1996b], [Krenovich 1998], [Santiago 1999]. Desde então muitas pesquisas vêm sendo desenvolvidas nesta área, principalmente pesquisa ligadas ao suporte de softwares, provendo várias ferramentas poderosas. Por exemplo, os limites da imagem de uma função objetiva são extremamente usados em algoritmos de otimização global [Kearfott 1996a]. Um outro exemplo do largo uso em computação científica é a determinação do limite do erro de aproximações de arredondamentos e truncamentos [Lyra 2000].

Nos últimos anos, um vasto número de aplicações, utilizando a aritmética intervalar tem sido desenvolvida nas diversas áreas das ciências, como: controle de qualidade, economia, mecânica quântica, engenharia química, sistemas dinâmicos, sistemas de informações geográficas [Scott 2000], computação de constantes físicas, computação gráfica, inteligência artificial, dentre outras [Kearfott 1996b]. Na área de Inteligência Artificial a aritmética intervalar vem sendo pesquisada principalmente nas áreas de sistemas especialistas [Scott 1997], [Ross 2000] e em maior intensidade em sistemas fuzzy. [Kreinovich 1999], [Mukaidono 1999], [Yam 1999], [Kreinovich 2000a], [Kreinovich 2000b].

Para isso, no próximo capítulo será abordada a computação intervalar, mostrando suas principais características e propriedades que foram necessárias para o desenvolvimento da teoria fuzzy intervalar proposta. Além da definição de ordem e continuidade que garante a validade da função de pertinência fuzzy intervalar.

Stefan Chanas em [Chanas 2001] deriva a fórmula para intervalo de aproximação para um número fuzzy dando uma forma geral para um número fuzzy do tipo L-R.

Em seu livro "A First Course in Fuzzy Logic", [Nguyen 1999] Nguyen define no capítulo sobre quantificadores fuzzy, o conceito de Intervalos Fuzzy. Este conceito é definido para estender o conceito de número fuzzy, que a generalização de um número real r. Intuitivamente, A(x) deveria ser definido como os números próximos de r, e certamente A(r)=1. Desta forma um número fuzzy é representado por uma função triangular.

Enquanto que para lógica fuzzy valorada por intervalo Nguyen define da seguinte forma: Um intervalo de valores é mais realístico que apenas um número real para representar o grau de crença do especialista. Isso significa substituir o intervalo [0,1] de valores fuzzy pelo conjunto $\{(a,b) / a,b \in [0,1], a \leq b\}$. Uma notação padrão para esse conjunto é $[0,1]^{[2]}$. Assim, um grau de crença de um especialista para um elemento particular $u \in U$ está associado com um par $(a,b) \in [0,1]^{[2]}$.

Bojadziev, em seu livro "Fuzzy sets, Fuzzy Logic, Applications" [Bojadzieve 1996]. No primeiro capítulo dá uma introdução a aritmética intervalar para no capítulo seguinte definir números fuzzy em termos de níveis de intervalos. E posteriormente mostra as operações aritméticas para os números fuzzy definidos por intervalos.

A partir deste trabalho, vários outros vêm sendo desenvolvidos, no entanto, cada um, possui seu enfoque particular.

A proposta de integração da matemática intervalar à teoria fuzzy apresentado no capítulo 4, não se baseou em nenhum dos formalismos já existentes. Esta integração foi feita tomando cada conceito apresentado neste capítulo sobre a teoria fuzzy e estendendo para fuzzy intervalar, desde a definição do conjunto fuzzy intervalar passando pelas propriedades e operações fuzzy intervalar até a definição de um sistema de inferência fuzzy intervalar. E no capítulo 5 é mostrado um exemplo de um sistema controlador de temperatura nas versões fuzzy e fuzzy intervalar.

ser descobertas e refinadas. Devido a estas características, as redes *neuro-fuzzy* tornam-se bastante flexíveis e inserem, nos modelos *fuzzy*, a capacidade de aprendizagem e adaptação. Redes *neuro-fuzzy* podem ser utilizadas em tarefas de reconhecimento de padrões, interpolação de funções, previsão e controle.

Existem dois paradigmas de redes *neuro-fuzzy*, o paradigma ***cooperativo e o híbrido***. Estes paradigmas diferem quanto à arquitetura e funcionamento de seus modelos. No paradigma cooperativo, apesar da rede neural e o sistema fuzzy estarem integrados, eles funcionam de forma independente. Enquanto que no paradigma híbrido, os sistemas fuzzy e neural estão completamente integrados. Este último é o paradigma mais conhecido e pesquisado.

6.2. Formalismos Baseados em Intervalar

Desde que Zadeh introduziu em 1973 "Interval Valued Fuzzy Sets (IVFS)" [Zadeh 1973], um conjunto fuzzy com uma função de pertinência valorada por intervalo, muitos outros autores têm usado em diferentes campos das ciências; por exemplo, Turksen em [Turksen 1986], que propõe uma lógica valorada por intervalos, a qual tem servido de base para outros trabalhos.

Rocha em [Rocha 1994], [Rocha 1995], [Rocha 1996], [Rocha 1997a] e [Rocha 1997b] que, baseado em Turksen, propõe uma generalização para IVFS desenvolvido por Zadeh, os "Evidence Sets", um formalismo baseado em intervalos, que possui descrições mais adequadas para mapear a incerteza dos especialistas.

Yam, Mukaidono e Kreinovich defendem o uso de intervalos aplicados a conjuntos fuzzy em [Mukaidono 1999], [Yam 1999], [Kreinovich 2000a], [Kreinovich 2000b]. Esses autores defendem que o uso de intervalos diminui o o tempo de processamento, a quantidade de bits para armazenamento e o número de regras para o projeto do sistema.

Muitos autores têm usado intervalos para representar a aproximação de números fuzzy. Uma representação intervalar de um número fuzzy pode ter muitas aplicações.

A combinação de sistemas fuzzy com outras técnicas, como redes neurais e aritmética intervalar, pode solucionar estas limitações e reduzir as deficiências destes sistemas. Será apresentada na próxima seção uma explicação sobre a união destes paradigmas.

6. Extensões utilizando a Teoria Fuzzy

Para melhorar a eficiência dos sistemas fuzzy, este tem sido combinado com outras teorias de desenvolvimento de sistemas, gerando sistemas ainda mais confiáveis. Por exemplo, os sistemas Neuro-Fuzzy, L-Fuzzy e Fuzzy Intervalar, dentre outros.

Nesta seção serão mostrados a rede neuro-fuzzy e formalismos baseados em intervalos; o primeiro tem sido muito utilizada em problemas com mineração de dados tais como: análise de crédito, análise de risco, previsão financeira, detecção de fraudes, definição do perfil do consumidor entre outros; e em processamento de imagem, para vários tipos de uso, inclusive em Sistemas de Informação Geográfico [Guesgen 1997b]. O segundo, é dado uma visão do uso de intervalos a teoria fuzzy, este tipo de formalismo tem sido bastante utilizado em problemas que envolvem erros de aproximação.

6.1. Redes Neuro-Fuzzy

As Redes Neurais e os Sistemas Fuzzy manipulam problemas imprecisos e não-lineares. No entanto a forma que cada um trabalha é bem diferente. Enquanto os sistemas fuzzy trabalham com a pertinência dos elementos de conjuntos fuzzy para gerar conclusões a partir de inferências, as redes neurais trabalham com neurônios artificial baseados no neurônio humano, que possuem a capacidade de aprendizagem, generalização e abstração de informações irrelevantes. Elas não necessitam de base de conhecimento, pois suas informações são obtidas através do treinamento das redes neurais utilizando algoritmos de aprendizagem, podendo reconhecer, classificar e agrupar padrões [Kasabov 1996].

Um especialista pode ser requisitado para definir apenas um conjunto inicial de regras. Durante o processo de treinamento das redes *neuro-fuzzy*, regras podem

5.3.1.3. Defuzzificação Média de Máximo (MOM)

Uma forma simples para defuzzificar a saída é pegar o valor crisp com o mais alto grau de pertinência em $\mu_{OUT}(x)$. Freqüentemente, porém, pode existir mais que um elemento no universo em discussão tendo o valor máximo. Em tais casos podemos selecionar um randomicamente ou até melhor, pegar a média de valor do máximo. Supondo que se tem M valores máximos em um universo discreto em discussão. A saída crisp pode ser obtida por:

$$x^* = \frac{\sum x_m}{M} \qquad \text{Equação 60}$$

onde um é o m-ésimo elemento no universo em discussão onde a função de pertinência de $\mu_{OUT}(x)$ está no valor máximo, e M é o número total de elementos.

A defuzzificação MOM é mais rápida que COA, e, além disso, permite o controlador alcançar valores perto das extremidades do universo em discussão. Uma desvantagem desse método é que ele não considera formas globais da saída fuzzy $\mu_{OUT}(x)$. Por outro lado, com a COA os valores extremos do universo em discussão não podem ser alcançados. Ambos os métodos têm sido utilizados em aplicações de controle; muitas variações desses podem existir, tal como o método indexado do centro de gravidade, onde um nível limite é usado para eliminar elementos com graus de pertinência menor que um limite na computação de $\mu_{OUT}(\Delta x)$ [Pedrycz 1993], É também possível trabalhar com métodos de defuzzificação de maneiras adaptativas.

Por tudo que foi exposto nesta seção, pode-se dizer que os sistemas fuzzy são bastante utilizados em diversas áreas no desenvolvimento de sistemas principalmente na engenharia no desenvolvimento de controladores fuzzy.

Os Sistemas Fuzzy conseguem ser executados de forma correta, robusta e a baixo custo, o que contribui para uma boa performance. Os Sistemas Fuzzy são muitos bons para solucionar problemas complexos e não-lineares. Entretanto, existem algumas limitações. Os Sistemas Fuzzy não são capazes de aprender novas regras, e a definição boas funções de pertinência e regras fuzzy não são tarefas fáceis.

Algumas desvantagens do COA são que ele favorece o valor “central” no universo em discussão e que, devido sua complexidade pode conduzir a ciclos de inferência bastante lentos.A defuzzificação COA leva em conta a área da função de pertinência resultante $\mu_{OUT}(x)$ como um todo. Se as áreas de duas ou mais contribuições de regras se sobrepõem, a equação 56 leva em conta as áreas sobrepostas somente uma vez (desde que se leve a união para a forma $\mu_{OUT}(x)$, a função de pertinência resultante).

Quando $\mu_{OUT}(x)=0$ simplesmente fixa-se a saída crisp para um valor pré-estabelecido (para evitar dividir por zero), tipicamente x*=0. O valor de saída crisp pode ser computado em termos do DOF de cada regra de contribuição como:

$$x^* = \frac{\sum DOF_K \cdot M_K}{\sum DOF_K \cdot B'_K} \qquad \text{Equação 58}$$

onde B'_k é a contribuição devido à varredura da regra k, M_k é o momento de B'_k e DOF_k é o grau de cumprimento da k-ésima regra (k=1,...,n). O momento de B'_k é o produto de B'_k e a distância do centro de gravidade do eixo μ (o momento sobre zero).

5.3.1.2. Defuzzificação Centro de Somas (COS)

Para endereçar o problema associado com defuzzificação COA e levar em conta as áreas sobrepostas de múltiplas regras mais de uma vez, uma variação da defuzzificação COA chamada defuzzificação centro de somas (COS) é usado. COS constrói a função de pertinência resultante pegando a soma (não apenas a união) de saída de cada contribuição de regra. Assim áreas sobrepostas são consideradas mais de uma vez. A defuzzificação COS é atualmente um dos mais utilizados métodos de defuzzificação. Ele pode ser facilmente implementado e conduz a rápidos ciclos de inferência. É dado por:

$$x^* = \frac{\sum x_i \sum \mu_{B'_K}(x_i)}{\sum \sum \mu_{B'_K}(x_i)} \qquad \text{Equação 59}$$

onde $\mu_{B'k}$ é a função de pertinência (no ponto x_i do universo em discussão) resultando da varredura da k-ésima regra.

composição e implicação [Tsoukalas 1997] mostrados nas tabelas 1 e 3 respectivamente das seções 4.1.6 e 4.1.7 respectivamente.

5.3. Defuzzificação

Quando todas as regras forem executadas, o conjunto fuzzy solução associado ao problema deve ser defuzzificado. Este processo produz uma escala para as variáveis numa escala de zero a cem.

5.3.1. Métodos de Defuzzificação

Depois da entrada para o sistema ter sido processada através das regras de inferência o resultado é um conjunto fuzzy de saída $\mu_{OUT}(x)$ também chamado conjunto fuzzy solução associado ao problema que deve ser defuzzificado. Selecionado um número crisp x* representante de $\mu_{OUT}(x)$ é um processo conhecido como defuzzificação. Durante os anos várias técnicas de defuzzificação têm sido sugeridas. A escolha do método de defuzzificação pode ter um impacto significativo na velocidade e acuracidade do sistema fuzzy. Os métodos mais freqüentemente usados são centróide ou centro de área (COA), o centro de soma (COS) e a média de máximo(MOM).

5.3.1.1. Defuzzificação Centróide ou Centro de Área (COA)

Na defuzzificação COA o valor crisp x* é o centro geométrico do valor fuzzy de saída $\mu_{OUT}(x)$, onde $\mu_{OUT}(x)$ é formado pela união de todas as contribuições das regras cujo *grau de cumprimento da regra* DOF > 0. O centro é o ponto que separa a área debaixo da curva $\mu_{OUT}(x)$em duas partes de áreas iguais. Assumi-se que tem um universo de discussão discreto. A defuzzificação de saída é definida como:

$$x^* = \frac{\sum x_i \mu_{OUT}(x_i)}{\sum \mu_{OUT}(x_i)} \qquad \text{Equação 57}$$

onde o somatório (integração) é carregado sobre valores (contínuos) do universo de discussão x_i provado nos N pontos. COA é bem conhecido e usado método de defuzzificação.

5.2.1. Inferência Fuzzy Min-Max

No caso da inferência fuzzy min-max são utilizados os operadores de composição e implicação min-max [Tsoukalas 1997].

A composição min-max para o grau de pertinência de duas relações fuzzy R_1 e R_2 é dado por:

$$\mu_{R1 \circ R2}(x,z) = \min_y(\max(\mu_{R1}(x,y),\mu_{R2}(y,z))) \quad \text{Equação 54}$$

Assim, a equação 52 pode ser definida em termos de funções de pertinência como:

$$\mu_{B'}(y) = \min_x(\max(\mu_{A'}(x), \mu_R(x, y))) \quad \text{Equação 55}$$

onde $\mu_{B'}(y)$ é a função de pertinência de B', $\mu_{A'}(x)$ é a função de pertinência de A', e $\mu_R(x, y)$ é a função de pertinência da relação de implicação.

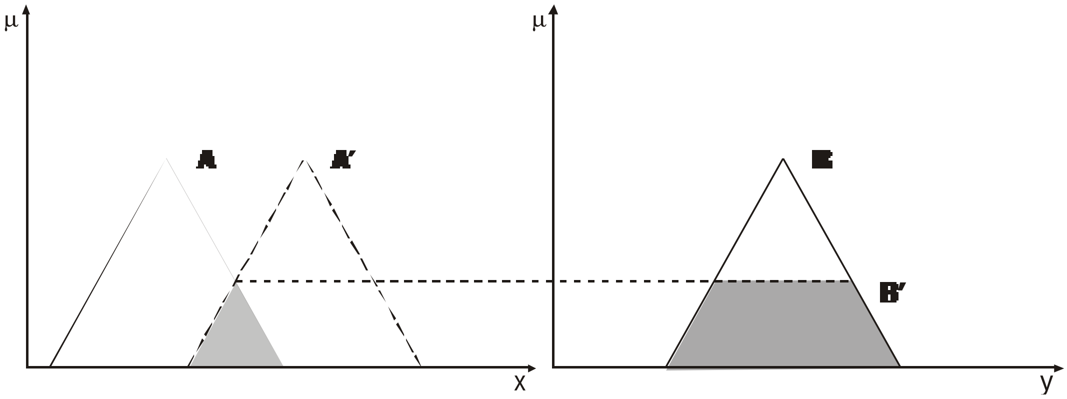


Figura 23 - Interpretação Gráfica da GMP usando Inferência Min-Max

A relação de implicação min-max é definida como:

$$\mu_R(x,y) = \min(\max(\mu_A(x),\mu_B(y)),(1-\mu_A(x))) \quad \text{Equação 56}$$

Em regras com múltiplos antecedentes, a inferência inclue as operações de conjunção (AND) ou disjunção (OR) antes da conclusão de B'. As operações de conjunção e disjunção são usadas em conjuntos fuzzy como o máximo e o mínimo. No caso geral, o mecanismo de inferência é aplicado a várias regras, gerando muitas conclusões B_i'. A conclusão final do sistema é a conjunção de todos os B_i'.

O processo de inferência baseado na generalização do modus ponens não é único. Ele depende da representação das regras fuzzy e das operações sobre os conjuntos fuzzy [Kandel 1996]. Além disso, existem vários tipos de operadores de

Além da construção da função de pertinência é antes da fase de fuzzificação que as regras do sistema são extraídas de dados numéricos ou fornecidas pelos especialistas.

E somente as regras relevantes para uma dada situação são ativadas durante a etapa de fuzzificação. Os valores de entrada do sistema são mapeados pelos conjuntos fuzzy relevantes ao problema em questão atribuindo a estes valores os graus de pertinência para cada conjunto fuzzy ou variável lingüística importante para o sistema. Juntamente com os conjuntos fuzzy e as variáveis de entrada, as regras serão tratadas pelo mecanismo de inferência, resultando conjuntos fuzzy solução que serão tratados pelos mecanismos de defuzzificação apresentados a seguir.

5.2. Avaliação das Regras de Inferência

A inferência é uma forma de simular o raciocínio dos especialistas através de regras. Isto pode ser feito através da composição de uma relação R representando uma regra de implicação e uma proposição qualquer A. As regras fuzzy são ligadas através de operações AND e OR como visto na seção anterior.

O processo de inferência resulta em inferir novos fatos baseados nas regras fuzzy e nas informações de entradas adicionais.

Como foi visto, uma forma de implementar a inferência modus ponens é:

$$B' = A' \circ (A \rightarrow B) = A' \circ R(x,y) \qquad \text{Equação 53}$$

onde A, A' B e B'são conjuntos fuzzy, x e y são variáveis fuzzy, R(x, y) é a relação binária fuzzy de implicação e ∘ é o operador de composição. O conjunto fuzzy B' também chamado de região fuzzy solução B' é ilustrada na região sombreada da figura 23. Um método de inferência fuzzy combina todos os B_i's para a variável fuzzy de entrada x inferida por todas as regras fuzzy para um dado conjunto de fatos de entrada. Em um sistema fuzzy que desenvolve ciclos de inferência, todas as regras fuzzy são varridas em todos os ciclos e todos eles contribuem para o resultado final.

Como geralmente os dados de entrada são valores precisos, resultados de medições ou observações (conjuntos de dados, por exemplo), é necessário efetuar um mapeamento destes dados precisos para os conjuntos fuzzy de entrada relevantes, o que é realizado no estágio de ***fuzzificação.*** Nesse estágio ocorre também a ativação das regras relevantes para uma dada situação. Uma vez obtido o conjunto fuzzy de saída através do processamento de ***inferência***, no estágio de ***defuzzificação*** é efetuada a interpretação dessa informação.

5.1. Fuzzificação

Antes da etapa de fuzzificação são construídos os ***conjuntos fuzzy*** apropriados, isto é, as ***funções de pertinência***, através das quais o significado dos termos lingüísticos relevantes são capturados. Esses significados são, naturalmente dependentes do contexto no qual os termos são usados. Per exemplo, jovem tem diferentes significados, dependendo de ser aplicado a crianças, professores universitários ou pessoal aposentado. O significado desse conceito é mais variado ainda quando aplicado a diferentes tipos de objetos, tais como formações geológicas, árvores ou estrelas.

A dependência de contexto envolve não apenas significados de termos lingüísticos, mas também significados de operações que envolvem termos lingüísticos. Tem-se que determinar, para cada aplicação particular, qual dentre as operações disponíveis relativas a conjuntos fuzzy, a que melhor representa as operações realizadas com os correspondentes termos lingüísticos. Os vários *hedges* lingüísticos são dependentes do contexto também.

O problema da construção de funções de pertinência no contexto de várias aplicações não é um problema da teoria dos conjuntos fuzzy mas sim um problema de aquisição de conhecimento. O processo de aquisição de conhecimento envolve um ou mais especialistas da área de aplicação e essa aquisição é feita pelo engenheiro do conhecimento. O papel do engenheiro do conhecimento é o de extrair o conhecimento de interesse dos especialistas e de expressá-los em alguma forma operacional. Existem muitas formas para construir a função de pertinência, a ***similaridade*** vista na seção 2.6 é uma delas.

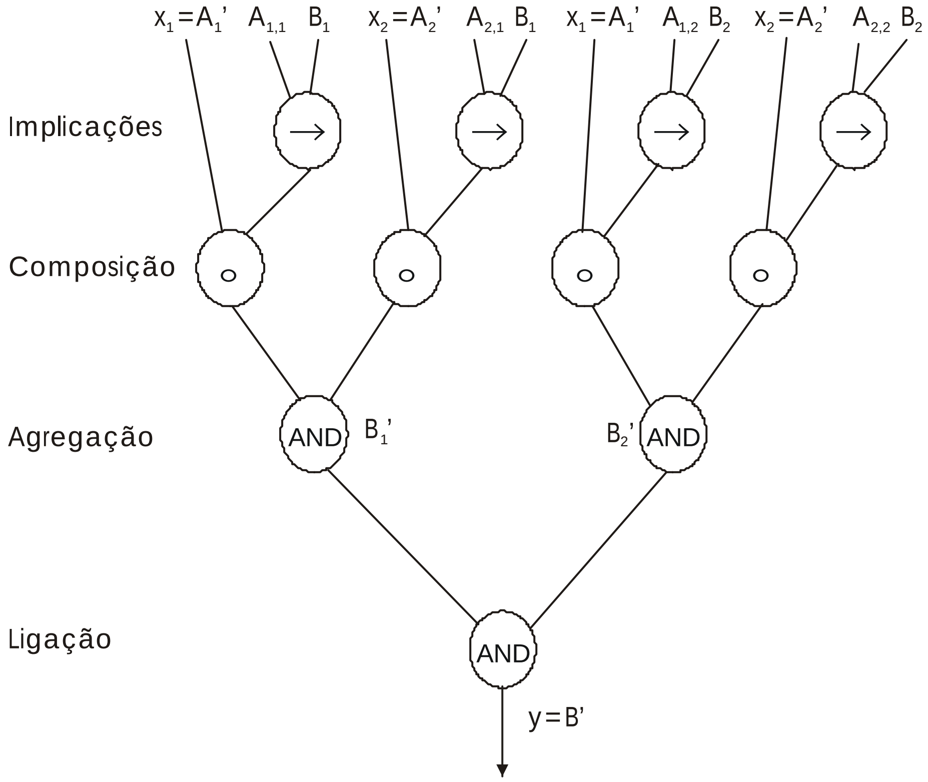


Figura 21 –Esquema da Inferência decomposicional sobre regras fuzzy [Kasabov 1996]

5. Sistema de Inferência Fuzzy

Com base nas informações anteriores, é possível definir sistemas de inferência fuzzy como tendo a seguinte arquitetura mostrada na figura 22.

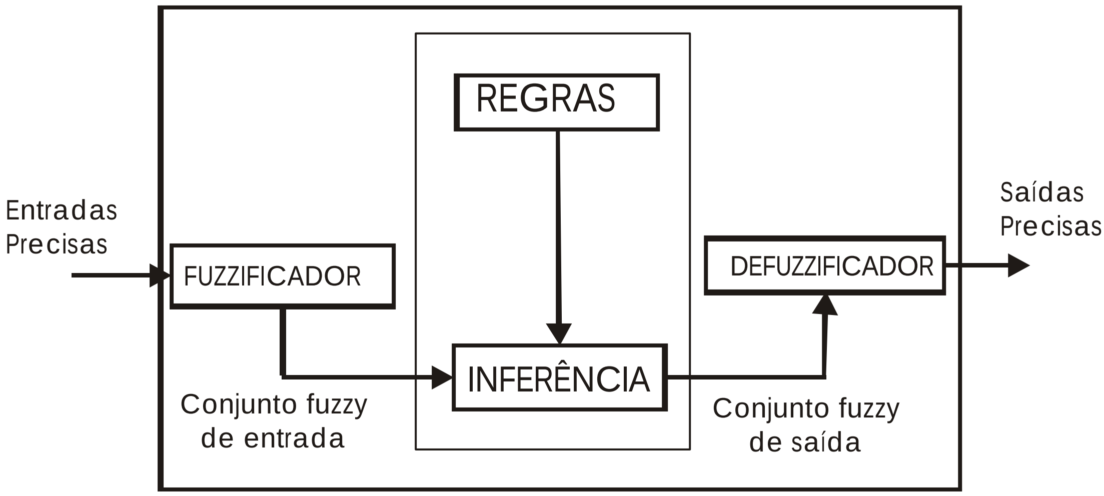


Figura 22 – Sistemas de Inferência Fuzzy

F_i=(I,C,L)

onde I é uma ralação de implicação, C é um dos possíveis operador de composição e L é um dos operadores de ligação [Kasabov 1996].

IMPLICAÇÃO	Interpretação do ELSE
ϕ_m , Zadeh Max-Min	AND ($\wedge$)
ϕ_c , Mamdani min	OR ($\vee$)
ϕ_p , Larsen Product	OR ($\vee$)
ϕ_a , Arithmetic	AND ($\wedge$)
ϕ_b , Boolean	AND ($\wedge$)
ϕ_{bp} , Bounded Product	OR ($\vee$)
ϕ_{dp} , Drastic Product	OR ($\vee$)
ϕ_s ,Standard Sequence	AND ($\wedge$)
ϕ_g , Godelian	AND ($\wedge$)

Tabela 4 – Interpretação para os operadores de implicação

Para a regra genérica abaixo tem-se:

R_i: If x_1 **is** A_{1i} **and** x_2 **is** A_{2i} … **and** x_k **is** A_{ki} **then** y **is** B_i,

Neste caso ***inferência decomposicional*** pode ser aplicada. É baseada na suposição que uma regra que possui k elementos de condições é decomposta em k implicações $A_{ji} \rightarrow B_i$ (para j=1,2,...k). Cada implicação é usada separadamente para inferir o valor de B_i' através da aplicação da regra composicional:

$$B_i' = A_{ji}' \circ (A_{ji} \rightarrow B_i) \qquad \text{Equação 52}$$

para (j=1,2...k). Os valores Bi' são agregados por um dos operadores de agregação (normalmente AND, OR). O método de inferência fuzzy decomposicional é ilustrado na figura sobre as duas regras abaixo:

R_1: If $\mathbf{x_1}$ is $\mathbf{A_{1,1}}$ and $\mathbf{x_2}$ is $\mathbf{A_{2,1}}$ then **y** is $\mathbf{B_1}$

R_2: If $\mathbf{x_1}$ is $\mathbf{A_{1,2}}$ and $\mathbf{x_2}$ is $\mathbf{A_{2,2}}$ then **y** is $\mathbf{B_2}$

$$\mu(x, y) = \phi[\mu_A(x), \mu_B(y)]$$ Equação 51

A tabela 3 mostra os principais operadores de implicação [Kasabov 1996], [Tsoukalas 1997].

Nome da Implicação	Operador de Implicação $f[m_A(x), m_B(y)] =$
ϕ_m , Zadeh Max-Min	$(\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)) \vee (1-\mu_A(x))$
ϕ_c , Mamdani min	$\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)$
ϕ_p , Larsen Product	$\mu_A(x) \cdot \mu_B(y)$
ϕ_a , Arithmetic	$1 \wedge (1 - \mu_A(x) + \mu_B(y))$
ϕ_b , Boolean	$(1 - \mu_A(x)) \vee \mu_B(y)$
ϕ_{bp} , Bounded Product	$0 \vee (\mu_A(x) + \mu_B(y) - 1)$
ϕ_{dp} , Drastic Product	$\mu_A(x)$, se $\mu_B(y) = 1$ $\mu_B(x)$, se $\mu_A(y) = 1$ 0, se $\mu_A(y) < 1$, $\mu_B(y) < 1$
ϕ_s ,Standard Sequence	1, se $\mu_A(x) \leq \mu_B(y)$ 0, se $\mu_A(x) > \mu_B(y)$
ϕ_g , Godelian	1, se $\mu_A(x) \leq \mu_B(y)$ $\mu_B(y)$, se $\mu_A(x) > \mu_B(y)$

Tabela 3 – Operadores de Implicação

Estes operadores satisfazem a inferência *modus ponens* clássica assim como a *modus tollens.*

4.1.8. Operadores de Ligação

Quando se possui uma coleção de regras elas são conectadas por conectivos ELSE que podem interpretar uma intersecção ou uma união dependendo do operador de implicação utilizado. Veja a tabela 4.

A seleção do operador ligação depende do contexto no qual as regras são escritas.

Um método de inferência fuzzy pode ser descrito como uma tripla:

A partir desses operadores podem ser gerados as funções de pertinência, como mostrado na tabela 2.

Nome da Composição	Função de Pertinência
Max-Min	$\mu_{R_1 \circ R_2}(x,z) = \vee_y [\mu_{R_1}(x,y) \wedge \mu_{R_2}(y,z)]$
Max-Star	$\mu_{R_1 * R_2}(x,z) = \vee_y [\mu_{R_1}(x,y) * \mu_{R_2}(y,z)]$
Max-Produto	$\mu_{R_1 \cdot R_2}(x,z) = \vee_y [\mu_{R_1}(x,y) \cdot \mu_{R_2}(y,z)]$
Max-Average	$\mu_{R_1 <+> R_2}(x,z) = \vee_y [\tfrac{1}{2}(\mu_{R_1}(x,y) + \mu_{R_2}(y,z))]$

Tabela 2 – Função de Pertinência dos Operadores de Composição

4.1.7. Relação de Implicação

Existem aproximadamente 40 diferentes formas de relações de implicação reportadas na literatura [Tsoukalas1997]. As relações de implicação são obtidas através de diferentes *operadores de implicação* ϕ. As informações dos antecedentes e conseqüentes das regras são entradas para cada implicação ϕ, e sua saída é uma relação de implicação.

Seja a regra genérica abaixo

If x **is** A **then** y **is** B.

A forma básica de representar a regra acima é a relação de implicação

$$R(x,y) = \int_{(x,y)} \mu_R(x,y)/(x,y)$$ Equação 49

onde $\mu(x, y)$ é a função de pertinência da relação de implicação, o que quer-se obter.

Num universo discreto a relação de implicação é dada por:

$$R(x_i, y_j) = \sum_{(x_i, y_j)} \mu_R(x_i, y_j)/(x_i, y_j)$$ Equação 50

Existem várias maneiras de se obter a função de pertinência da relação de implicação [Tsoukalas1997]. Aqui será utilizada a noção de operador de implicação. Na regra acima um operador de implicação ϕ pega como entrada partes dos antecedentes e conseqüentes das funções de pertinência, chamados $\mu_A(x)$ e $\mu_B(y)$, tendo como saída $\mu(x,y)$, dado por:

Em forma de matriz R é representada por:

$$R=\begin{bmatrix} 1.0 & 0.3 & 0.9 \\ 0.3 & 1.0 & 0.8 \\ 0.9 & 0.8 & 1.0 \end{bmatrix}$$

4.1.6. Composição de Relações Fuzzy

As relações fuzzy definidas nos produtos cartesianos podem ser combinadas uma com as outras de diferentes formas através de composição. Dado duas relações fuzzy, uma em X x Y e outra em Y x Z, quer-se relacionar diretamente elementos de X com Z. O conjunto Y serve como ponte entre os dois conjuntos. A principal tarefa na composição é computar os graus de pertinência dos pares (x, z) na relação composta, denotado por $\mu(x, z)$.

As regras fuzzy são matematicamente equivalentes às relações fuzzy e um mecanismo de inferência é matematicamente equivalente a uma composição. Existem vários tipos de composição, a mais comum na engenharia é a composição *max-min*, mas também será mostrada a *max-star*, *max-produto* e a *max-average*. Em geral tipos diferentes de composição geram diferentes relações de composição.

Sejam as relações R_1 e R_2 definidas no produto cartesiano X x Y e Y x Z respectivamente. A composição de R_1 e R_2 é uma nova relação $R_1 \Theta R_2$, com $\Theta \in \{ \circ, *, \circledast, \langle + \rangle \}$,definida em X x Z como mostrada na tabela 1:

Nome da Composição	Nova Relação
Max-Min	$R_1 \circ R_2 = \int_{XxZ} \vee_y \left[\mu_{R_1}(x,y) \wedge \mu_{R_2}(y,z)\right]/(x,z)$
Max-Star	$R_1 * R_2 = \int_{XxZ} \vee_y \left[\mu_{R_1}(x,y) * \mu_{R_2}(y,z)\right]/(x,z)$
Max-Produto	$R_1 \cdot R_2 = \int_{XxZ} \vee_y \left[\mu_{R_1}(x,y) \cdot \mu_{R_2}(y,z)\right]/(x,z)$
Max-Average	$R_1 \langle + \rangle R_2 = \int_{XxZ} \vee_y \left[\tfrac{1}{2}\, \mu_{R_1}(x,y) + \mu_{R_2}(y,z)\right]/(x,z)$

Tabela 1 – Relações dos Operadores de Composição

Z). Suponha a relação fuzzy binária R definida em X x Y. Os pares da relação podem ser listados pela equação:

$$R = \{((x, y), \mu_R(x, y)) / x \in X \quad e \quad y \in Y\}$$ Equação 45

Para um produto cartesiano discreto tem-se a equação:

$$R = \sum_{(x_i, y_j) \in X \times Y} \mu_R(x_i, y_j) / (x_i, y_j)$$ Equação 46

Enquanto para produtos cartesianos contínuos tem-se:

$$R = \int_{X \times Y} \mu_R(x, y) / (x, y)$$ Equação 47

4.1.5. Representação de Relações Fuzzy

Existem várias maneiras de representar relações, neste trabalho serão utilizadas três formas diferentes para representa-las: por listagem de todos os pares fuzzy, de forma tabular e através de matrizes [Tsoukalas1997].

Sejam os conjuntos discretos X = $\{x_1, x_2, x_3\}$ e Y = $\{y_1, y_2, y_3\}$ e a relação R = "x é similar a y" do seu produto cartesiano. A relação será representada como um conjunto fuzzy através da união de todos os pares e seus respectivos valores de pertinência.

$$R = \sum_{(x_i, y_j) \in X \times Y} \mu_R(x_i, y_j) / (x_i, y_j)$$ Equação 48

R = 1.0 / (x_1, y_1) + 0.3 / (x_1, y_2) + 0.9/ (x_1, y_3) + 0.3/ (x_2, y_1) + 1.0/ (x_2, y_2) + 0.8/ (x_2, y_3) + 0.9/ (x_3, y_1) + 0.8/ (x_3, y_2) + 1.0/ (x_3, y_3)

A relação R representada na forma tabular:

	y_1	y_2	y_3
x_1	1.0	0.3	0.9
x_2	0.3	1.0	0.8
x_3	0.9	0.8	1.0

Note que essa forma genereliza as matrizes lineares que representam relações clássicas.

No modus ponens generalizado, o conjunto fuzzy A' não é necessariamente o mesmo que A (antecedente da regra), assim como B' não é necessariamente o mesmo que o consequente B. Na lógica tradicional, uma regra será "disparada" somente se a Premissa 1 for exatamente o antecedente da regra, e o resultado será exatamente o consequente dessa regra. Na lógica fuzzy, uma regra será "disparada" se houver um *grau de similaridade* (visto na seção 2.6) diferente de zero entre a Premissa 1 (A') e o antecedente da regra (A); o resultado será um consequente (B') com grau de similaridade não nulo em relação ao consequente da regra (B).

Para se obter B' será necessário introduzir alguns conceitos como regra de inferencia composicional e relação de implicação fuzzy, que serão discutidas na seções seguintes. No entanto, o *modus ponens* generalizado possui uma relação de implicação R(x,y) entre as variáveis x e y, assim a premissa 2 pode ser dado por:

Premissa 1: x is A'

Premissa 2: x is A → y is B

Consequente: y is B'

Logo, B' = A' ∘ (A→B) = A' ∘ R(x, y) Equação 44

onde A, A' B e B'são conjuntos fuzzy, x e y são variáveis fuzzy, R(x, y) é a relação binária fuzzy de implicação e ∘ é o operador da relação de composição. O conjunto fuzzy B' também chamado de região fuzzy solução B'.

A inferência fuzzy será tratada como um método de inferência que usa relações de implicações fuzzy, operadores de composição fuzzy e um operador para ligar as regras fuzzy. Conceitos esses discutidos a seguir:

4.1.4. Relação Fuzzy

Uma relação implica na presença de uma associação entre elementos de conjuntos diferentes. Se o grau de associação é 0 ou 1, tem-se *relações clássicas*. Se o grau de associação está entre 0 e 1 tem-se *relações fuzzy*.

As relações fuzzy são conjuntos definidos em Produtos Cartesianos, desta forma são definidas num Universo multidimensional de discussão (X x Y ou X x Y x

A inferência modus ponens é associado à implicação *A implica B* (A→ B); usando-se as proposições *p* e *q*, pode ser expressa como:

$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q.$

O que significa; se a proposição p é verdadeira e a proposição p→ q é verdadeira, então a proposição q é verdadeira. É importante salientar que implicação e inferência são coisas diferentes como será mostrada nas próximas seções a inferência utiliza implicações.

Um exemplo clássico de inferência é:

Premissa 1: Socrates **is** humano.
Premissa 2: **If** Socrates **is** humano **Then** Socrates **is** mortal

---

Conseqüência: Sócrates **is** mortal.
Onde p e q são definidos como:

p = Socrates is humano,
q = Sócrates is mortal.

4.1.2. Inferência Modus Tollens:

A inferência Modus Tollens é utilizada quando se tem os conseqüentes e deseja-se produzir os antecedentes. Logo a inferência modus tollens pode ser expressa por:

$(\neg p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg q.$

4.1.3. Modus Ponens Generalizado (MPG)

Pode-se ter a generalização para todas as regras de inferência, mas só será levada em consideração a modus ponens.

O Modus Ponens Generalizado para lógica fuzzy é apresentado da seguinte forma:

Premissa 1: x **is** A’

Premissa 2: **If** x **is** A **Then** y **is** B

Consequência: y **is** B’

Existem várias outras definições para implicação de composição. As regras das equações de 40 a 42 são originadas da lógica clássica. Por outro lado, essas equações são funções de pertinência de relações fuzzy desde que (x,y) pertença ao produto cartesiano $A \times B \subset U_A \times U_B$. Assim os valores verdade de regras de composição são representados por *relações fuzzy*.

As variáveis linguísticas, os modificadores e as proposições são importantes para modelagem do raciocínio aproximado, visto a seguir.

4. Raciocínio Aproximado

4.1. Inferência

O Raciocínio Aproximado utiliza os conjuntos fuzzy e a lógica fuzzy para mapear o raciocínio humano, raciocínio esse complexo, e muitas vezes ambíguo e inexato.

Os sistemas baseados em regras possuem um mecanismo de inferência para gerar conclusões a partir das entradas fornecidas e das regras armazenadas em sua base de conhecimento. Na lógica proposicional tradicional, há dois tipos importantes de mecanismos (ou regras) de inferência: *modus ponens* e *modus tollens*.

Os sistemas fuzzy possuem procedimentos de inferência também chamados de raciocínio aproximado ou raciocínio fuzzy [Jang 1997]. A inferência fuzzy utilizada neste trabalho usará uma generalização da inferência *modus ponens* e uma regra de inferência composicional, que será vista em detalhes mais a diante. Assim, a inferência *modus ponens* é mostrada abaixo e a seguir a generalização do *modus ponens* para posteriormente inferência fuzzy ser definida.

4.1.1. Inferência Modus Ponens:

A inferência modus ponens é usada quando se tem um fato antecedente e deseja-se produzir o conseqüente.

Premissa 1: x **is** A

Premissa 2: *If* x **is** A **Then** y **is** B

Conseqüência: y **is** B.

- If x is A then y is B, proposição condicional;
- If x is A then y is B is τ, proposição qualificada condicional.

3.5. Regras de Composição para Proposições

As operações de composição consistem de duas proposições p e q unidas por conectivos lógicos.

As proposições são definidas por:

$$\mathbf{p = x \text{ is } A,\ q = y \text{ is } B,} \qquad \text{Equação 39}$$

onde A e B são conjuntos fuzzy

$$\mathbf{A = \{(x, \mu_A(x)) \,/\, x \in A \subset U_A\},\ B = \{(y, \mu_B(y)) \,/\, y \in B \subset U_B\}} \qquad \text{Equação 40}$$

A seguinte interpretação pode ser dada. Os graus de pertinência $\mu_A(x)$ e $\mu_B(y)$ representam os valores verdades das proposições da equação 38, respectivamente. Reciprocamente, os valores da equação 38 são expressadas pelas funções de pertinência μ_A e μ_B.

3.5.1. Conjunção

O valor verdade de p $\wedge$ q (p and q) é definido por:

$$\mathbf{tr(p \wedge q) = \mu_{AxB}(x,y) = \min(\mu_A(x), \mu_B(y)) \,/\, (x,y) \in A \times B.} \qquad \text{Equação 41}$$

onde $\mu_{AXB}(x,y)$ é a função de pertinência do produto direto min.

3.5.2. Disjunção

O valor verdade de p $\vee$ q (p or q) é definido por:

$$\mathbf{tr(p \vee q) = \mu_{AxB}(x,y) = \max(\mu_A(x), \mu_B(y)) \,/\, (x,y) \in A \times B.} \qquad \text{Equação 42}$$

onde $\mu_{AXB}(x,y)$ é a função de pertinência do produto direto max.

3.5.3. Implicação

O valor verdade p $\rightarrow$ q (if p ... then q) é definido como:

$$\mathbf{tr(p \rightarrow q) = \min(1, 1 - \mu_A(x) + \mu_B(y) \,/\, (x,y) \in A \times B} \qquad \text{Equação 43}$$

isto significa que para cada par (x,y) no produto cartesiano A x B tem-se como valor de pertinência o menor entre 1 e 1 - $\mu_A(x) + \mu_B(y)$.

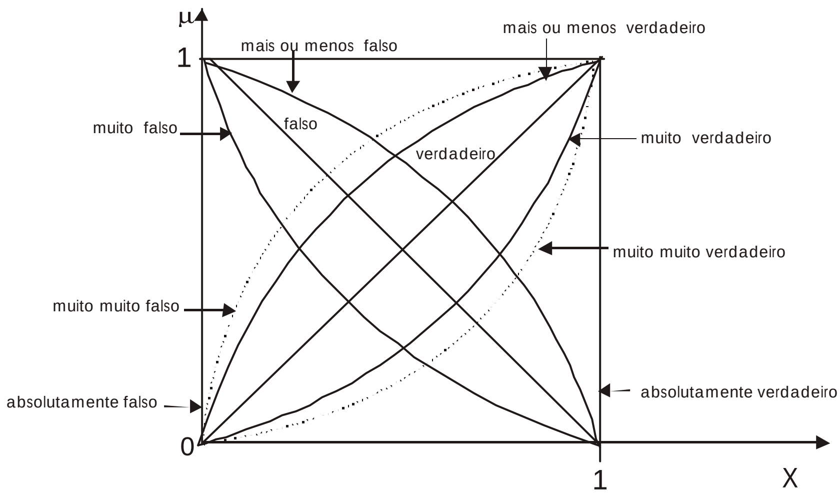


Figura 20 - Variável lingüística verdade e vários modificadores

3.4. Proposições de Lógica Fuzzy

Em lógica clássica uma proposição *p* é verdadeira ou falsa. Em lógica multivalorada ou fuzzy uma proposição é verdadeira para *um grau*.

A verdade de uma proposição *p* na lógica fuzzy é expressa por um conjunto fuzzy, assim através de sua função de pertinência.

As proposições podem ser quantificadas por quantificadores fuzzy tais como *normalmente, freqüentemente, raramente, mais,* etc. Os quantificadores são denotados por *Q*

As proposições podem ser qualificadas pelo conceito fuzzy *verdade,* uma variável lingüística. O termo verdade fuzzy é denotado por τ.

Proposições importantes envolvendo os conjuntos fuzzy $A=\{(x, \mu_A(x)) / x \in U_A\}$ e $B=\{(x, \mu_B(x)) / x \in U_B\}$, onde U_A e U_B são os universos de A e B respectivamente, são listadas abaixo

- x is A, proposição na forma canônica;
- x is *m*A, proposição modificada;
- *Q*x’s are A’s, proposição quantificada;
- *Q*A’s are B’s, proposição quantificada estendida;
- x is A is τ, proposição qualificada;

3.3.1. Modificadores para Variável Lingüística Verdade

A mais importante variável lingüística é a variável lingüística *verdade*. É descrita através de um conjunto fuzzy com função de pertinência $\mu_{verdade}(x) \in [0,1]$ (será usado verdadeiro ao invés de verdade).

Falso é interpretado como *não verdadeiro.*

Verdadeiro e seus termos tem sido definido diferentemente na lógica fuzzy, aqui será considerada a definição mais simples:

$$verdadeiro = \{(x, \mu_{verdadeiro}(x)) / \mu_{verdadeiro}(x) = x, \mu \in [0,1]\}$$ **Equação 31**

Os modificadores das equações 28 a 28 aplicados a $\mu_{verdadeiro}(x) = x$ tem-se:

$$\mu_{não\ verdadeiro}(x) = \mu_{falso}(x) = 1 - x$$ **Equação 32**

$$\mu_{muito\ verdadeiro}(x) = [\mu_{verdadeiro}(x)]^2 = x^2$$ **Equação 33**

$$\mu_{mais\ ou\ menos\ verdadeiro}(x) = [\mu_{verdadeiro}(x)]^{1/2} = x^{1/2}$$ **Equação 34**

Similarmente às equações 33 e 34 usando a equação 30 pode-se definir

$$\mu_{muito\ falso}(x) = (1-x)^2$$ **Equação 35**

$$\mu_{mais\ ou\ menos\ falso}(x) = (1 - x)^{1/2}$$ **Equação 36**

O caso extremo x=1 na equação 31 dá o simples $\mu_{absolutamente\ verdadeiro}(1) = 1$; então da equação 32 permite que $\mu_{absolutamente\ falso}(0) = 1$

Os termos da variável lingüística *verdade* e *falso* são mostrados na figura 20 incluindo

$$\mu_{muito\ muito\ verdadeiro}(x) = [\mu_{muito\ verdadeiro}(x)]^2 = x^4$$ **Equação 37**

$$\mu_{muito\ muito\ falso}(x) = [\mu_{muito\ falso}(x)]^2 = (1 - x)^4$$ **Equação 38**

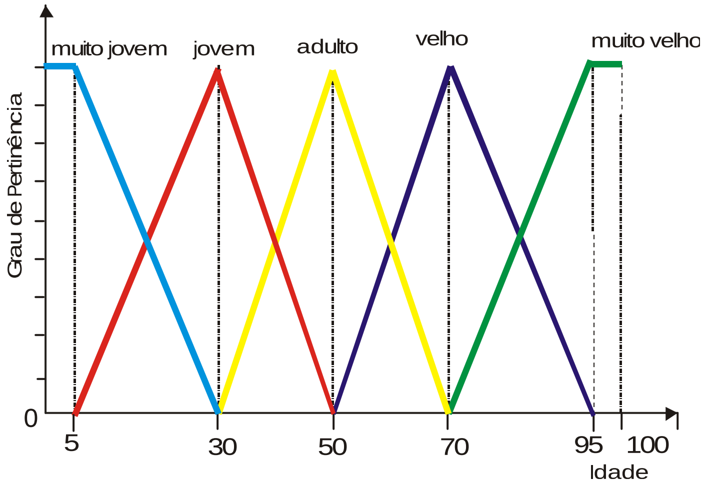


Figura 19 – Termos da variável lingüística idade

As variáveis lingüísticas são muito importantes em aplicações. Por exemplo, os parâmetros de sistemas técnicos tais como temperatura, velocidade, espessura, pressão, etc., podem ser entendidos como variáveis lingüísticas. Dessa forma as variáveis lingüísticas são como o universo e os termos o subconjunto fuzzy deste universo.

3.3. Modificadores Lingüísticos

Seja $x \in U$ e A um conjunto fuzzy com função de pertinência μ_A. Um modificador lingüístico é denotado por *m*, para instâncias como *muito, não, mais ou menos*, etc. Assim por *m*A define-se um conjunto fuzzy modificado por *m* cuja função de pertinência $\mu_{mA}(x)$ é uma composição da função *f(x)* e $\mu_A(x)$ expressa por:

$$\mu_{mA}(x) = f(\mu_A(x)) \quad \textbf{Equação 27}$$

Existe uma função que mapeia o conjunto A (ex: jovem), no conjunto B (ex: muito jovem), isso é feito pela função *f* que altera os graus de certeza $\mu_A(x)$.

A seguir estão representadas as funções de pertinência para os modificadores lingüísticos *não*, *muito* e *mais ou menos*.

$f(x) = 1 - x$ não, $\mu_{\text{não}A}(x) = 1 - \mu_A(x)$ **Equação 28**

$f(x) = x^2$ muito, $\mu_{\text{muito}A}(x) = [\mu_A(x)]^2$ **Equação 29**

$f(x) = x^{½}$ mais ou menos, $\mu_{\text{mais ou menos}A}(x) = [\mu_A(x)]^{1/2}$ **Equação 30**

Os conectivos lógicos and, or e not também representados por $\wedge$, $\vee$ e $\neg$ respectivamente, são definidos na lógica fuzzy como [Nguyen 1999]:

$x \wedge y = \min(x, y)$ **Equação 24**

$x \vee y = \max(x, y)$ **Equação 25**

$\neg x = 1 - x$ **Equação 26**

para os elementos x e y pertencentes ao intervalo [0, 1].

A maior parte da lógica fuzzy trabalha com variáveis lingüísticas, modificadores lingüísticos, lógica fuzzy proposicional, regras de inferência e raciocínio aproximado [Bojadziev 1996] tratados a seguir.

3.2. Variáveis Lingüísticas

Variáveis cujos valores são palavras ou sentenças em linguagem natural ou artificial são chamados variáveis lingüísticas, ou seja, são variáveis cujos valores são nomes de conjuntos fuzzy.

Para ilustrar o conceito de variável lingüística considere a palavra *idade* em linguagem natural; é um resumo da experiência de vida de um grande número de indivíduos; ela não pode ser caracterizada precisamente; trabalhando com conjuntos fuzzy, pode-se descrever aproximadamente *idade* no universo U=[0,100]. *Idade* é uma variável lingüística constituída de conjuntos fuzzy como: *muito jovem*, *jovem*, *adulto*, *velho* e *muito velho*. Essas expressões são chamadas *termos* da variável lingüística *idade*. Cada termo (conjunto) é definido por uma função de pertinência apropriada. Veja figura 19.

3. Lógica Fuzzy

3.1. Definição

A Lógica Fuzzy, baseada na Teoria dos Conjuntos Fuzzy, é a lógica que serve de base para os modelos de raciocínio aproximados, permitindo a abordagem dos mecanismos de inferência que serão vistos na seção 5.

A lógica fuzzy possui relações entre lógica clássica, conjunto clássico, conjunto fuzzy, lógica multi valorada, esquematizada na figura 18 [Bojadziev 1996].

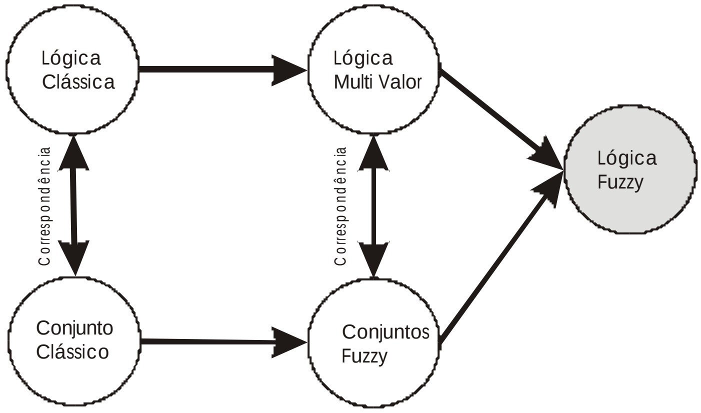


Figura 18 - Lógica Fuzzy

A lógica fuzzy possui uma poderosa metodologia de solução de problemas com milhares de aplicações em controle e processamento de informação [FIDE 1999]. Ela provê uma forma adequada de mapear informações vagas, ambíguas ou imprecisas. De certa forma, a lógica fuzzy simula a tomada de decisão humana através da habilidade de trabalhar com dados aproximados e encontrar soluções adequadas.

Diferente da lógica clássica que requer um profundo entendimento de um sistema, equações exatas, e valores numéricos precisos, a lógica fuzzy incorpora uma forma alternativa de pensar, que permite modelar sistemas complexos usando um alto nível de abstração originado do conhecimento e experiência do especialista. A lógica fuzzy permite expressar esse conhecimento com conceitos subjetivos, tais como muito quente, vermelho brilhante, e ao longo do tempo são mapeados dentro de uma classificação numérica exata.

São possíveis propriedades envolvendo as operações de conjunto com as operações algébricas, por exemplo, a propriedade distributiva:

$A \bullet (B \cap C) = (A \bullet B) \cap (A \bullet C)$

$A \bullet (B \cup C) = (A \bullet B) \cup (A \bullet C)$

$A \bullet \quad (B \cap C) = (A \bullet \quad B) \cap (A \bullet \quad C)$

$A \bullet \quad (B \cup C) = (A \bullet \quad B) \cup (A \bullet \quad C)$

2.7.5. Operações Compensatórias com Conjuntos Fuzzy

Com o uso dos modelos fuzzy, sentiu-se a necessidades de operadores alternativos aos definidos por Zadeh, esses operadores são chamados de operadores compensatórios.

Muitas outras operações para conjuntos fuzzy já foram definidas, mas serão mostradas apenas as mais importantes: [Cox1994], [Bojadziev 1996], [Kasabov1996], [Terano 1992], [Tsoukalas1997].

2.7.5.1. Soma Fechada

$A \bullet \quad B \leftrightarrow \mu_{A \bullet \; B}(x) = \min(\mu_A(x) + \mu_B(x), 1)$

2.7.5.2. Diferença Fechada

$A \bullet \quad B \leftrightarrow \mu_{A \bullet \; B}(x) = \max(\mu_A(x) - \mu_B(x), 0)$

Nesta seção foram mostradas as principais operações envolvendo conjuntos fuzzy. No capítulo 4, somente serão estendidas para fuzzy intervalar as operações básicas definidas por Zadeh vistas anteriormente. A seguir será abordada a Lógica Fuzzy mostrando as variáveis lingüísticas, as proposições da lógica fuzzy, o raciocínio aproximado e as regras de inferência.

A = {(x, μ_A(x)) / x $\in$ U}, μ_A(x) $\in$ [0,1]

B = {(x, μ_B(x)) / x $\in$ U}, μ_B(x) $\in$ [0,1]

2.7.3.1. *Soma Algébrica*

A ● B = {x, ((μ_A(x) + μ_B(x)) – (μ_A(x).μ_B(x))) / x $\in$ U}

2.7.3.2. *Produto Algébrico*

A • B = {x, (μ_A(x).μ_B(x)) / x $\in$ U}

2.7.4. Propriedades dos Operadores Algébricos

As propriedades definidas para soma e multiplicação algébrica válidas para conjuntos fuzzy, considerando A, B e C conjuntos fuzzy, são:

2.7.4.1. *Identidade*

A • Ü = A

A ● Ø = A

A • Ø = Ø

A ● Ü = Ü

2.7.4.2. *Comutativa*

A • B = B • A

A ● B = B ● A

2.7.4.3. *Associativa*

(A • B) • C = A • (B • C)

(A ● B) ● C = A ● (B ● C)

2.7.4.4. *Leis de De Morgan*

¬(A • B) = ¬A ● ¬B

¬(A ● B) = ¬A • ¬B

2.7.2.9. Leis de De Morgan

$\neg(A \cap B) = \neg A \cup \neg B$

$\neg(A \cup B) = \neg A \cap \neg B$

2.7.2.10. Leis da Exclusão Mútua e da Contradição

Apenas as propriedades da exclusão mútua e contradição de Aristóteles não são válidas para conjunto fuzzy. Perceba que a união de um conjunto fuzzy A com seu complemento ¬A não é necessariamente o conjunto fuzzy universo Ü. E a interseção entre os dois não é necessariamente igual ao conjunto fuzzy vazio Ø. De fato quando A ≠ Ü e A ≠ Ø tem-se que:

$A \cup \neg A \neq$ Ü

$A \cap \neg A \neq \emptyset$

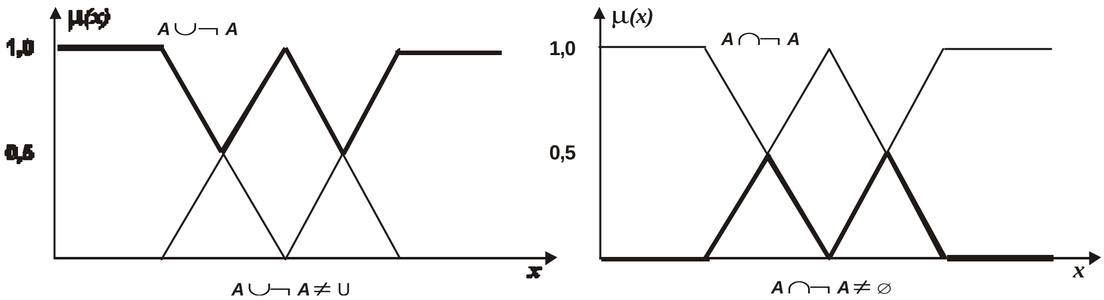


Figura 17 – Lei da Exclusão Mútua e Contradição não são válidas para conjuntos Fuzzy

Isso significa que essas leis só são válidas devido aos valores 0's e 1's, e não somente por causa das propriedades de minimalização e maximalização dos conjuntos.

Logo, a noção de complemento para conjuntos fuzzy não é a da álgebra booleana, assim como, a álgebra que representa os conjuntos fuzzy em geral não é a booleana.

2.7.3. Operações Algébricas com Conjuntos Fuzzy

Foram definidas as operações de soma (●) e multiplicação (.) algébrica para conjuntos fuzzy. Considere A e B conjuntos fuzzy no universo U,

2.7.2.2. Identidade

Sejam as funções de pertinência do conjunto fuzzy vazio Ø e do conjunto fuzzy universo Ü definidas como tendo respectivamente graus de pertinência 0 e 1, $\forall x \in U$.

$$A \cap \ddot{U} = A$$

$$A \cup \varnothing = A$$

$$A \cap \varnothing = \varnothing$$

$$A \cup \ddot{U} = \ddot{U}$$

2.7.2.3. Absorção

$$A \cap (A \cup B) = A$$

$$A \cup (A \cap B) = A$$

2.7.2.4. Comutativa

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

2.7.2.5. Associativa

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

2.7.2.6. Distributiva

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

2.7.2.7. Complemento Duplo

$$\neg(\neg A) = A$$

2.7.2.8. Lei Transitiva

Se A ● B e B ● C → A ● C

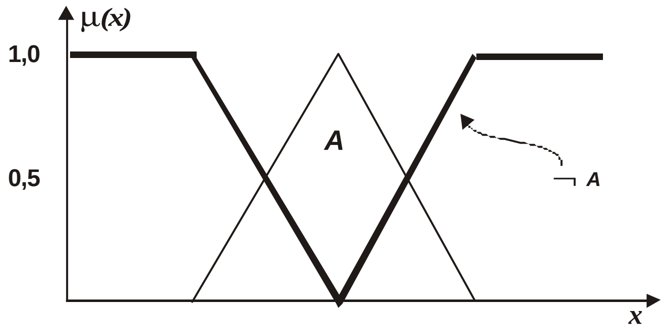


Figura 16 - Complemento de Conjuntos Fuzzy

Existe uma minimalização (de modo genérico) por traz de toda intersecção, isto é expresso classicamente pela propriedade:

$A \subseteq B \leftrightarrow A \cap B = B$

Dualmente, existe uma maximalização que é expressa por:

$A \subseteq B \leftrightarrow A \cup B = A$

Isso explica a realização da União e Intersecção m termos de máximo e mínimo na reta.

Os operadores max e min podem ser representados por "$\vee$" e "$\wedge$" respectivamente, como será definido na seção 3.1.

2.7.1.6. Diferença

$A - B = \{(x, \min(\mu_A(x); \mu_{\neg B}(x))) / x \in U \}$ ou

$A - B = \{(x, (\mu_{A \cap \neg B} (x)) / x \in U \}$

2.7.2. Propriedades de Conjuntos Fuzzy

Considere A, B e C conjuntos fuzzy, as seguintes propriedades para união, interseção e complemento são válidas.

2.7.2.1. Idempotência

$A \cup A = A$

$A \cap A = A$

2.7.1.2. Inclusão

$A \subseteq B \leftrightarrow (\mu_A(x) \leq \mu_B(x)), \forall x \in U$

Então A é dito subconjunto fuzzy de B.

2.7.1.3. União:

$A \text{ OR } B = A \cup B = \{(x, \max(\mu A(x); \mu B(x))) / x \in U\}$

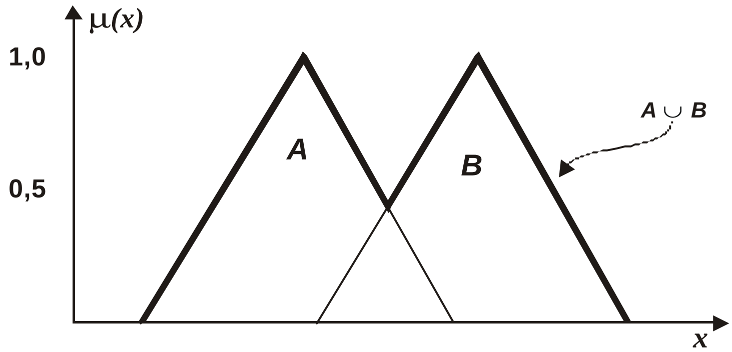


Figura 14 – União de Conjuntos Fuzzy

2.7.1.4. Interseção:

$A \text{ AND } B = A \cap B = \{(x, \min(\mu A(x); \mu B(x)) / x \in U\}$

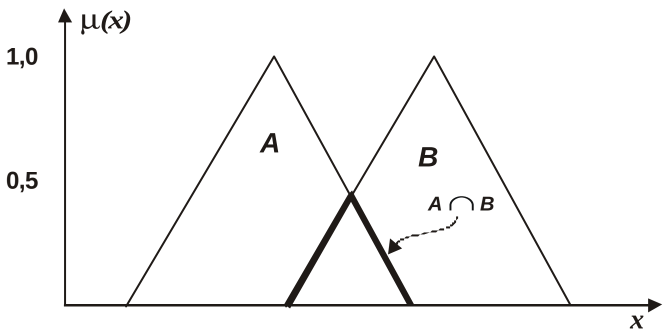


Figura 15 – Intersecção de Conjuntos Fuzzy

2.7.1.5. Complemento:

$\text{NOT } A = \neg A = \{(x, \mu\neg A(x)) / x \in U \text{ e } \mu\neg A(x) = 1 - \mu A(x)\}$

Na seção 2.4 do capítulo 4, é apresentado um método de simplificação de conjunto fuzzy usando intervalos [Silveira 2001h]. A seguir serão vistas as principais operações com conjuntos fuzzy e suas propriedade.

2.7. Operações com Conjuntos Fuzzy

Na teoria clássica dos conjuntos, uma operação é uma relação entre conjuntos que produz outro conjunto [Kandel 1996]. As operações entre conjuntos são de extrema importância para os sistemas baseados em conhecimento porque o processo de inferência é baseado no processamento dos conectivos lógicos de cálculo proposicional (AND, OR). Por exemplo, dado a regra "If A AND B Then C", o valor de C depende do valor verdade da conjunção (A AND B), ou seja, o valor da interseção ($A \cap B$), se A e B possuem o mesmo domínio. Caso contrário, essa conjunção é tratada através de relações fuzzy (seção 4.2). Por essa razão as operações entre conjuntos fuzzy são cruciais para a inferência em sistemas fuzzy.

As operações com conjuntos fuzzy (A e B) são definidas através da operação de suas funções de pertinência (μ_A e μ_B) [Bojadziev 1996]. Elas não particionam o conjunto, mas determinam a compatibilidade entre cada conjunto fuzzy e seu valor no domínio [Cox 1994], [Gottgtroy 1996].

2.7.1. Operações Básicas de Zadeh com Conjuntos Fuzzy

As operações básicas para conjuntos fuzzy foram originalmente definidas por Zadeh [Bojadziev 1996], [Kasabov 1996], [Terano 1992], [Tsoukalas 1997]:

Sejam A e B conjuntos fuzzy no universo U, isto é:

$A = \{(x, \mu_A(x)) / x \in U\}, \mu_A(x) \in [0,1]$

$B = \{(x, \mu_B(x)) / x \in U \}, \mu_B(x) \in [0,1]$

As principais operações serão definidas a seguir:

2.7.1.1. Igualdade

$A = B \leftrightarrow (\mu_A(x) = \mu_B(x)), \forall x \in U$

fuzzy para o qual $s \geq \lambda_m$. Finalmente a base de regras atualizada é checada como um conjunto fuzzy do universo. Tais conjuntos são removidos dos antecedentes das rgras que eles ocorrem. O algoritmo pode ser resumido como segue:

Given a fuzzy rule base $R = \{Ri \,/\, i = 1, ..., N\}$,

R_i : *If* x_1 *is* A_{i1} *and ... and* x_n *is* A_{in} *then* y_i

Where Aij, $j = 1, \ldots, n$, are fuzzy sets with membership functions $\mu_{A_{ij}} : x_j \rightarrow [0,1]$, select the thresholds $\lambda_r, \lambda_m \in (0,1)$.

Reapet:

1. *Select the two most similar fuzzy sets in rule base*. Calculate $s_{jik} = S(A_{ji},A_{jk})$, $j=1,...,n$, $i,k=1, ... , N$. Select A_{ql} and A_{qm}, such that $s_{qlm} = max_{i \neq k}\{s_{jik}\}$.
2. Merge the two most similar fuzzy sets and update the rule base. If $s_{qlm} \geq \lambda_m$ merge A_{ql} and A_{qm} to create a new fuzzy set A and replace $A_{ql}=A$ and $A_{qm}=A$.

Until: $s_{qlm} < \lambda_m$.

Remove fuzzy set similar to the universal set. For each fuzzy set A_{ji} calculate $S(A_{ji},U)$, where $\mu_U(x) = 1, \forall x$. If $S(A_{ji},U) \geq \lambda_r$ remove A_{ji} from the antecedent of R_i.

O algoritmo apenas funde um par de conjuntos fuzzy a cada interação. A fusão de dois conjuntos fuzzy A_{ql} e A_{qm} é completada através da computação do suporte do novo conjunto fuzzy A como o suporte definido por A_{ql} *U* A_{qm}. Isto garante a preservação da cobertura do espaço do antecedente. O kernel de A é dado pela média dos kernels de A_{ql} e A_{qm}, fazendo a interpolação das regras de R_l e R_m.

Conjuntos fuzzy distintos são obtidos como um resultado da simplificação que aumenta as possibilidades de interpretação do modelo, enquanto a redundância é reduzida. O algoritmo de simplificação da base da regra não necessariamente muda o número de regras da base. Porém, a redução das regras ocorre se os antecedentes de duas ou mais regras tornam-se iguais.

variáveis do domínio. A seguir será mostrado um resumo de um algoritmo para fazer a simplificação de conjuntos fuzzy e conseqüentemente da base de regras.

2.6.5. Similaridade Baseada na Simplificação da Base de Regras

Os conjuntos fuzzy similares têm um alto grau de sobreposição e são caracterizados por ter aproximadamente o mesmo suporte e grau de pertinência para os elementos correspondentes. Neste sentido a medida de similaridade S(A,B) quantifica o grau de igualdade entre os conjuntos fuzzy A e B como visto anteriormente, na equação 17:

Um estudo detalhado de várias medidas de similaridade em [Setness 1995] tem mostrado que a medida de similaridade de conjuntos fuzzy é baseada na intersecção e união destes conjuntos fuzzy, que são usadas para a simplificação da base de regras:

$$S(A,B)=\frac{|A\cap B|}{|A\cup B|}$$ **Equação 22**

Aqui | . | denota a cardinalidade de um conjunto. Quando A e B são definidos num domínio discreto U={x_j / j = 1, 2, ..., q}, a equação 22 pode ser escrita como:

$$S(A,B)=\frac{\sum_{j=1}^{q}(\mu_A(x_j)\wedge\mu_B(x_j))}{\sum_{j=1}^{q}(\mu_A(x_j)\vee\mu_B(x_j))}$$ **Equação 23**

Um algoritmo que simplifica um dado modelo fuzzy usando a equação 22 é descrito em [Babuska 1996]. O algoritmo requer duas entradas: $\lambda_r\in(0,1)$ para remover os conjuntos fuzzy similares do universo, e $\lambda_m\in(0,1)$ para fundir os conjuntos fuzzy similares uns com os outros. O algoritmo funde os conjuntos fuzzy similares interativamente. Em cada interação, a similaridade entre todos os pares de conjuntos fuzzy para cada variável do antecedente é considerada. O par de conjunto fuzzy que tiver a maior similaridade $s\geq\lambda_m$ são fundidos. Um novo conjunto fuzzy é criado como resultado da fusão e a base de regras é atualizada substituindo os conjuntos fuzzy fundidos pelo conjunto fuzzy resultante. O algoritmo novamente avalia a similaridade na atualização da base de regras até não existir mais conjuntos similaridade alto, considerando que mais conjuntos diferentes devem ser assinalados por um valor de similaridade baixa. O grau de similaridade determina quais os conjuntos fuzzy devem ser simplificados. Para uma comparação correta de valores de similaridade, a medida de similaridade não seria influenciada pela escala do domínio no qual os conceitos fuzzy são definidos. Isto evita a necessidade de normalização de domínios [Kaymak 1997], [Setness 1998].

Seja A e B subconjuntos fuzzy de U com função de pertinência μ_A e μ_B, respectivamente. Uma medida de similaridade será considerada como candidata para um esquema de base de regra automática se ela satisfizer a quatro critérios:

1. Conjuntos fuzzy não sobrepostos devem ser considerados totalmente não iguais, s=0.

$$S(A,B)=0 \Leftrightarrow \mu_A(x)\mu_B(x)=0,\ \forall x \in U. \qquad \textbf{Equação 18}$$

2. Conjuntos fuzzy sobrepostos devem ter um valor de similaridade s>0

$$S(A,B)>0 \Leftrightarrow \exists x \in U,\ \mu_A(x)\mu_B(x) \neq 0. \qquad \textbf{Equação 19}$$

3. Apenas os conceitos fuzzy iguais devem ter um valor de similaridade s=1

$$S(A,B)=1 \Leftrightarrow \mu_A(x)=\mu_B(x),\ \forall x \in U. \qquad \textbf{Equação 20}$$

4. Similaridade entre dois conjuntos fuzzy não deve ser influenciada por escala ou troca do domínio no qual eles foram definidos

$\forall x \in U, \exists k>0$ **tal que se,**

$\mu_{A'}(l + kx) = \mu_A(x)$ **e,**

$\mu_{B'}(l + kx) = \mu_B(x)$ **então,**

$$S(A', B') = S(A, B) \qquad \textbf{Equação 21}$$

O primeiro critério assegura que os conjuntos fuzzy não similares (não sobrepostos) são excluídos dos conjuntos fuzzy similares. De acordo com o critério 2, os conjuntos fuzzy sobrepostos devem ser assinalados por um grau de similaridade diferente de zero e não devem ser considerados como totalmente diferente de zero. O critério 3 assume que a igualdade é um caso especial de similaridade assim como os conjuntos clássicos é um caso especial dos conjuntos fuzzy. E no critério 4, é requerida para uma comparação justa de similaridade da base de regras uma medida de similaridade que satisfaz este critério não é influenciada pelo valor numérico das

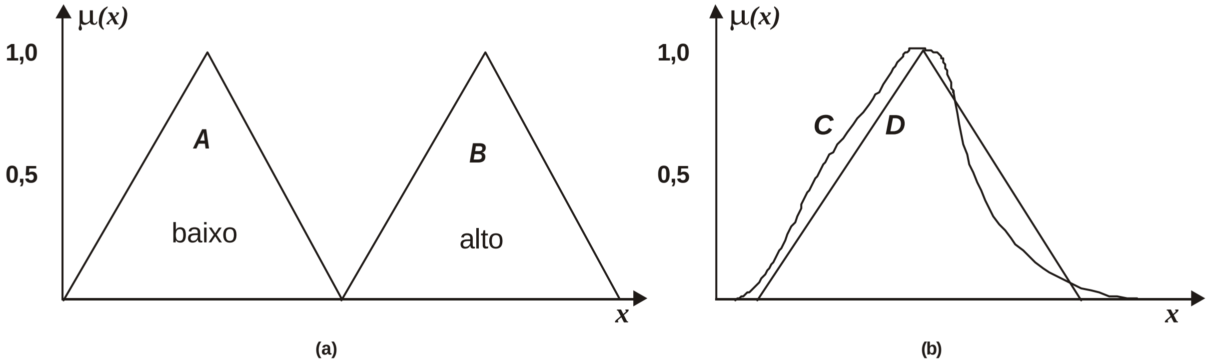


Figura 13 - Semelhantes A e B, Similares C e D

2.6.3. Similaridade como Grau de Igualdade

Os conjuntos fuzzy são considerados similares se eles são definidos por funções de pertinência sobrepostas que partilham aproximadamente os mesmos valores de pertinência para os elementos em seu universo. Sua similaridade é o grau para o qual eles podem ser considerados iguais. A definição clássica de igualdade é precisa. Sejam μ_A e μ_B as funções de pertinência dos conjuntos fuzzy A e B respectivamente.

Então A e B são iguais, se:

$$\mu_A(x) = \mu_B(x),\ \forall x \in X. \qquad \text{Equação 16}$$

Se o conceito de igualdade for aplicado aos conjuntos fuzzy da figura 13, tem-se que A $\neq$ B e C $\neq$ D desde que suas funções de pertinências sejam diferentes. Porém, quanto a C e D, pode-se dizer que têm um alto grau de igualdade e desta forma pode-se dizer que eles são similares. Essa similaridade pode ser medida por um valor de similaridade:

$$s = S(A,B) = grau(A=B),\ s \in [0,1] \qquad \text{Equação 17}$$

onde S é uma medida de similaridade. A medida de similaridade é uma função fixando um valor de similaridade s para o par de conjuntos fuzzy (A,B) que indica o grau para o qual A e B são iguais ou quão similares eles são.

2.6.4. Determinação de Similaridade para Simplificação

Uma medida de similaridade para conjuntos fuzzy detecta conjuntos fuzzy de alta similaridade que representam mais ou menos conceitos compatíveis em uma base de regra fuzzy. Tais conceitos fuzzy devem ser assinalados por um valor de de *medidas de similaridade* [Cross 1993], [Setness 1995], [Kaymak 1997], [Setness 1998].

Todos esses métodos possuem formas diferentes de simplificar os conjuntos fuzzy e conseqüentemente suas regras, mas todos eles perdem informações fornecidas pelos especialistas, pois sempre geram um conjunto a partir de outros conjuntos.

A figura 12 ilustra a simplificação dos conjuntos A e B, gerando o conjunto C, neste caso é utilizada a medida de similaridade proposta em [Setness 1998].

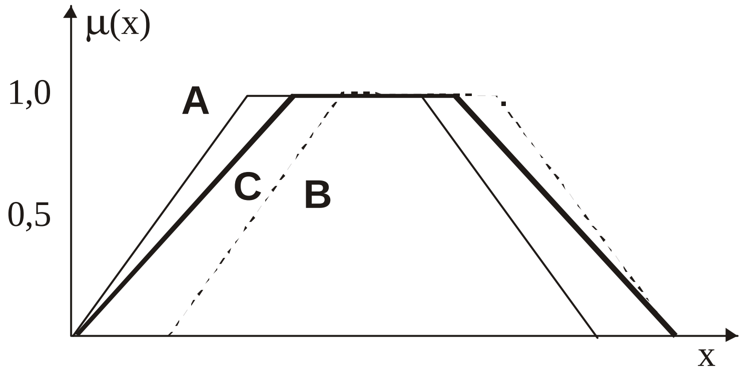


Figura 12 - Simplificação de Conjuntos Fuzzy A e B

2.6.2. Similaridade

O conceito de similaridade é interpretado de diferentes formas dependendo do contexto. A interpretação na linguagem cotidiana é "ter características em comum" ou "não diferir na forma, mas no tamanho ou posição". Esta interpretação de similaridade difere da utilizada em conjuntos fuzzy [Kaymak 1997]. A similaridade entre dois conjuntos fuzzy é definida como o grau para o qual os conjuntos fuzzy são iguais. Esta definição está relacionada aos conceitos representados pelos conjuntos fuzzy. Considere os conjuntos fuzzy A e B na figura 13(a), eles têm exatamente a mesma forma, mas representam claramente conceitos diferentes, isto é, um valor de x é baixo ou alto. Eles têm grau zero de igualdade e são considerados não similares. Por outro lado, os dois conjunto C e D da figura 13(b), ainda que eles difiram na forma, pode-se dizer que eles têm um alto grau de igualdade, eles representam conceitos compatíveis e são considerados similares.

2.6. Conjuntos Fuzzy Similares

Uma característica importante de modelos fuzzy é a separação do espaço das variáveis do sistema dentro de regiões fuzzy usando conjuntos fuzzy. Em cada região, as características do sistema podem ser simplesmente descritas usando uma regra. Um modelo fuzzy consiste, tipicamente, de uma base de regras com uma regra para cada região particular. Transições fuzzy entre essas regras permitem a modelagem de sistemas não-lineares complexos com uma precisão global boa. Um dos aspectos que distingue a modelagem fuzzy de outras pesquisas, como redes neurais, é que modelos fuzzy são transparentes para interpretação e análise (para um certo grau) [Ruan 1997].

Porém a transparência de um modelo fuzzy não é alcançada automaticamente. Um sistema pode ser descrito com poucas regras usando conjuntos fuzzy interpretáveis e distintos, mas também com um grande número de conjuntos fuzzy altamente sobrepostos que dificilmente permitem qualquer interpretação. Quando um modelo fuzzy é desenvolvido usando conhecimento do especialista, o Engenheiro do Conhecimento se preocupa que o modelo permaneça interpretável. Por outro lado, algum grau de redundância e assim complexidade desnecessária não pode ser evitada quando são aplicadas técnicas automatizadas para adquirir modelos fuzzy de dados [Kaymak 1997].

Além disso, quando o Engenheiro do Conhecimento está trabalhando com vários especialistas, é comum, divergência na precisão das informações, o que dificulta o mapeamento dessas informações, pois para cada especialista pode-se obter diferentes conjuntos fuzzy para as variáveis em questão. Esses conjuntos fuzzy, conseqüentemente, possuem uma certa semelhança, pois estão tratando do mesmo problema e das mesmas variáveis.

2.6.1. Simplificação de Conjuntos Fuzzy

Para simplificação de conjuntos fuzzy têm sido propostos vários métodos de otimização, dentre estes se destacam o *clustering fuzzy* [Gath 1989], [Setness 1998], *a fusão e destruição de graus de pertinência* [Song 1993], além de diversos métodos

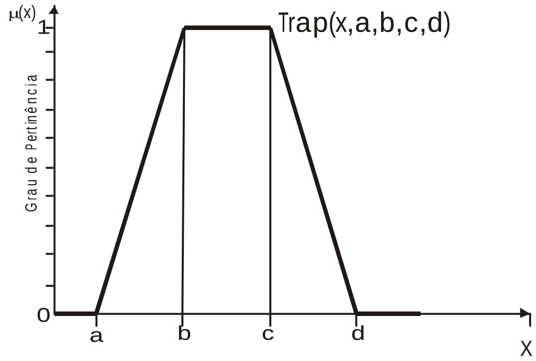


Figura 10 - Função Trapezoidal

2.5.5. Representação Triangular

Também é uma extensão da curva tipo sino, porém é mais simples que a trapézoidal.

$$Tri(x,a,b,c) = \begin{cases} 0, & x \le a \\ 1-(b-x)/(b-a), & a < x \le b \\ (c-x)/(c-b), & b < x \le c \\ 0, & x > c \end{cases}$$ **Equação 15**

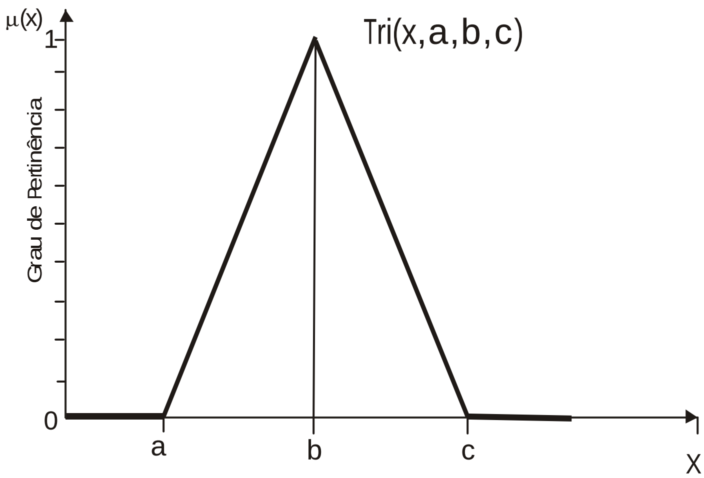


Figura 11 - Função Triangular

Essas são as principais formas para representar conjuntos fuzzy, a seguir será visto como simplificar os conjuntos fuzzy similares durante o processo de aquisição do conhecimento.

2.5.3. Representações em Curvas Tipo Sino

É uma classe importante de representações fuzzy, é baseada na representação das aproximações de um valor central, sendo graficamente visualizada como uma curva do tipo sino. Existem três importantes classes de curvas desse tipo: as curvas ***PI, Beta e Gaussiana***; a diferença está na abertura e nos valores dos pontos terminais. Essas curvas, ou melhor, conjuntos fuzzy, são usados para representar números e espaços fuzzy.

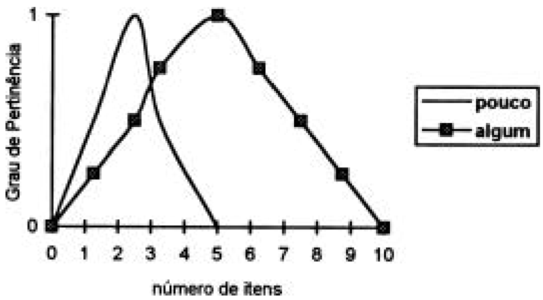


Figura 9 - Funções Tipo Sino

2.5.4. Representação Trapezoidal

Essa representação é uma variação do tipo sino. Esse tipo de representação possui um processamento rápido e possibilita uma descontinuidade no conjunto, pode ser regido pela seguinte fórmula, formada por uma variável independente x, e quatro parâmetros de formato a, b, c, e d:

$$Trap(x,a,b,c,d) = \begin{cases} 0, & x \le a \\ 1-(b-x)/(b-a), & a < x \le b \\ 1, & b < x \le c \\ (d-x)/(d-c), & c < x \le d \\ 0, & x > d \end{cases}$$ **Equação 14**

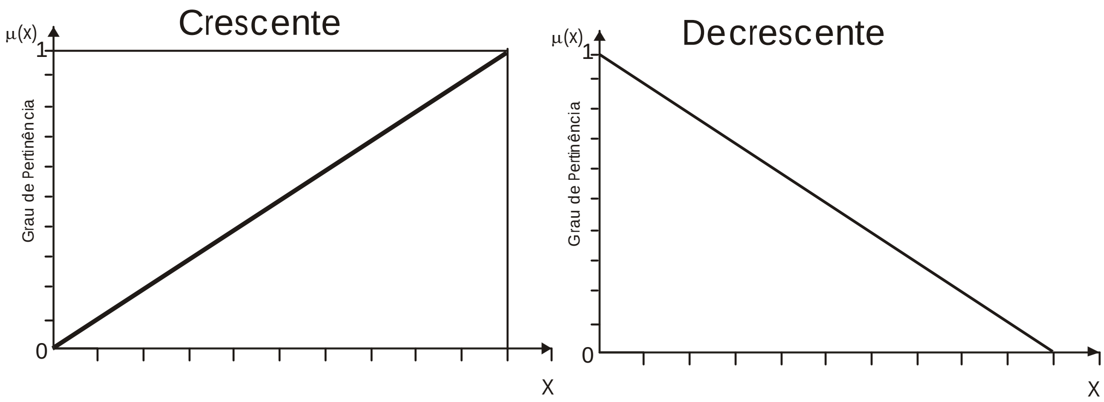


Figura 7 - Funções Lineares

2.5.2. Representação em Curva-S (Sigmóide/Logística)

Correspondem a superfícies não lineares crescentes e decrescentes, também conhecidas como curva-S e curva-Z, respectivamente. Esse tipo de representação é bastante usada para modelar a dinâmica de populações, em que as amostragens de valores individuais aproximam variáveis aleatórias, como por exemplo, a aceleração de um objeto que está caindo, o tempo até a falha de um componente mecânico, altura e peso.

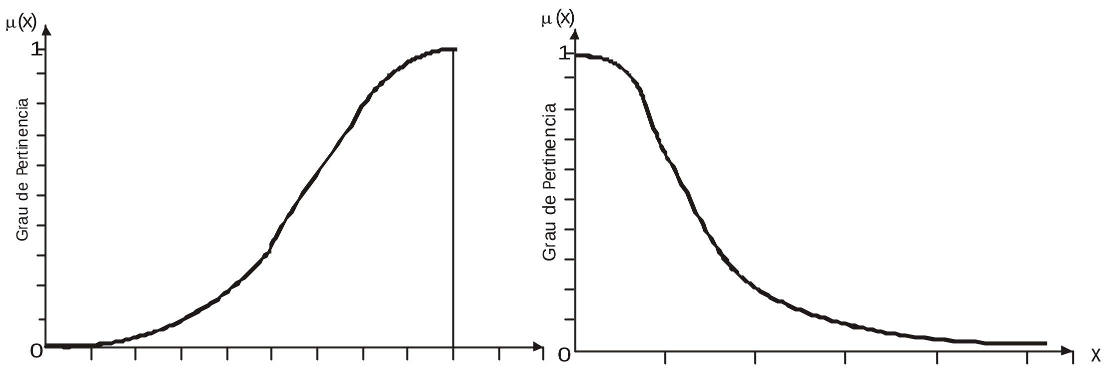


Figura 8 - Funções S e Z respectivamente

A curva-s também é bastante utilizada em representações de freqüência como "usualmente", "a maioria de", "próximo a", "sempre", etc., onde o domínio representa um conjunto fuzzy de proporções. Esse tipo de conjunto fuzzy é muito importante para a modelagem do conhecimento que é *imprecisamente condicional,* que é o tipo de conhecimento que se usa para expressar o pensamento no dia-a-dia; a base do senso comum, da heurística.

2. seu valor de pertinência está acima do limiar alfa; que é zero, caso este não seja especificado.

A pertinência nos extremos do conjunto fuzzy é menos ambígua, pois a nebulosidade associada aos valores extremos é minimizada; tem-se menos dificuldade em afirmar que "x é (ou não é) membro do conjunto A". Por outro lado, para valores que estão em torno do centro da função de pertinência, tem-se uma dificuldade crescente em garantir a compatibilidade do valor (x) com o conceito fuzzy (A) em questão. Essa área é a de máxima nebulosidade, representando justamente a região de maior ambigüidade, o que pode ser constatado quando se faz a interseção com seu complementar; essa área também é denominada de *região de indecidibilidade*. Como mostra a figura 6, os pontos em torno de 0.5 de pertinência, podem pertencer aos dois conjuntos simultaneamente, com graus de pertinência bem próximos, essa característica é um dos pontos importantes na construção da função de pertinência intervalar, que será proposta na seção 2.3 do capítulo 4.

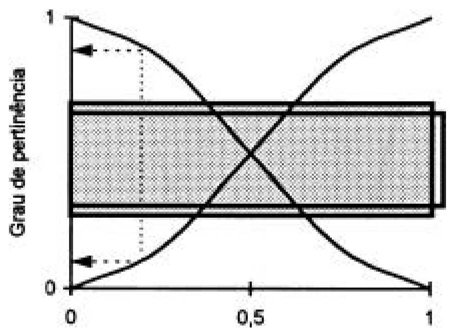


Figura 6 - Pertinência nos extremos [Gottgtroy 1996]

2.5. Tipos de Funções de Pertinência:

Existem vários tipos de curvas para se representar um conjunto fuzzy, o Engenheiro do Conhecimento deve traçar a curva que mais se aproxima do comportamento da variável em questão. Serão mostradas aqui as principais curvas para representar um conjunto fuzzy.

2.5.1. Representação Linear:

É o tipo de representação mais simples e uma boa escolha para aproximar conceitos muito mal compreendidos, que não são números fuzzy, a figura 7 mostra uma representação linear crescente e decrescente respectivamente.

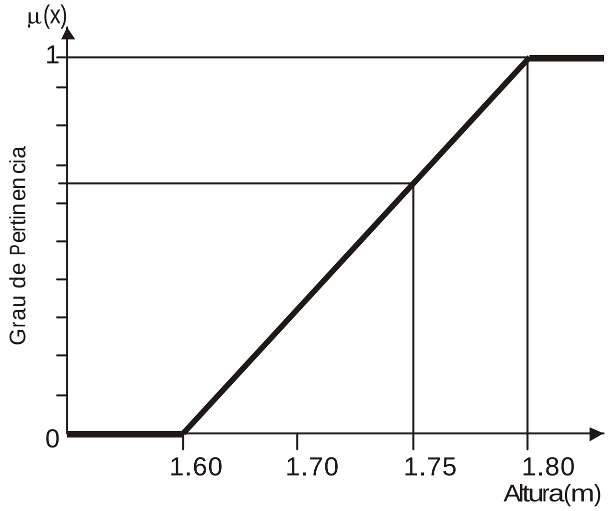


Figura 5 - Conjunto Fuzzy Alto

O Conjunto Fuzzy Alto, figura 5 diz que, abaixo de 1.60 m, inclusive, definitivamente não significa ser alto; acima de 1.80 m, definitivamente significa ser alto e que 1.75 m significa ser moderadamente alto com um grau de pertinência de 0.65, está mais do que menos para alto; observe que esse conjunto está representando o conceito "alto" para a realidade brasileira.

Cabe ao Engenheiro do Conhecimento, pela sua experiência, perceber qual "o desenho" que melhor delineia o conceito em questão. Entretanto, os sistemas fuzzy têm demonstrado ser tolerantes a aproximações na representação dos conceitos [Cox, 1994], isto é, eles demonstram bom desempenho mesmo quando o desenho do conjunto fuzzy não mapeia exatamente o conceito modelado.

2.4.3. Pertinência de um Elemento no Conjunto Fuzzy

Para determinar se um valor pertence ou não a um conjunto fuzzy, é necessário se ter alguma noção de como é construído este conjunto fuzzy, como é o formato da função e os limiares correntes, ou seja, quais os limites estabelecidos pelos valores do conjunto α-cuts, os quais determinam qual o intervalo do domínio, é válido para ser trabalhado no contexto em questão.

Portanto, um elemento é membro de um conjunto fuzzy se:

1. ele está no domínio do conjunto;

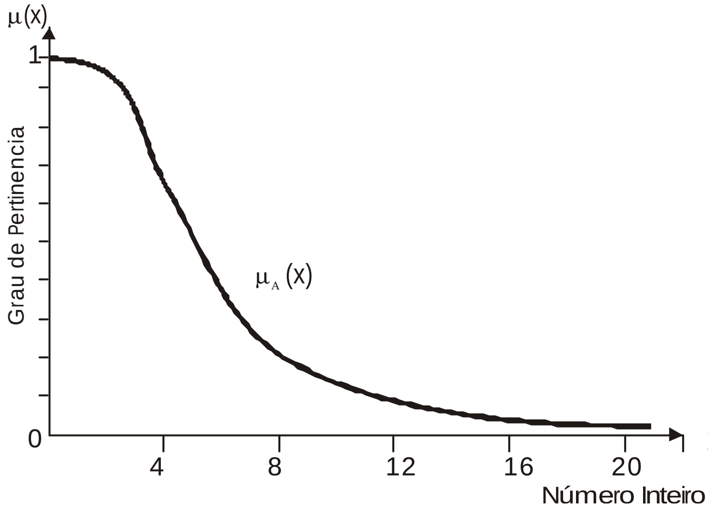


Figura 4 - Conjunto Fuzzy Números Pequenos

Não existe nenhum princípio geral que governe a especificação e atribuição dessas funções a cada caso [Cox 1994], [Giarratano 1995]. Essas funções são conjuntos fuzzy e quase sempre seus valores também representam conjuntos fuzzy, pois, na maioria das vezes, essas funções representam dados lingüísticos, (seção 3.2), que possuem um conteúdo de informações limitado e podem ser interpretados de maneira diferente por pessoas distintas [Gottgtroy 1996].

Em um outro exemplo, encontrado em [Gottgtroy 1996], pode-se especificar um conjunto fuzzy através da explicitação da função de pertinência de alguns elementos do domínio; assim, no universo de "altura", define-se o universo U = (1.60, 1.70, 1.75, 1.80) e pode-se representar o subconjunto fuzzy "alto" por:

"alto" = 0.01/1.60 + 0.3/1.70 + 0.65/1.75 + 1.0/1.80 **Equação 13**

A função de pertinência para o conjunto alto, no caso uma curva linear simples, representando que "ser alto" é diretamente proporcional a um valor, que representa a altura em metros.

Usando a equação 9 o conjunto fuzzy pode ser escrito como (figura 4):

$$A = \int_{x \geq 0} \mu_A(x)/x = \int_{x \geq 0} \left[\frac{1}{1 + \left(\dfrac{x}{5} \right)^3} \right] / x \qquad \textbf{Equação 12}$$

2.4.2. Componentes de um Conjunto Fuzzy

Um conjunto fuzzy consiste basicamente de três componentes:

- um eixo horizontal, de valores crescentes monotonicamente, que constituem o conjunto que representa o domínio;
- um eixo vertical, entre 0 e 1, que indica o grau de pertinência ao conjunto;
- uma função, que estabelece a relação entre os dois eixos.

A figura 4 ilustra um exemplo clássico de conjunto fuzzy que representa a idéia de "número pequeno", mostrado anteriormente, nos números reais. Para esse exemplo os componentes do conjunto fuzzy “número pequeno” são:

- no eixo horizontal: os números reais positivos, num intervalo considerado representativo do contexto do modelo em questão;
- no eixo vertical: o quanto cada número do eixo horizontal reflete "ser pequeno";
- uma função, que estabelece a relação entre os dois eixos, no caso a curva-z, (figura 4) representando "ser pequeno".

Nas equações 8 e 9, os símbolos "Σ" e "∫ " não representam somas algébricas como no cálculo diferencial integral, e sim a união de todos os elementos do conjunto. Em muitos casos, a função de pertinência aparece na forma contínua, existem várias alternativas para representá-las, como mostrado na seção 2.5. [Kandel 1996], [Cox 1994], [Gottgtroy 1996].

2.4. Função de Pertinência

2.4.1. Definição

A função de pertinência é um conceito fundamental da teoria de conjuntos fuzzy. Ela é uma generalização da função característica da programação funcional [Giarratano 1995], que estabelece uma correspondência entre um elemento no domínio e um valor verdade que indica o grau de pertinência do elemento no conjunto. A função verdade pode ser representada pela equação 4 ou pela equação 10 abaixo:

$\mu_A(x) \rightarrow [0,1]$, onde A é subconjunto fuzzy; e $0 \leq \mu_A(x) \leq 1$. **Equação 10**

Esse conceito representa numericamente, o quanto um elemento pertence a um conjunto, é a superfície do conjunto propriamente dito; essa função verdade não é simétrica, embora cada elemento do domínio só tenha um correspondente na função. Cada grau da função verdade pode ser mapeado para mais de um ponto do domínio, como em conjuntos fuzzy convexos que podem ser representados por triângulos, curvas beta, Gaussiana, etc. Veja tipos de função de pertinência na seção 2.5.

Um conjunto fuzzy codifica a imprecisão associada a um fenômeno através de sua superfície; na verdade, o *desenho da curva representa a semântica do conceito em questão* [Gottgtroy 1996].

Considere o conjunto fuzzy números pequenos definido (subjetivamente) sobre o conjunto dos números reais não negativos através de uma função de pertinência μ_A dada por:

$$\mu_A(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{5}\right)^3}$$ **Equação 11**

2.3. Representação de Conjuntos Fuzzy

Existem muitas formas de denotar conjuntos fuzzy. Se U é um universo de discussão e x um elemento de U, então o conjunto fuzzy A definido em U pode ser escrito como uma coleção de pares ordenados:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) / x \in U\}$$ **Equação 6**

onde cada par (x, μ_A(x)), tem o valor x seguindo de seu grau de pertinência em A, μ_A(x). Por exemplo, o conjunto de *números pequenos* A, definido sobre o universo em discussão, os inteiros positivos, pode ser dado pelos pares:

$$A = \{(1, 0.99), (2, 0.94), (3, 0.82), (4, 0.66), (5, 0.5), (6, 0.37), (7, 0.27), (8, 0.2), (9, 0.15), (10, 0.1)\}$$

Pode-se dizer que o elemento 4 pertence ao conjunto fuzzy A, números pequenos, com um grau de pertinência 0.66. Os pares nos quais os graus de pertinência são iguais a zero são omitidos. Um par pode ser escrito também como:

$$\mu_A(x) / x$$ **Equação 7**

ou seja, o grau de pertinência seguido do elemento, separado pelo marcador "/". Outra notação, alternativa, mais freqüentemente usada para universos discretos é a seguinte:

$$A = \sum_{x_i \in U} \mu_A(x_i) / x_i$$ **Equação 8**

Nesta notação, o conjunto de *números pequenos* acima pode ser escrito como [Kandel 1996], [Kasabov 1996], [Tsoukalas 1997]:

A = μ_A(1)/1+μ_A(2)/2+μ_A(3)/3+μ_A(4)/4+μ_A(5)/5+μ_A(6)/6+μ_A(7)/7+μ_A(8)/8+μ_A(9)/9+ μ_A(10)/10

= 0.99/1 + 0.94/2 + 0.82/3 + 0.66/4 + 0.5/5 + 0.37/6 + 0.27/7 + 0.2/8 + 0.15/9 + 0.1/10

Para um universo contínuo de discussão, pode-se escrever a equação 8 como:

$$A = \int_U \mu_A(x) / x$$ **Equação 9**

2.2.6. Conjunto α-cuts

É uma restrição ou limite imposto ao domínio baseado a um valor α, este conjunto contém todos os elementos do domínio que possui valores de pertinência acima de um certo valor α.

Por vezes torna-se necessário estabelecer limites de relevância mínima para os quais um conceito seja válido, valores normalizados que, quando associados a um conjunto fuzzy, modificam a sua pertinência. Qualquer valor abaixo do corte torna-se zero. Os conjuntos α-cuts são úteis para funções com caldas longas, que tendem a possuir valores muito baixos para o μ(x) por um domínio extenso, diminuindo desta forma o ruído dos conjuntos fuzzy.

Mais formalmente, uma vez aplicado um alfa-cut a um conjunto fuzzy A tem-se:

$$A(x)_\alpha = \begin{cases} \mu_A(x), & se \quad \mu_A(x) \geq \alpha \\ 0, & \mu_A(x) < \alpha \end{cases}$$

Equação 5

O Conjunto fuzzy temperatura quente com um α-cuts igual a 0.1 possui um conjunto α-cut de 30ºC a 100ºC, veja figura 3.

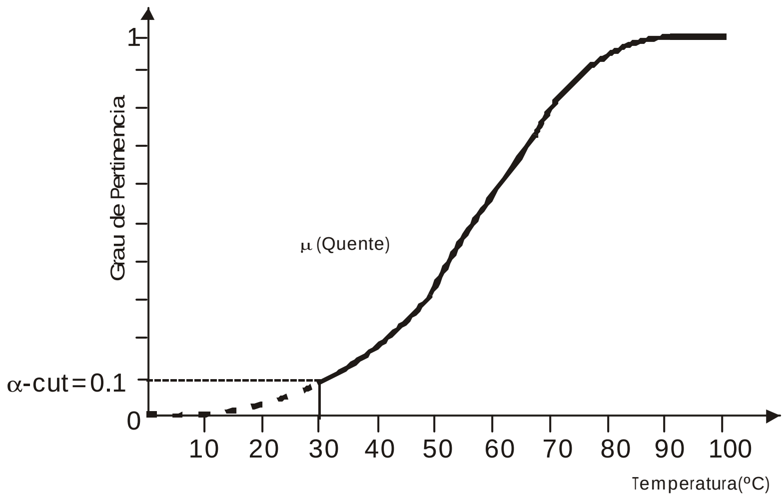


Figura 3 - Exemplo de alfa-cut

quanto a temperatura é considerada relevantemente “quente”. Pode-se ter, por exemplo, as temperaturas 40, 50 e 60, com graus de pertinência 0.2, 0.3 e 0.6 respectivamente.

2.2. Características de Conjuntos Fuzzy

Os conjuntos fuzzy possuem várias características ou propriedades básicas. Aqui serão descritas as mais fundamentais.

2.2.1. Domínio do Conjunto Fuzzy

É o universo total de valores possíveis para os elementos de um conjunto, depende do contexto. No exemplo mostrado na figura 2, o domínio é a temperatura em graus Celsius.

2.2.2. Universo do Discurso

É o espaço fuzzy completo de variação de um modelo de variável. O universo do discurso do modelo da variável temperatura é de 0ºC a 100ºC.

2.2.3. Suporte do Conjunto Fuzzy

É a área efetiva do domínio de um conjunto fuzzy, que corresponde ao intervalo no qual a pertinência $\mu(x)$ seja maior que zero. O suporte para o conjunto fuzzy temperatura da figura 2, é o intervalo entre 10ºC e 100ºC

O conjunto fuzzy cujo suporte é um único ponto em U, com o valor de $\mu(x)= 1$, é chamado ***Conjunto Singleton.***

2.2.4. Altura ou Supremo

É o maior grau de pertinência de um conjunto fuzzy permitido pela função de pertinência. No exemplo da figura 2, valores entre 90ºC e 100ºC fazem parte do supremo do conjunto fuzzy temperatura quente.

2.2.5. Normalização

Um conjunto fuzzy é dito normal quando a sua altura é igual a 1. Para um bom desempenho os conjuntos fuzzy devem ser normalizados, pois a pertinência total do elemento se dá quando seu grau de pertinência é igual a 1.

Esta modelagem tem muitas aplicações e utilidades práticas, contudo para muitos casos, sofre perda e distorção da informação. Neste exemplo específico, pode-se ver que uma temperatura de 50ºC é considerada quente e no entanto, uma temperatura “imediatamente” inferior como 49.9ºC, já é considerada fria.

Conseqüentemente existe uma necessidade de se ter uma outra teoria para representar valores incertos, aproximados ou nebulosos, como “quente”, “pequeno”, ou “alto”, pois elementos com essas características exigem graus de pertinência diferentes de simplesmente os valores (1) quando pertencer totalmente e (0) quando não pertencer.

Na teoria dos conjuntos fuzzy um elemento pode pertencer parcialmente a um dado conjunto. O grau de pertinência é definido através de uma generalização da função característica chamada de *função de pertinência* e definida por:

$$\mu_A(x) : U \to [0,1] \qquad \textbf{Equação 4}$$

onde U é o conjunto universo de discurso e A é um conjunto fuzzy.

Os valores da função de pertinência são números reais no intervalo $[0,1]$, onde 0 significa que o elemento não é membro do conjunto e 1 significa que ele pertence totalmente ao conjunto. Cada valor da função é chamado *grau de pertinência.*

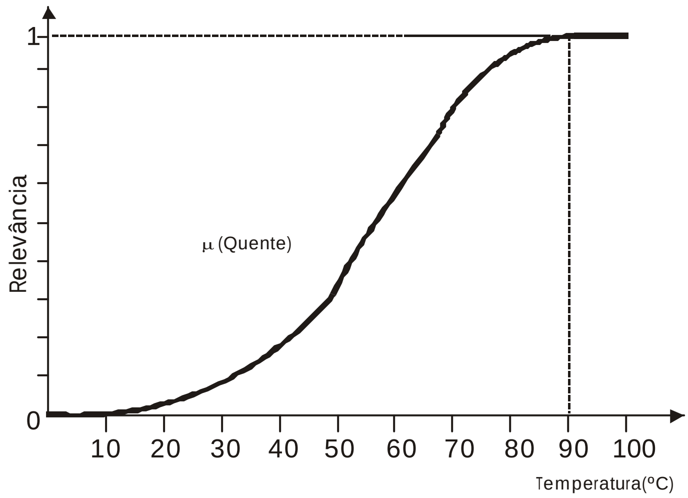


Figura 2 - Conceito Fuzzy "quente"

Tomando como base o exemplo anterior, na figura 2 tem-se uma possível representação do conceito fuzzy *quente.* A função de pertinência μ_{QUENTE} associa o forma tradicional de representar um elemento x de um conjunto A através da função característica é:

$\chi_A(x) = 1$, se x é um elemento do conjunto A, e

$\chi_A(x) = 0$, se x não é um elemento do conjunto A. **Equação 1**

Isto é, um elemento ou pertence ou não pertence a um dado conjunto.

Por exemplo, a seguinte proposição "*a água está quente*", pode ser modelada através de conjuntos clássicos definindo parâmetros, representando a temperatura da água pela variável T, a qual representa o conjunto universo de discurso, ou seja, o conjunto de todos os valores para a temperatura da água. Pode então ser definido o conjunto A como sendo o conjunto de elementos do universo do discurso T tal que a condição "quente" seja verdadeira. Esse conjunto pode ser definido como:

A í T, onde A={x î T / 50 £ x £ 90} **Equação** 2

Ou pode ser representado por uma função característica $\chi_A : T \rightarrow \{0,1\}$, definida por:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & para \quad x \in A \\ 0 & para \quad x \notin A \end{cases}$$ **Equação 3**

A figura 1 representa o conceito "*quente*" de modo clássico, onde caso a temperatura esteja entre 50 e 90 graus, indica 100% de certeza de que a água está quente, caso contrário, não está.

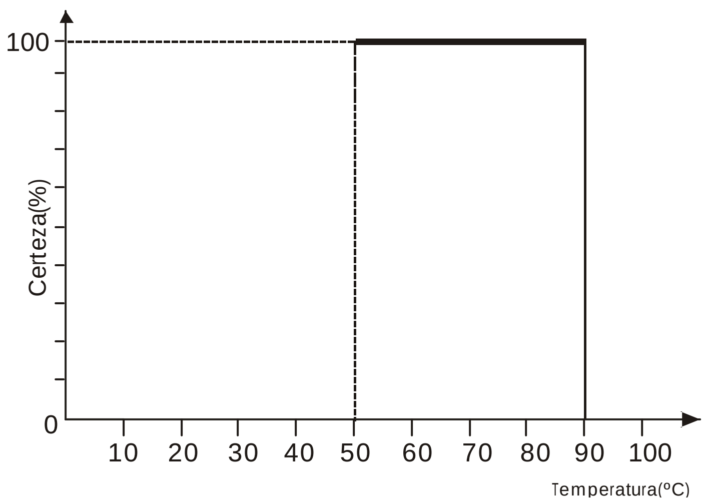


Figura 1 - Conceito Clássico "quente"

CAPÍTULO 2 - TEORIA FUZZY

1. Introdução

Nos últimos trinta anos, os pesquisadores da inteligência computacional vêm trabalhando com a teoria dos conjuntos fuzzy, também chamada de conjuntos nebulosos, introduzido por Lotfi A. Zadeh em 1965, [Cox 1994], [Cox 1995], [Kasabov 1996], [Kandel 1996], [Terano 1992], [Zadeh 1965]. Mas há apenas poucos anos, esses estudos vêm sendo posto na prática, tendo um grande crescimento no número de pesquisas, possibilitando o desenvolvimento de máquinas com controladores fuzzy, desde eletrodomésticos como: aspirador de pó e ar condicionados, robôs autônomos e móveis e até chips fuzzy VLSI [Kosko 1992], [Kasabov 1996], [Tsoukalas 1997], [Watannabe 1992].

Neste capítulo são mostrados os conceitos envolvidos nos conjuntos fuzzy definidos por Zadeh, desde a função de pertinência até a simplificação de conjuntos fuzzy; além da definição de lógica fuzzy com suas variáveis e proposições lingüísticas. Finalmente o raciocínio aproximado é apresentado na seção 4, sendo mostradas as etapas de desenvolvimento de um sistema fuzzy na seção 5 e na seção 6 são discutidas algumas extensões para conjuntos fuzzy.

2. Teoria dos Conjuntos Fuzzy

2.1. Definição de Conjuntos Fuzzy

Na teoria de conjuntos clássicos um elemento pertence ou não pertence a um dado conjunto A. A noção de pertinência é quebrada, isto é, um valor de pertinência (de uma função característica) é 0 ou 1 (dentro do conjunto {0,1}). A

No capítulo 4 é proposta a teoria fuzzy intervalar, baseada na teoria fuzzy e aplicando as definições de intervalos onde são propostos conceitos como: conjunto fuzzy intervalar, função de pertinência intervalar, um método de simplificação de conjuntos fuzzy baseado em intervalos, assim como as operações e propriedades para conjuntos fuzzy intervalar, além do raciocínio aproximado e um framework de sistema fuzzy intervalar.

No capitulo 5, é mostrado um exemplo de um controlador de temperatura de um aquecedor. Foram feitas duas modelagens, a primeira para sistemas fuzzy e a segunda, utilizando a teoria fuzzy intervalar proposta.

No último capítulo são apresentados as conclusões e trabalhos futuros.

Para efeito de esclarecimento, a citação das seções dentro do mesmo capítulo que a mesma se encontra não será mencionado o capítulo, este só será citado quando se referir a outro diferente do corrente.

A teoria fuzzy intervalar, apresentada nesta dissertação, é baseada na teoria fuzzy e utiliza os conceitos da teoria dos intervalos para dar suporte à implementação de sistemas que tratem de erros de aproximação em sistemas de raciocínio aproximado, dentre outras coisas.

4. Objetivo

O principal objetivo deste trabalho é desenvolver uma proposta de integração da matemática intervalar com a teoria fuzzy, definindo a teoria fuzzy intervalar. Para alcançar tal objetivo foram desenvolvidas as seguintes etapas:

- Um estudo detalhado da teoria fuzzy.
- Um estudo da matemática intervalar, destacando os itens necessários ao desenvolvimento do trabalho.
- O estabelecimento do relacionamento entre os operadores e relações da lógica fuzzy e da matemática intervalar.
- A geração de um framework para solução de problemas envolvendo o raciocínio aproximado, com problemas de imprecisão e erros de aproximação.

5. Organização do Texto

Esta dissertação está dividida em 6 capítulos, neste capítulo foi visto uma introdução e o objetivo do trabalho;

No capítulo 2, é mostrada a teoria fuzzy, começando com a explanação dos principais conceitos relacionados a conjuntos fuzzy definidos por Zadeh; além da noção da lógica fuzzy, o raciocínio aproximado e o sistema de inferência fuzzy.

No capítulo 3, é apresentada a teoria intervalar, com a aritmética de Moore, mostrando as operações e propriedades básicas; além do conceito de função intervalar; ordem; máximo e mínimo intervalar; e finalmente o conceito de continuidade, tão importante para o estabelecimento da teoria proposta.

sentenças matemáticas, estatísticas ou heurísticas. Em um sistema especialista convencional as sentenças estabelecem o valor de uma variável, embora se possa ter graus de confiança neste valor. Então dada a sentença:

IF concentração > 0.80 THEN RISCO = “LARGO”

O sistema avalia o predicado (IF), ou seja, a expressão “concentração>0.80”, e determina se o mesmo é verdadeiro ou falso. A expressão pode ter estes dois valores: *verdadeiro* ou *falso*. Se a expressão é verdadeira, a variável solução RISCO é um conjunto para o valor LARGO. E enquanto se possa adicionar um significado dessa certeza nesta sentença, o fato permanece que a variável RISCO é assinalada como um valor absoluto e discreto para a regra.

Isto não acontece em sistemas fuzzy. Em sistemas fuzzy o grau de verdade em um predicado determina o grau de verdade no conseqüente (solução). Esses graus de verdade são determinados através de mapeamento dos valores do predicado para conjuntos fuzzy e combinando esses com operadores fuzzy, tais como AND e OR. Assim a variável solução não tem um simples valor, mas é representado por um conjunto cuja forma é determinada por todas as regras que referenciam a mesma variável solução, (processo de inferência fuzzy). No fim, um valor solução é encontrado pela defuzzificação; o conjunto fuzzy de saída. Como predicado e solução os conjuntos fuzzy podem ter qualquer forma, complexidade, e problemas não-lineares podem ser facilmente modelados [Cox 1995].

No capítulo 2 será abordada a teoria dos conjuntos fuzzy, proposta por Zadeh em 1965, que dá suporte ao desenvolvimento dos sistemas fuzzy.

3. Computação Intervalar

Em sistemas que trabalham com arredondamentos, truncamentos e/ou aproximações de números reais, muitas vezes, geram soluções imprecisas, e para as quais o usuário não sabe o tamanho do erro.

Este problema vem a ser solucionado com a utilização da teoria dos intervalos, posposta por Moore em 1966, que será vista no capítulo 3.

chamado *encadeamento backward*, assume que os conseqüentes são verdadeiros e prova-os depois de confirmar que os antecedentes são verdadeiros [Stefik 1995].

Os sistemas de apoio à tomada de decisão possuem várias ênfases, dentre outras se destacam: Coeficientes de Certeza, Métodos Probabilísticos (modelo de Bayes), Teoria de Dempster-Shafer, Rough Sets e Teoria Fuzzy [Kasabov 1996], [Pedrycz 1996].

2.2. Sistemas Fuzzy

Os sistemas fuzzy ou nebulosos são sistemas de apoio à decisão que mapeiam conhecimento aproximado, impreciso ou incerto. A aquisição deste tipo conhecimento é realizada através do mapeamento dos conceitos envolvidos. Assim conceitos como: alto e baixo, quente e frio, novo e velho, podem ser representados através de conjuntos fuzzy para serem manipulados pelos sistemas fuzzy, como será visto no capítulo 2.

Um sistema fuzzy é executado basicamente por três etapas: a fuzzificação dos conceitos, o processo de inferência fuzzy e por último a defuzzificação dos conceitos [Cox 1994], [Kasabov 1996], [Oliveira 2000a], [Tsoukalas 1997].

A *fuzzificação* de conceitos é o processo de encontrar o grau de pertinência (veja a seção 5.1, capítulo 2) para um valor de entrada que não está representado por um valor fuzzy.

O *processo de inferência* resulta em concluir novos fatos baseados nas regras fuzzy e nas informações de entrada, nos quais são utilizados métodos de inferência fuzzy, estudado em detalhes nas seções 4 e 5 do capítulo 2.

E por último a Defuzzificação dos conceitos, que é o processo inverso da fuzzificação, ou seja, é o processo de calcular o valor numérico de saída para a região fuzzy solução, gerada a partir da inferência fuzzy (veja seção 5.3 do capítulo 2).

2.3. Diferença entre Sistemas Especialistas Convencionais e Sistemas Fuzzy

As regras em um modelo fuzzy são fundamentalmente diferentes das regras em um sistema de apoio à decisão convencional onde "regras" são freqüentemente

Os sistemas fuzzy têm uma comprovada utilização em problemas que envolvam o raciocínio aproximado [Zadeh 1960], [Bojadzieve 1996], [Gottgtroy 1996], [Kandel 1996], [Kasabov 1996], [Nguyen 1999]. No entanto, na busca de melhorar as soluções desses sistemas, atualmente em todo o globo, muitos pesquisadores vêm estudando outras áreas e produzindo trabalhos que associam, por exemplo, a Teoria Fuzzy com a Matemática Intervalar como em [Kearfott 1996b], [Rocha1996], [Scott 1997], [Mukaidono 1999], [Kreinovich 1999], [Kreinovich 2000a], [Silveira 2001a], [Silveira 2001b], [Silveira 2001c], [Silveira 2001h], [Silveira 2002] e muitos outros. Assim, diversos livros textos e monografias sobre conjuntos fuzzy e técnicas fuzzy têm dedicado um capítulo sobre computação intervalar [Bojadziev 1996], [Kearfott 1996b], [Nguyen 1999].

2. Sistemas Baseados em Conhecimento

2.1. Sistemas Especialistas

Os sistemas baseados em conhecimento, ou sistemas especialistas, ou sistemas de apoio à tomada de decisão são sistemas baseados no conhecimento e no processo de raciocínio dos seres humanos num domínio específico, possibilitando o tratamento do conhecimento impreciso [Giarratano 1993], [Gottgtroy 1990], [Kasabov 1996], [Stefik 1995]. Esses sistemas podem ser representados por regras de produção do tipo:

IF antecedente(s) THEN conseqüente(s)

onde o antecedente e o conseqüente são proposições ou cláusulas lógicas [Turner 1984]. Por exemplo: “IF temperatura excede 100°C THEN desligue a energia”. Antecedentes (ou conseqüentes) múltiplos devem ser conectados através de conectivos lógicos “AND” ou “OR”. Por exemplo, IF (temperatura excede 100°C AND nível do óleo está abaixo do mínimo) THEN desligue a energia.”

Para um sistema baseado em regras gerar conclusões a partir das regras armazenadas em sua base de conhecimento, ele pode utilizar dois métodos de inferência. O primeiro chamado de *encadeamento forward*, que prova os conseqüentes a partir dos antecedentes já provados anteriormente, e o segundo

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO

1. Introdução

A busca constante entre os pesquisadores por sistemas computacionais robustos e confiáveis não pára. Ao longo dos anos, os estudiosos vêm propondo metodologias para a obtenção de sistemas que lidem com situações reais de modo semelhante aos seres humanos, mas este é apenas um desejo que vem aos poucos se tornando realidade.

Desde a utilização da tecnologia de Inteligência Artificial durante a segunda guerra mundial, as pesquisas nesta área vêm se tornando cada vez mais importante para a humanidade. Os sistemas especialistas de apoio à decisão [Giarratano 1993], as redes neurais [Kasabov 1996], os algoritmos genéticos [Goldberg 1989], os agentes inteligentes [Gottgtroy 1998], [Oliveira 2000b], [Torres 1998] e a teoria fuzzy são técnicas que se destacam na construção de sistemas "inteligentes".

Na implementação de sistemas que utilizam o raciocínio aproximado, a técnica fuzzy tem sido utilizada com sucesso. No entanto, há situações em que ela não satisfaz totalmente as características do problema. Assim, na tentativa de melhorar os resultados, os pesquisadores têm procurado alternativas. Uma destas alternativas é a utilização da matemática intervalar aliada à teoria fuzzy, com o objetivo de minimizar os erros no mapeamento dos valores fornecidos pelos especialistas. Essa abordagem será denominada neste trabalho, como *Teoria Fuzzy Intervalar*, na qual uma fundamentação a esta teoria é proposta, tomando por base as definições da teoria dos conjuntos fuzzy [Zadeh 1965] e da teoria dos intervalos [Moore 1966].

●	Soma Algébrica com Conjuntos Fuzzy
●	Soma Fechada com Conjuntos Fuzzy
Σ	Somatório
-	Subtração, ou Inverso
/	Tal que, ou Divisão
τ	Termo Fuzzy Verdade
$\cup$	União
S	Valor de Similaridade

$\langle + \rangle$	Operador da Composição Max-Average
⁂	Operador da Composição Max-Produto ou Multiplicação
$*$	Operador da Composição Max-Star
●	Operador de Composição Fuzzy Intervalar Max-Min
AND	Operador de Conjunção Fuzzy
OR	Operador de Disjunção Fuzzy
¢	Operador de Implicação Fuzzy Intervalar
NOT	Operador de Negação Fuzzy
🗀	Operador Máximo
🖫	Operador Mínimo
$\leq_I$	Ordem da Informação
$\leq_S$	Ordem da Teoria dos Conjuntos
$\leq_K$	Ordem de Kulish e Miranker
$\leq_M$	Ordem de Moore
$\leq_R$	Ordem Resultante
$\forall$	Para todo
$\in$	Pertence
π	Pi
$\bullet$	Produto Algébrico com Conjuntos Fuzzy
Q	Quantificador
$\Re$	Relação Fuzzy Intervalar
$\Leftrightarrow$	Se e Somente Se
$+$	Soma

χ	Função Característica
μ	Função de Pertinência Fuzzy
φ	Função de Pertinência Fuzzy Intervalar
φ_i	Função de Limite Inferior
φ_s	Função de Limite Superior
φ_S	Função de Pertinênica Intervalar Simplificada
$=$	Igual a
$\rightarrow$	Implica
$\int$	Integral
$\cap$	Intersecção
$\geq$	Maior ou Igual a
$>$	Maior que
MAX	Máximo Intervalar
max	Máximo Real
S	Medida de Similaridade
$\leq$	Menor ou Igual a
$<$	Menor que
MIN	Mínimo Intervalar
min	Mínimo Real
m	Modificador
$\notin$	Não Pertence
$\circ$	Operador da Composição Fuzzy Max-Min

Lista de Símbolos

Cód	Codomínio da Função
$\neg$	Complemento
I[0, 1]	Conjunto dos Intervalos entre 0 e 1.
IR	Conjunto dos Intervalos Reais
R	Conjunto dos Números Reais, ou Relação Binária
[0, 1]	Conjunto entre 0 e 1.
A_α	Conjunto Fuzzy A Limitado por um α-*cuts*.
Û	Conjunto Fuzzy Intervalar Universo
Ô	Conjunto Fuzzy Intervalar Vazio
Ü	Conjunto Universo Fuzzy
U	Conjunto Universo
$\varnothing$	Conjunto Vazio Fuzzy
ϕ	Conjunto Vazio, ou Operador de Implicação
●	Diferença Fechada com Conjuntos Fuzzy
$\neq$	Diferente de
Dom	Domínio da Função
$\subset$	Está Contido
$\subseteq$	Está Contido ou Igual a
f	Função

Lista de Tabelas

Lista de Figuras

Sumário

Abstract of Disertation presentes as partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Sciences (MSc.).

FUZZY INTERVAL THEORY: A PROPOSAL OF INTEGRATION OF THE INTERVAL MATHEMATICS TO FUZZY THEORY

Maria Mônica Macêdo Torres Silveira

February 2002.

Chairman: Benjamín René Callejas Bedregal. D.Sc.
Program: Master Degree in Systems and Computation/DIMAp/UFRN.
Research Line: Theory and Computational Intelligence.

Key Words: Approximate Reasoning, Fuzzy Theory, Interval Mathematics, Interval Fuzzy Theory.

The development of computer systems is a complex task, when look for to simulate the processes of the day by day. The use of the fuzzy theory in systems that treat of the approximate reasoning has been very frequent in the last years. The interval computation has already been solving problems that involves imprecision in the data used in the system.

This work proposes the use of those two theories in a proposal of uniting them in a fuzzy interval theory, being proposed from a theory of the fuzzy interval sets, as well as a fuzzy interval logic and the use of a system of fuzzy interval inference for solution of problems that involves approximate reasoning with a certain uncertainty degree.

Resumo da Dissertação apresentada como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Ciências (MSc.).

TEORIA FUZZY INTERVALAR: UMA PROPOSTA DE INTEGRAÇÃO DA MATEMÁTICA INTERVALAR À TEORIA FUZZY

Maria Mônica Macêdo Torres Silveira

Fevereiro 2002.

Orientador: Benjamín René Callejas Bedregal. D.Sc.
Programa: Mestrado em Sistemas e Computação/DIMAp/UFRN.
Linha de Pesquisa: Teoria e Inteligência Computacional.

Palavras Chaves: Raciocínio Aproximado, Teoria Fuzzy, Matemática Intervalar, Teoria Fuzzy Intervalar.

O desenvolvimento de sistemas computacionais é uma tarefa complexa, quando se busca simular os processos do dia-a-dia. A utilização da teoria fuzzy em sistemas que tratam do raciocínio aproximado tem sido bastante freqüente nos últimos anos. Já a computação intervalar tem solucionado problemas que envolvem imprecisão nos dados utilizados nos sistema.

Este trabalho propõe a utilização dessas duas teorias numa proposta de uní-las em uma teoria fuzzy intervalar, sendo proposta desde uma teoria dos conjuntos fuzzy intervalar, assim como uma lógica fuzzy intervalar e a utilização de um sistema de inferência fuzzy intervalar para solução de problemas que envolvam raciocínio aproximado com um certo grau de incerteza.

Agradecimentos

A Deus, fonte de toda energia e sabedoria.

Ao Professor Benjamín, pela sua orientação, dedicação e atenção constante durante todo o desenvolvimento deste trabalho, e principalmente por ter acreditado em mim.

A Wagner, meu esposo, pelo AMOR, incentivo, atenção, e paciência nos momentos mais difíceis. E também por toda a sua valiosa colaboração no desenvolvimento desta dissertação.

À professora Marcia Gottgtroy, que mesmo de longe nunca deixou de incentivar e colaborar, além da amiga para todas as horas.

A Toinho, que me guiou inicialmente na busca das referências, e a Édipo pelos livros emprestados.

A meus familiares, que sempre me incentivaram nessa longa jornada.

A Anne, Bartira, Fabíola, Paulo César, Renata, Helena pela amizade e incentivo.

Aos companheiros do LABLIC, e do DIMAp.

À CAPES pelo auxílio financeiro durante o desenvolvimento deste trabalho.

A todos que contribuíram direta ou indiretamente para a realização desta dissertação.

Ao *meu esposo Wagner*.

SILVEIRA, MARIA MÔNICA MACÊDO TORRES

Teoria Fuzzy Intervalar: Uma Proposta de Integração da Matemática Intervalar à Teoria Fuzzy
[Natal – RN] 2002.
(Mestrado em Sistemas e Computação/DIMAp/UFRN, M. Sc., Sistemas e Computação, 2002)
Dissertação – Universidade Federal do Rio Grande do Norte/UFRN, DIMAp
1. Raciocínio Aproximado 2. Teoria Fuzzy Intervalar
3. Teoria Fuzzy 4. Matemática Intervalar
I. DIMAp/UFRN II. Título

TEORIA FUZZY INTERVALAR: UMA PROPOSTA DE INTEGRAÇÃO DA MATEMÁTICA INTERVALAR À TEORIA FUZZY

Maria Mônica Macêdo Torres Silveira

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À BANCA EXAMINADORA DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM SISTEMAS E COMPUTAÇÃO DO DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA E MATEMÁTICA APLICADADA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Aprovado por:

Prof. Benjamín René Callejas Bedregal, D. Sc.
Presidente

Prof. Regivan Hugo Nunes Santiago, D. Sc.

Prof. Antônio Carlos da Rocha Costa, D. Sc.

Prof. Adrião Duarte Dória Neto, D. Sc.

Natal, RN – Brasil.
Fevereiro 2002