Uma Teoria de Conjuntos Fuzzy Intervalar

Maria Mônica Macêdo Torres Silveira, Benjamín René Callejas Bedregal
Laboratório de Lógica e Inteligência Computacional - LABLIC
Departamento de Informática e Matemática Aplicada - DIMAp
Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Campus Universitário – Lagoa Nova – CEP 59.072-970, Natal – RN – Brasil

{mmmt,bedregal}@dimap.ufrn.br

Resumo. *Na construção de sistemas robustos e confiáveis a modelagem fuzzy vem sendo utilizada com maior sucesso a partir dos anos 80. Mas a utilização desta abordagem leva a perceber que ela não cobre todas as situações, no que se refere a soluções com um maior nível de precisão. É necessária a adição de intervalos a conjuntos fuzzy Neste trabalho é feita uma extensão dos conjuntos fuzzy através da utilização de intervalos no seu grau de pertinência, gerando desta forma, uma teoria de conjuntos fuzzy intervalar.*

1. Introdução

Para o mapeamento de problemas que tratam do raciocínio aproximado a modelagem fuzzy vem sendo utilizada, sem nenhuma sombra de dúvida, com sucesso desde os anos 80, a crescente utilização desta abordagem tem proporcionado a observação de suas deficiencias. Uma delas é que, com o mapeamento das informações nebulosas o especialista precisa construir uma função fuzzy atribuindo aos valores do domínio, por exemplo, um número real para seu grau de certeza, algumas vezes é difícil para o especialista determinar se o grau de certeza é 0.5 ou 0.501 por exemplo [Yam 1999]. E outra questão é referente a problemas que exijam uma maior precisão nos dados de saída do sistema.

Para solucionar problemas como esses, este trabalho propõe uma teoria fuzzy intervalar, que une a conjuntos fuzzy a noção de intervalos, para tanto são definidos alguns conceitos como, conjunto fuzzy intervalar, função de pertinência intervalar, além de algumas operações fuzzy intervalares e suas propriedades.

Deste modo, este artigo está dividido da seguinte forma: na próxima seção será introduzida a teoria dos conjuntos fuzzy, abordando sua definição e operações assim como suas propriedades. Na seção 3, são mostradas as principais definições para a aritmética intervalar que serão utilizadas neste trabalho. Para ser feita a união destas duas áreas de pesquisa na seção 4, onde é adaptada a teoria fuzzy com a utilização de intervalos.

2. Teoria dos Conjuntos Fuzzy

Na teoria de conjuntos clássica um elemento pertence ou não pertence a um dado conjunto A. A noção de pertinência é quebrada, isto é, um valor de pertinência (de uma função característica) é 0 ou 1 (dentro do conjunto {0,1}). A forma tradicional de representar um elemento x de um conjunto A através da função característica é:

$\mu_A(x)=1$, se x é um elemento do conjunto A, e

$\mu_A(x)=0$, se x não é um elemento do conjunto A.

Isto é, um elemento ou pertence ou não pertence a um dado conjunto.

Existe uma necessidade de se ter uma outra teoria para representar valores incertos, aproximados ou nebulosos, como "pequeno", "quente" e "alto", pois elementos com essa classificação exigem graus de pertinência diferentes de simplesmente os valores (1) quando pertencem totalmente e (0) quando não pertencem.

Na teoria dos conjuntos fuzzy um elemento pode pertencer parcialmente a um dado conjunto. O grau de pertinência é definido através de uma generalização da função característica chamada de *função de pertinência*:

$\mu_A: U \rightarrow [0,1]$

onde U é o conjunto Universo.

Os valores da função de pertinência são números reais no intervalo [0,1], onde 0 significa que o elemento não é membro do conjunto e 1 significa que ele pertence totalmente ao conjunto. Cada valor da função é chamado *grau de pertinência.*

Existem duas formas de denotar conjuntos fuzzy. Se U é um universo de discussão e x é um elemento de U, então um conjunto fuzzy A definido em U pode ser escrito como uma coleção de pares ordenados:

$A=\{(x, \mu_A(x)) / x \in U\}$

onde cada par $(x, \mu_A(x))$, tem o elemento x seguido de seu valor de pertinência em A, $\mu_A(x)$.

Um par pode ser escrito também como $\mu_A(x)/x$, ou seja, o grau de pertinência seguido do elemento, separado pelo marcador "/". Os pares nos quais os graus de pertinência são iguais a zero são omitidos. Uma notação alternativa mais freqüentemente usada que a notação anterior num universo discreto é a seguinte:

$$A = \sum_{x_i \in U} \mu_A(x_i) / x_i$$

Para um universo contínuo de discussão, pode-se escrever a equação

$$A = \int_{x_i \in U} \mu_A(x_i) / x_i$$

Note que em ambas notações os símbolos "$\sum$" e "$\int$ " não representam somas algébricas como em cálculo e sim a união de todos os elementos do conjunto. Em muitos casos, a função de pertinência aparece na forma contínua, existem várias alternativas para representá-las: Triangular, Trapezoidal, Gaussiana, Bell, e Sigmoidal. [Kandel 1996, Cox 1994, Gottgtroy 1996].

2.1. Operações com Conjuntos Fuzzy

Na teoria dos conjuntos clássica, uma operação é uma relação entre conjuntos que produz outro conjunto [Kandel 1996]. As operações entre conjuntos são de extrema importância para os sistemas baseados em conhecimento porque o processo de inferência é baseado no processamento dos conectivos lógicos do cálculo proposicional (AND, OR).

As operações com conjuntos fuzzy (A e B) são definidas através da operação de suas funções de pertinência ($\mu_A(x)$ e $\mu_B(x)$) [Bojadziev 1996]. Elas não particionam o conjunto mas determinam a compatibilidade entre cada conjunto fuzzy e seu valor no domínio [Cox 1994, Gottgtroy 1996].

2.1.1. Operações Básicas de Zadeh com Conjuntos Fuzzy

As operações básicas para conjuntos fuzzy foram originalmente definidas por Zadeh [Zadeh 1965, Terano 1992, Bojadiziev 1996, Kasabov 1996, Tsouklas 1997]:

Sejam A e B conjuntos fuzzy no universo U,

$A = \{(x, \mu_A(x)) / \ x \in U\}$, onde $\mu_A(x) \in [0,1]$ e $B = \{(x, \mu_B(x)) / x \in U\}$, onde $\mu_B(x) \in [0,1]$

2.1.1.1. Igualdade

$A = B \leftrightarrow (\mu_A(x) = \mu_B(x)), \forall x \in U$

2.1.1.2. Inclusão

$A \subseteq B \leftrightarrow (\mu_A(x) \leq \mu_B(x)), \forall x \in U$

Então A é dito subconjunto fuzzy de B.

2.1.1.3. União:

$A \cup B = \{(x, \max(\mu_A(x); \mu_B(x))) / x \in U\}$

A união entre dois conjuntos fuzzy A e B é mostrada na figura 1(a).

2.1.1.4. Intersecção:

$A \cap B = \{(x, \min(\mu_A(x); \mu_B(x))) / x \in U\}$

A interseção de dois conjuntos fuzzy A e B está ilustrada na figura 1(b).

2.1.1.5. Complemento:

$\neg A = \{(x, \mu_{\neg A}(x)) / x \in U \text{ e } \mu_{\neg A}(x) = 1 - \mu_A(x)\}$

A figura 1(c) mostra o complemento de conjunto fuzzy A.

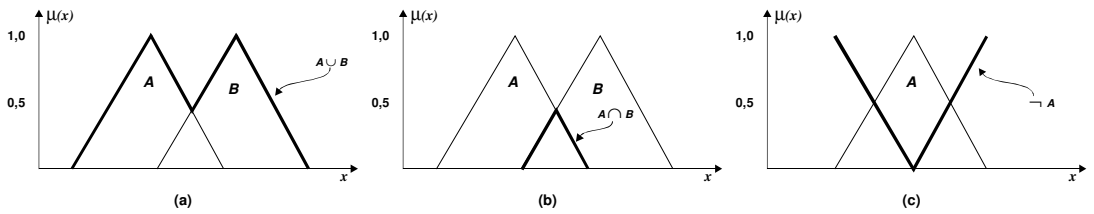

Figura 1. Funções de Pertinências (a) união (b) intersecção (c) complemento.

2.1.1.6. Diferença

$A - B = \{(x, \min(\mu_A(x); \mu_{\neg B}(x))) / x \in U\}$ ou equivalentemente,

$A - B = \{(x, \min(\mu_{A \cap \neg B}(x)) / x \in U\}$

2.1.2. Propriedades de Conjuntos Fuzzy

Considere A, B e C conjuntos fuzzy, as seguintes propriedades para união, interseção e complemento são válidas.

2.1.2.1. Idempotência

$A \cup A = A$

$A \cap A = A$

2.1.2.2. Identidade

Sejam os conjuntos fuzzy $\hat{U} = \{(x, 1) / x \in U\}$ e $\emptyset = \{(x, 0) / x \in U\}$.

$A \cap \hat{U} = A$

$A \cup \emptyset = A$

$A \cap \emptyset = \emptyset$

$A \cup \hat{U} = \hat{U}$

2.1.2.3. Comutativa

$A \cap B = B \cap A$

$A \cup B = B \cup A$

2.1.2.4. Associativa

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

2.1.2.5. Distributividade

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

2.1.2.6. Complemento Duplo

$\neg(\neg A) = A$

2.1.2.7. Leis de De Morgan

$\neg(A \cap B) = \neg A \cup \neg B$

$\neg(A \cup B) = \neg A \cap \neg B$

2.1.2.8. Leis da Exclusão Mútua e da Contradição

Apenas as propriedades da exclusão mútua e contradição `de Aristóteles não são válidas para conjunto fuzzy.

$A \cap \neg A \neq \emptyset$

$A \cup \neg A \neq \hat{U}$

Perceba que a união de um conjunto fuzzy A com seu complemento ¬A não é necessariamente o conjunto universo fuzzy definido como $\hat{U} = \{(x,1) / x \in U\}$, e a interseção entre os dois não é necessariamente igual ao conjunto vazio, $\emptyset = \{(x, 0) / x \in U\}$ como ilustrado na figura 2.

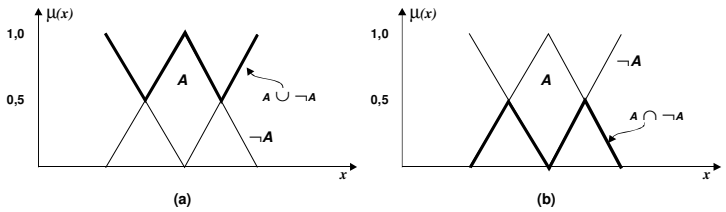

Figura 2. A lei da exclusão mútua não são válidas para conjuntos fuzzy.

(a) A ∪ ¬A (b) A ∩ ¬A

2.1.3. Operações Algébricas com Conjuntos Fuzzy

Foram definidas as operações de soma (⊞) e multiplicação (.) algébrica para conjuntos fuzzy. Considere A e B conjuntos fuzzy no universo U,

$A = \{(x, \mu_A(x)) / x \in U\}$, onde $\mu_A(x) \in [0,1]$

$B = \{(x, \mu_B(x)) / x \in U\}$, onde $\mu_B(x) \in [0,1]$

2.1.3.1. Soma Algébrica

$A \boxplus B = \{(x, ((\mu_A(x) + \mu_B(x)) - (\mu_A(x)\mu_B(x))) / x \in U\}$

2.1.3.2. Produto Algébrico

$A \,.\, B = \{(x, (\mu_A(x)\mu_B(x))) / x \in U\}$

2.1.4. Propriedades dos Operadores Algébricos

As propriedades definidas para soma e multiplicação algébricas também são válidas para conjuntos fuzzy. Assim, as seguintes propriedades, considerando A, B e C conjuntos fuzzy, são válidas:

2.1.4.1. Identidade

$A \,.\, \hat{U} = A$

$A \boxplus \phi = A$

$A \,.\, \phi = \phi$

$A \boxplus \hat{U} = \hat{U}$

2.1.4.2. Comutativa

$A \,.\, B = B \,.\, A$

$A \boxplus B = B \boxplus A$

2.1.4.3. Associativa

$(A \,.\, B) \,.\, C = A \,.\, (B \,.\, C)$

$(A \boxplus B) \boxplus C = A \boxplus (B \boxplus C)$

2.1.4.4. Leis de De Morgan

$\neg(A \,.\, B) = \neg A \boxplus \neg B$

$\neg(A \boxplus B) = \neg A \,.\, \neg B$

É possível se ter propriedades envolvendo as operações de conjunto com as operações algébricas, por exemplo a propriedade distributiva:

$A \,.\, (B \cap C) = (A \,.\, B) \cap (A \,.\, C)$

$A \cdot (B \cup C) = (A \cdot B) \cup (A \cdot C)$

$A \boxplus (B \cap C) = (A \boxplus B) \cap (A \boxplus C)$

$A \boxplus (B \cup C) = (A \boxplus B) \cup (A \boxplus C)$

2.1.5. Operações Compensátórias com Conjuntos Fuzzy

Com o uso dos modelos fuzzy, sentiu-se a necessidade de operadores alternativos aos definidas por Zadeh, esses operadores são chamados de operadores compensátorios.

Muitas outras operações para conjuntos fuzzy já foram definidas, mas serão mostradas apenas as mais importantes: [Terano 1992, Cox1994, Bojadziev 1996, Kasabov1996, Tsoukalas1997]

2.1.5.1. Soma Fechada

$A \oplus B = \{(x, (\min (\mu_A(x) + \mu_B(x), 1)))\}$

2.1.5.2. Diferença Fechada

$A \ominus B = \{x,(\max (\mu_A(x) - \mu_B(x), 0)))\}$

3. Teoria Intervalar

3.1. Introdução

A qualidade do resultado na computação científica depende do conhecimento e controle dos erros na computação dos dados numéricos. Para resolver essa questão surgiu a matemática intervalar baseada na aritmética de Moore [Moore 1966].

Existem três tipos de fontes de erros em computação numérica clássica (a qual representa números reais como pontos flutuantes): a propagação do erro nos dados iniciais, os arredondamentos e o erro de truncamento. A matemática intervalar busca resolver esse problema que se concentra fundamentalmente em dois aspectos:

1. Na criação de um modelo computacional que exprima o controle e a análise dos erros que ocorrem no processo computacional;
2. Na escolha de técnicas de programação adequadas para desenvolvimento de softwares científicos buscando minimizar os erros nos resultados.

3.2. Aritmética Intervalar

A aritmética intervalar é uma aritmética bem elaborada matematicamente, onde são definidas as principais operações aritméticas para intervalos, baseadas nas respectivas operações aritméticas reais sobre os extremos dos intervalos.

3.2.1. Intervalo de Reais

Seja R o conjunto dos números reais, e sejam $a, b \in R$, tais que $a \leq b$. Então o conjunto $\{ x \in R / a \leq x \leq b\}$ é um intervalo de números reais ou simplesmente um intervalo, que será denotado por [a,b].

O conjunto de todos os intervalos é definido como sendo:

$IR = \{[a,b] / a,b \in R \text{ e } a \leq b\}$

Os elementos do conjunto dos intervalos reais serão denotados por letras latinas maiúsculas, tais como X, Y, Z,...

Exemplo: [2, 3], [5, 5], [-7, -3] e [-6, 4] são exemplos de alguns intervalos. Observe que os intervalos da forma [a, a] representam números reais, como o intervalo [5, 5] que representa o número real 5, pois o único elemento do Intervalo [5, 5] é o número real 5. Esses intervalos são chamados intervalos degenerados.

Perceba que a idéia por traz de intervalos é que eles são representações (aproximações) de números reais.

3.2.2. Igualdade

Sejam X =[a, b] e Y = [c, d] dois intervalos de IR. Então X = Y se, e somente se, a = c e b = d.

Assim como a igualdade, as operações aritméticas intervalares podem ser definidas através das respectivas operações no conjunto da reta real. Essas operações são mostradas a seguir.

3.3. Operações Aritméticas Intervalares

Sejam X = [a, b] e Y = [c, d]. As operações aritméticas com intervalos são definidas sobre os extremos de seus intervalos, como é mostrado a seguir [Moore 1966], [Oliveira 1997].

3.3.1. Soma:

X + Y = [a, b] + [c, d] = [a + c, b + d]

3.3.2. Pseudo Inverso Aditivo

- X = [-b, -a]

3.3.3. Subtração:

X – Y = X + (-Y) = [a, b] + [-d, -c] = [a - d, b - c]

3.3.4. Multiplicação:

X . Y = [a, b] . [c, d] = [min{ac, bc, ad, bd}, max{ac, ad, bc, bd}]

3.3.5. Pseudo Inverso Multiplicativo

Se $0 \notin X$, isto é ou $0 < a$ ou $b < 0$, então: $X^{-1} = 1/X = [1/b, 1/a]$

3.3.6. Divisão:

X / Y = X . 1/Y = [a, b] . [1/d, 1/c] = [min{a/d, b/d, a/c, b/c}, max{ a/d, b/d, a/c, b/c }], se $0 \notin$ [c, d]

Pode-se encontrar a prova e exemplos dessas operações em [Oliveira 1997]. Assim como as operações muitas propriedades também são definidas para intervalos.

3.4. Ordem

Existem várias ordens que podem ser definidas para intervalos, como por exemplo, a ordem de Moore [Moore 1966], a ordem da teoria dos conjuntos, a ordem da informação [Acióly 1991] e a ordem de Kulish-Miranker [Kulish 1981]. Neste trabalho levará em consideração apenas a última.

3.4.1. Ordem de Kulish-Miranker

$[a, b] \sqsubseteq [c, d]$, se e somente se, $a \leq b$ e $b \leq d$.

3.5. Mínimos e Máximos Intervalares

3.5.1. Mínimo

MIN([a, b]; [c,d]) = [min(a,c), min(b,d)]

3.5.2. Máximo

MAX([a, b]; [c, d]) = [max(a,c), max(b,d)]

3.6. Função Intervalar

Seja f: X → Y uma função.

Se X = Dom(f) $\subseteq$ IR e Y = Cod(f) $\subseteq$ IR, X → f(X), então f é dita uma função intervalar de uma variável intervalar.

Exemplo: f : IR → IR definida por: X → f (X) = [2, 3].X + [4, 5] é uma função intervalar

3.7. Continuidade

A noção de continuidade é uma noção advinda de espaços topológicos. O conjunto dos números reais, R, assim como RXR, têm uma topologia bem aceita no mundo matemático, e portanto uma noção de continuidade. Essa noção de continuidade coincide com a visão geométrica de continuidade de funções no plano cartesiano. Como IR pode ser encarado como um subconjunto de RXR, é razoável esperar que uma função intervalar seja contínua se, e somente se, ela for contínua na subtopologia de RXR induzida por IR. Um resultado clássico é que uma

função f:R → RXR é contínua se existem duas funções f_1:R → R e f_2:R → R contínuas [Dugundji 1966]. Uma extensão natural desse resultado para IR é o seguinte:

Teorema 1: Seja f:R → IR. f é contínua se, e somente se, existem funções contínuas f_i: R → R e f_s: R → R tais que, $\forall x \in R$, $f(x)=[f_i(x), f_s(x)]$. Portanto $f_i(x) \leq f_s(x)$ para cada $x \in R$.

4. Teoria Fuzzy intervalar

Alguns pesquisadores vêm trabalhando com a noção de "Interval Valued Fuzzy Sets (IVFS)", como Turksen que propõe essa teoria inicialmente em 1986 [Turksen 1986]; Rocha em [Rocha 1996] que baseado em Turksen propõe os "Evidence Sets"; em [Kreinovich 1999, 2000] é mostrado a noção de intervalos como pares de valores fuzzy; em [Silveira 2001a, 2001b, 2001c] é mostrada a presente abordagem, dentre outros.

4.1. Função de Pertinência Intervalar

A construção da função de pertinência intervalar é feita utilizando intervalos na função de pertinência fuzzy, assim, em vez de tratar o valor de pertinência como um número real em sua imagem, a função de pertinência definida para o conjunto fuzzy intervalar trabalhará com um intervalo de números reais no intervalo [0, 1] ou seja um subintervalo do intervalo [0, 1] em sua imagem. Dessa forma, um conjunto fuzzy intervalar é da forma $A = \{(x,\varphi_A(x)) / x \in U\}$, e $\varphi_A(x) \in I[0,1]$, com $I[0, 1] = \{[a, b] \in IR / 0 \leq a \leq b \leq 1\}$. φ_A é o grau de pertinência para o conjunto fuzzy intervalar A.

A função de pertinência intervalar é definida em:

φ_A: U →I [0,1]

onde U é o conjunto universo, que neste trabalho será o conjunto dos números reais, pois na maioria dos casos práticos é trabalhado com o universo numérico.

O grau de pertinência intervalar para um conjunto fuzzy intervalar A, é dado por $\varphi_A(x)$, obedecendo ao teorema 1, isto é, existem funções φ_{Ai}, φ_{As} : R → [0, 1] contínuas, tais que $\forall x \in R$, $\varphi_A(x) = [\varphi_{Ai}(x), \varphi_{As}(x)]$, portanto $\varphi_{Ai}(x) \leq \varphi_{As}(x)$, onde φ_{Ai} é chamada de função de limite inferior e φ_{As} de função de limite superior.

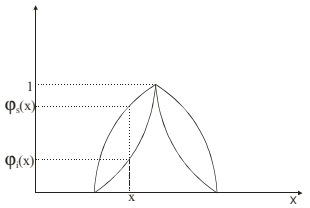

Figura 3. Conjunto Fuzzy Intervalar

A função de pertinência intervalar φ é dada pela justaposição das funções de limite inferior φ_{Ai} e superior φ_{As}. Na figura 3 está representado um conjunto fuzzy intervalar A qualquer. O grau de pertinência intervalar $\varphi_A(x) = [\varphi_{Ai}(x), \varphi_{As}(x)]$. É importante salientar que, nem sempre as funções limitantes (φ_{Ai} e φ_{As}) possuem o comportamente uniforme como o da figura 3.

4.2. Operações com Conjuntos Fuzzy Intervalar

Assim como os conjuntos fuzzy, os conjuntos fuzzy intervalar tembém possuem operações e propriedades. Estas operações são extensões das operações para conjuntos fuzzy adicionando-as as definições de intervalos. Neste trabalho mostrarem a extenção das operações e propriedades básicas definidas por Zadeh, a partir destas é fácil ver que é possíveis extender todas as operações.

4.2.1. Operações Básicas com Conjuntos Fuzzy Intervalar

As operações básicas para conjuntos fuzzy intervalar são derivadas das operações básicas definidas por Zadeh [Zadeh 1965]. Sejam A e B conjuntos fuzzy intervalar no universo U,

$A = \{(x, \varphi_A(x)) / x \in U\}$, $\varphi_A(x) \in I[0,1]$ e $B = \{(x, \varphi_B(x)) / x \in U\}$, $\varphi_B(x) \in I[0,1]$

Considere que $\varphi_A(x) = [\varphi_{Ai}(x), \varphi_{As}(x)]$ e $\varphi_B(x)=[\varphi_{Bi}(x), \varphi_{Bs}(x)]$, $\forall x \in U$. Onde o índice i significa limite inferior do intervalo, e o índice s o limite superior do intervalo

4.2.1.1. Igualdade

$A = B \leftrightarrow (\varphi_A(x) = \varphi_B(x))$, $\forall x \in U$

Ou seja, o conjunto fuzzy intervalar A é igual ao conjunto fuzzy intervalar B, se e somente se, $\varphi_{Ai}(x)=\varphi_{Bi}(x)$ e $\varphi_{As}(x)=\varphi_{Bs}(x)$, para todo elemento pertencente ao universo.

4.2.1.2. Inclusão

$A \subseteq B \leftrightarrow (\varphi_A(x) \sqsubseteq \varphi_B(x)), \forall x \in U$

Ou seja, o conjunto fuzzy intervalar A está contido no conjunto fuzzy intervalar B, se e somente se $[\varphi_{Ai}(x), \varphi_{As}(x)] \sqsubseteq [\varphi_{Bi}(x), \varphi_{Bs}(x)]$, ou melhor se $\varphi_{Ai}(x) \leq \varphi_{Bi}(x)$ e $\varphi_{As}(x) \leq \varphi_{Bs}(x)$ para todo elemento do universo.

Então A é dito subconjunto fuzzy intervalar de B.

4.2.1.3. União:

$A \cup B = \{(x, MAX(\varphi_A(x),\varphi_B(x))) / x \in U\} = \{(x, [\max(\varphi_{Ai}(x), \varphi_{Bi}(x)), \max(\varphi_{As}(x), \varphi_{Bs}(x))])\}$

4.2.1.4. Intersecção:

$A \cap B = \{(x, MIN(\varphi_A(x),\varphi_B(x))) / x \in U\} = \{(x, [\min(\varphi_{Ai}(x), \varphi_{Bi}(x)), \min(\varphi_{As}(x), \varphi_{Bs}(x))])\}$

4.2.1.5. Complemento:

não $A = \neg A = \{(x, 1 - \varphi_A(x)) / x \in U\} = \{(x, [1-\varphi_{As}(x), 1-\varphi_{Ai}(x)]) / x \in U\}$

Os operadores MAX e MIN são operadores intervalares enquanto que max e min são operadores convencionais. A figura 4 (a) e (b) ilustra a união, intersecção de dois conjuntos fuzzy intervalar A e B respectivamente, E em 4(c) o complemento do conjunto fuzzy intervalar A.

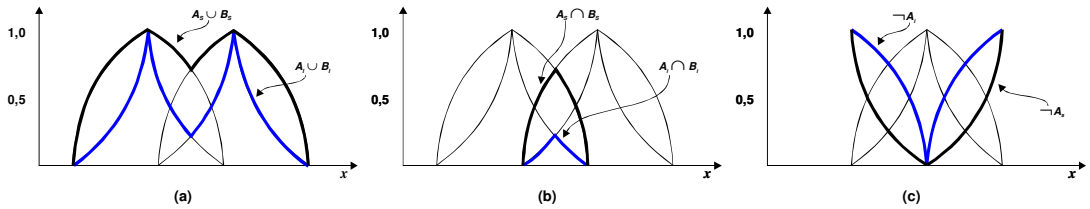

Figura 4. Funções de pertinências fuzzy intervalar (a) união (b) intersecção (c) complemento.

4.2.1.6. Diferença

$A - B = \{(x, MIN(\varphi_A(x); \varphi\neg_B(x))) / x \in U\}$

$= \{(x, MIN([\varphi_{Ai}(x), \varphi_{As}(x)]; 1 - [\varphi_{Bi}(x), \varphi_{Bs}(x)])) / x \in U\}$

$= \{(x, [\min(\varphi_{Ai}(x),1-\varphi_{Bs}(x)); \min(\varphi_{As}(x), 1-\varphi_{Bi}(x))]) / x \in U\}$

4.2.2. Propriedades de Conjuntos Fuzzy Intervalar

Considere A, B e C conjuntos fuzzy intervalar, as seguintes propriedades para união, interseção e complemento são válidas.

4.2.2.1. Idempotência

$A \cup A = A$

$A \cap A = A$

4.2.2.2. Identidade

Sejam os conjuntos fuzzy intervalares $\hat{U} = \{(x, [1,1]) / x \in U\}$ e $\emptyset=\{(x, [0,0]) / x \in U\}$.

$A \cap \hat{U} = A$

$A \cup \emptyset = A$

$A \cap \emptyset = \emptyset$

$A \cup \hat{U} = \hat{U}$

4.2.2.3. Comutativa

$A \cap B = B \cap A$

$A \cup B = B \cup A$

4.2.2.4. Associativa

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

4.2.2.5. Distributividade

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

4.2.2.6. Complemento Duplo

$\neg(\neg A) = A$

4.2.2.7. Leis de De Morgan

$\neg(A \cap B) = \neg A \cup \neg B$

$\neg(A \cup B) = \neg A \cap \neg B$

4.2.2.8. Leis da Exclusão Mútua e da Contradição

Analogamente a conjuntos fuzzy, apenas as propriedades da exclusão mútua e contradição de Aristóteles não são válidas para conjuntos fuzzy intervalar.

$A \cap \neg A \neq \emptyset$

$A \cup \neg A \neq \hat{U}$

Perceba que a união de um conjunto fuzzy intervalar A com seu complemento ¬A não é necessariamente o conjunto universo $\hat{U}$ e a interseção entre os dois não é necessariamente igual ao conjunto vazio, como ilustrado na figura 5.

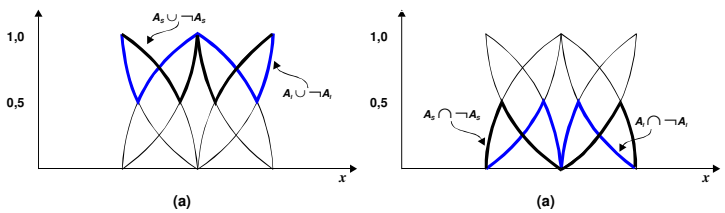

Figura 5. A lei da exclusão mútua não é válida para conjuntos fuzzy intervalar.

(a) $A \cup \neg A$ (b) $A \cap \neg A$.

5. Conclusões

A extensão de conjunto fuzzy para conjuntos fuzzy intervalar é feita naturalmente, pois na verdade tem-se duas funções, as funções de limite superior e inferior, que são trabalhadas separadamente conforme garante o teorema 1, portanto consegue-se obter todas as operações fuzzy intervalar e suas respectivas propriedades.

O principal objetivo do uso da função de pertinência intervalar é facilitar a aquisição de conhecimento, ou seja, em vez do especialista se preocupar com um valor a fornecer ele pode incluir esse valor dentro de um intervalo, tornando mais fácil o mapeamento do conhecimento através de intervalos.

Essa teoria não está ainda totalmente sedimentada, muitas propostas estão sendo desenvolvidas neste sentido.

A facilidade de gerar funções de pertinência para o especialista também propociona o desenvolvimento do raciocínio aproximado, com mecanismo de inferência e de defuzzificação fuzzy intervalar [Silveira 2001b].

6. Bibliografia

[Acióly 1991] Acióly, B. M. (1991). *Fundamentação Computacional da Matemática Intervalar*. D. Sc. diss., Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil.

[Bojadziev 1996] Bojadziev, G. & Bojadziev, M. (1996). *Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, Applications*. World Scientific Publishing.

[Cox 1994] Cox, E. (1994). The Fuzzy Systems Handbook: the practitioner's guide to building, using, and maintaining fuzzy systems. Academic Press Professional Inc.

[Dugundji 1966] Dugundji, J. (1966) Topology. Allyn and Bacon, New York.

[Gottgtroy 1996] Gottgtroy, M. P. B. (1996). *Aplicação de Técnicas de Engenharia do Conhecimento na Análise do Risco em Sistemas Estruturais.* D. Sc. diss. COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil.

[Kandel 1996] Kandel, A., Pacheco, R., Martins, A. e Khator, S. (1996). The Foundations of Rule-Based Computations In Fuzzy Models. Em: *Fuzzy Modelling Paradigms and Practice*, Pedrycz, W Ed.

[Kasabov 1996] Kasabov, N. K. (1996). *Foundations of Neural Networks, Fuzzy Systems, and Knowledge Engineering.* Ed. The MIT Press, Massachusetts Institute of Technology.

[Kreinovich 1999] Kreinovich, V., Mukaidono, M. and Atanassov, K.(1999) *From Fuzzy Values to Intuitionistic Fuzzy Values to Intuitionistic Fuzzy Intervals etc.: Can We Get an Arbitrary Ordering?* Published in Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets, Vol. 5, No. 3, pp. 11-18.

[Kreinovich 2000] Kreinovich, V., Mukaidono, M. (2000) *Intervals (Pairs of Fuzzy Values), Triples, etc.: Can We Thus Get an Arbitrary Ordering?* In: Proceedings of the 9th IEEE International Conference on Fuzzy Systems. San Antonio, Texas. Vol. 1, pp. 234-238.

[Kulish 1981] Kulish, U.K. and Miranker, W.L. (1981). *Computer Arithmetic Theory and Practice*. Academic Press.

[Moore 1966] Moore, R. E. (1966). *Interval Analysis.* Prentice Hall, New Jersey.

[Nguyen 1999] Nguyen, Hung T. and Walker, Elbert A. (1999). *A First Course in Fuzzy Logic.* Chapman and Hall.

[Oliveira 1997] Oliveira, P. W. de. (1997) at all. *Fundamentos de Matemática Intervalar.* 1ª ed. Instituto de Informática da UFRGS: SAGRA-Luzzato.

[Rocha 1996] Rocha, L.M, Kreinovich, V. (1996). *Computing Uncertainty in Interval Based Sets*. In Applications of Interval Computer. R.B. Kearfott and V. Kreinovich (Eds.). Kluwer Academic Press. pp. 337-380.

[Silveira 2000] Silveira, M.M.M.T. e Bedregal, B.R.C. (2000). Uma Análise à Inferência Fuzzy. Relatório de Pesquisa DIMAp-UFRN 2000-109. Edição Especial: I Workshop Técnico Científico, 15 anos DIMAp.

[Silveira 2001a] Silveira, M.M.M.T. e Bedregal, B.R.C, (2001), *Toward an Interval Fuzzy System.* In: Procedings the 2001 International Conference on Artificial Intelligence. USA, June 2001.

[Silveira 2001b] Silveira, M.M.M.T. e Bedregal, B.R.C, (2001), *A Method of Inference and Defuzzification Fuzzy Interval.* In: The 2001 Artificial Intelligence and Application. (to appear). Spanish, Setember 2001.

[Silveira 2001c] Silveira, M.M.M.T. e Bedregal, B.R.C.(2001) *Concepção de um Sistema Fuzzy Intervalar*. In: CLEI'2001, Venezuela. Setembro, 2001. Submetido.

[Terano 1992] Terano, T, Asai, K. And Sugeno, M. (1992). *Fuzzy Systems Theory and Its Applications.* Academic Press.

[Tsoukalas 1997] Tsoukalas, L. H. E Uhring, R. E.(1997). *Fuzzy And Neural Approaches In Engineering*. Ed. John Wiley & Suns Inc.

[Turksen 1986] Turksen, I. B. (1986). *Interval value fuzzy sets based on normal form.* Fuzzy Sets and Systems 20. pp. 191-210.

[Yam 1999] Yam, Y, Mukaidono, M e Kreinovich, V. (1999). *Beyond [0, 1] to Interval and Further: Do We Need All New Fuzzy Values?*. In: Proceeding of the Eighth International Fuzzy Systems Associations Would Congress IFSA'99. Taipe, Taiwan, pp. 143 - 146.

[Zadeh 1965] Zadeh, L. (1965) *Fuzzy Sets*. Information Control 8.