Cavaleiros e Cavilosos
Soluções de alguns exercícios propostos no livro do Smullyan

Capítulo 3
Nota: Na tradução dos exercícios deste capítulo chamaremos de M os maridos e de E as esposas, sendo d_M a proposição que afirma que M é um cavaleiro e d_E a proposição que afirma que E é uma cavaleira. Em cada exercício, utilizaremos o mecanismo de tradução exposto no capítulo 7 para transformar as afirmações realizadas pelos nativos em fórmulas da lógica clássica proposicional, a partir das quais podemos construir raciocínios semânticos da maneira usual.

3.1 Temos, como premissa: $d_M \equiv (\sim d_M \& \sim d_E)$.
Mostraremos que daí segue a conclusão $\sim d_M \& d_E$, isto é, que o marido é caviloso é a esposa cavaleira. Com efeito, suponha que exista uma valoração v satisfazendo a premissa acima, isto é, tal que (i) $v(d_M \equiv (\sim d_M \& \sim d_E)) = 1$, e tal que, além disso, seja o caso que (ii) $v(\sim d_M) = 0$, isto é, tal que (iii) $v(d_M) = 1$. De (i) e (iii) concluiríamos que (iv) $v(\sim d_M \& \sim d_E) = 1$, donde (v) $v(\sim d_M) = 1$, o que contradiz (ii).
Assim, toda valoração que satisfaz (i) deve ser tal que (vi) $v(\sim d_M) = 1$, isto é, tal que (vii) $v(d_M) = 0$. Mas então, de (i) e (vii) segue que (viii) $v(\sim d_M \& \sim d_E) = 0$, e de (vi) e (viii) somos levados a concluir que (ix) $v(\sim d_E) = 0$, isto é, que (x) $v(d_E) = 1$. Através de (vi) e (x) somos informados que o marido é caviloso e a esposa cavaleira. Acabamos de verificar assim que a conclusão $\sim d_M \& d_E$ segue da premissa acima.

3.2 Temos destarte, como premissa: $d_M \equiv (\sim d_M \vee \sim d_E)$.
Pode-se verificar agora que $d_M \equiv (\sim d_M \vee \sim d_E) \models d_M \& \sim d_E$.

3.3 Desta vez, como premissa, temos $d_M \equiv (d_M \supset d_E)$.
Pode-se verificar que $d_M \equiv (d_M \supset d_E) \models d_M \& d_E$.

3.4 Sabemos agora que $d_M \equiv (d_M \equiv d_E)$.
Pode-se verificar que $d_M \equiv (d_M \equiv d_E) \models d_E$,
mas $d_M \equiv (d_M \equiv d_E) \not\models d_M$ e $d_M \equiv (d_M \equiv d_E) \not\models \sim d_M$.
Concluímos assim que a esposa é cavaleira, mas não é possível determinar, com os dados que temos, que tipo de nativo é o marido.

Capítulo 4
Nota: Na tradução dos exercícios deste capítulo, assumiremos que d_X representa a proposição que afirma que “X é um cavaleiro” e d_U representa a proposição “Una está na ilha”.

4.1 As premissas agora são: $d_A \equiv ((d_B \& d_A) \supset d_U)$, e $d_B \equiv ((d_A \& d_B) \supset d_U)$.
Podemos extrair daí, como conclusão, a sentença $d_U \& (d_A \& d_B)$, isto é, Una está na ilha (e A e B são ambos cavaleiros).

4.2 As premissas aqui são: $d_A \equiv ((d_B \vee d_A) \supset d_U)$, e $d_B \equiv d_A$.
Segue daí, como conclusão, a sentença $d_U \& (d_A \& d_B)$, isto é, Una está na ilha (e A e B são ambos cavaleiros).

4.3 Uma das premissas é: (1) $d_A \equiv (d_B \vee d_U)$. Da outra premissa não estamos inicialmente certos: pode ser (2) $d_B \equiv (\sim d_A \& \sim d_U)$ ou senão (3) $d_B \equiv (\sim d_A \& d_U)$. Mas somos informados de que o lógico conseguiu, a partir de uma das duas opções, concluir se Una estava ou não na ilha. Ora, de (1) e (2) só podemos concluir com certeza que A é caviloso; pode ser que, em tal caso, B seja um cavaleiro e U não esteja na ilha, ou pode ser que B seja um caviloso e U esteja na ilha; isto é, a conclusão $\sim\sim d_A \& (d_B \equiv \sim d_U)$ segue das premissas (1) e (2). Por outro lado, de (1) e (3) podemos concluir sem sombra de dúvida que Una não está na ilha (e A e B são ambos cavilosos). Ficamos portanto com a segunda opção, e B só pode ter dito (mentindo) que A é um caviloso e Una está na ilha. Teremos acabado de verificar, assim, que a sentença $\sim d_U \& (\sim d_A \& \sim d_B)$ é consequência das premissas (1) e (3).

4.5. Assumiremos aqui que d_O representa a proposição "Una esteve na ilha ontem".
As novas premissas são:
(1) $d_A \equiv d_U$
(2) $d_B \equiv \sim d_U$
(3) $d_C \equiv d_O$
(4) $d_D \equiv (\sim d_U \& \sim d_O)$
(5) $d_E \equiv (\sim d_D \vee d_C)$
(6) $d_A \equiv (\sim d_E \vee d_C)$
Das premissas (1) a (5) não dá para concluir nem pela veracidade nem pela falsidade de nenhum dos 7 átomos envolvidos. Com efeito, as premissas (1) a (5) podem ser simultaneamente satisfeitas tão-somente pelas 4 classes de modelos a seguir (dentre as 128 classes de modelos possíveis):

atribuições	d_A	d_B	d_C	d_D	d_E	d_O	d_U
ρ_1	1	0	1	0	1	1	1
ρ_2	1	0	0	0	1	0	1
ρ_3	0	1	1	0	1	1	0
ρ_4	0	1	0	1	0	0	0

Adicionando a premissa (6) ao conjunto anterior de premissas, contudo, apenas o modelo ρ_1 ainda satisfaz o conjunto de premissas resultante, donde podemos concluir que Una está na ilha hoje e também esteve na ilha ontem, os nativos A, C e E são cavaleiros, e os nativos B e D são cavilosos.

Capítulo 5
Nota: Para os exercícios deste capítulo 5 escreveremos C_X para dizer que X é um cavalheiro, $\sim C_X$ para dizer que X é uma dama, M_X para dizer que X é marciano, e $\sim M_X$ para dizer que X é venusiano.

5.7 Chamaremos Ork de O e Bog de B. As premissas agora serão:
(1) $(C_O \equiv M_O) \equiv \sim M_B$
(2) $(C_B \equiv M_B) \equiv M_O$
(3) $(C_O \equiv M_O) \equiv C_B$
(4) $(C_B \equiv M_B) \equiv \sim C_O$
Podemos concluir daí a sentença $(C_O \& \sim M_O) \& (\sim C_B \& M_B)$, isto é, Ork é um cavalheiro venusiano, e Bog é uma dama marciana (e todas as quatro asserções que eles fizeram foram portanto falsas).

5.8 Premissas:
(0) $C_A \equiv \sim C_B$
(1) $(C_A \equiv M_A) \equiv (M_A \& M_B)$
(2) $(C_B \equiv M_B) \equiv \sim(M_A \& M_B)$
A premissa (0) traduz o fato de A e B constituírem um casal (cavalheiro+dama). Deste conjunto de premissas segue como consequência a sentença $(C_A \& \sim C_B) \& (M_A \equiv M_B)$, isto é, A é o marido e B a esposa, e eles são do mesmo planeta (não é possível decidir, a partir dos dados que temos, que planeta seria este). Não se trata portanto de um casal misto.

5.9 Premissas:
(0) $C_A \equiv \sim C_B$
(1) $(C_A \equiv M_A) \equiv (\sim M_A \& \sim M_B)$
(2) $(C_B \equiv M_B) \equiv \sim(\sim M_A \& \sim M_B)$
Mais uma vez, a premissa (0) traduz o fato de A e B constituírem um casal (cavalheiro+dama). Deste conjunto de premissas segue como consequência a sentença $(\sim C_A \& C_B) \& (M_A \equiv M_B)$, donde B é o marido (e não se trata de um casal misto, embora mais uma vez não seja possível decidir de que planeta ele seria oriundo).

5.10 Chamaremos Jal de J e Tork de T. Raciocinando como nas duas situações anteriores, as premissas da presente situação são:
(0) $C_T \equiv \sim C_J$
(1) $(C_T \equiv M_T) \equiv M_J$
(2) $(C_J \equiv M_J) \equiv (M_T \& M_J)$
Segue daí como consequência a sentença $(\sim C_T \& M_T) \& (C_J \& \sim M_J)$, isto é, Tork é uma dama marciana, e Jal um cavalheiro venusiano (ambos são mentirosos, portanto).

Capítulo 6

6.1 Diga quais das seguintes fórmulas são tautologias.

(a) $(p \supset q) \supset (q \supset p)$
Não é uma tautologia. Tome como contra-modelo uma valoração v tal que $v(p) = 0$, $v(q) = 1$.

(b) $(p \supset q) \supset (\sim p \supset \sim q)$
Não é uma tautologia. Tome mais uma vez como contra-modelo uma valoração v tal que $v(p) = 0$ e $v(q) = 1$.

(c) $(p \supset q) \supset (\sim q \supset \sim p)$
É tautologia.

(d) $(p \equiv q) \supset (\sim p \equiv \sim q)$
É tautologia.

(e) $\sim(p \supset \sim p)$
Não é uma tautologia. Tome como contra-modelo uma valoração v tal que $v(p) = 0$.

(f) $\sim(p \equiv \sim p)$
É tautologia.

(g) $\sim(p \& q) \supset (\sim p \& \sim q)$
Não é uma tautologia. Tome como contra-modelo qualquer valoração v tal que $v(p) \neq v(q)$.

(h) $\sim(p \vee q) \supset (\sim p \vee \sim q)$
É uma tautologia.

(i) $(\sim p \vee \sim q) \supset \sim(p \vee q)$
Não é uma tautologia. Tome como contra-modelo qualquer valoração v tal que $v(p) \neq v(q)$.

(j) $\sim(p \& q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$
É uma tautologia.

(l) $\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \& \sim q)$
É uma tautologia.

(m) $(q \equiv r) \supset ((p \supset q) \equiv (p \supset r))$
É uma tautologia.

(n) $(p \equiv (p \& q)) \equiv (q \equiv (p \vee q))$
Tautologia. Ambas as fórmulas $p \equiv (p \& q)$ e $q \equiv (p \vee q)$ são logicamente equivalentes a $p \supset q$.

Capítulo 7

7.1 Denotemos por d_i a asserção feita pelo nativo N_i. Assim:
(1) $d_1 \equiv (d_2 \& d_3)$
(2) $d_2 \equiv (\sim d_1 \& d_3)$
Destas premissas se pode verificar a conclusão $(\sim d_1 \& \sim d_2) \& \sim d_3$.

7.2 (a) A seguinte fórmula é uma tautologia?
$((d_1 \equiv (d_2 \& d_3)) \& (d_2 \equiv (\sim d_1 \& d_3))) \supset ((\sim d_1 \& \sim d_2) \& \sim d_3)$
Sim.

(b) Qual a relação desta fórmula com o exercício anterior?
O antecedente desta fórmula representa a conjunção das premissas do exercício anterior, e o consequente representa a conclusão deste mesmo exercício. Pelo *Teorema da Dedução*, verificar esta que esta fórmula é uma tautologia é equivalente a verificar que a conclusão segue das premissas, no exercício anterior.

7.3 Mostre que a proposição p_3 é consequência semântica das duas proposições abaixo:
$p_1 \equiv \sim p_2$
$p_2 \equiv (p_1 \equiv \sim p_3)$
Trata-se portanto de verificar que: $p_1 \equiv \sim p_2,\ p_2 \equiv (p_1 \equiv \sim p_3) \models p_3$.
Suponha por absurdo que $p_1 \equiv \sim p_2,\ p_2 \equiv (p_1 \equiv \sim p_3) \not\models p_3$, isto é, suponha que exista uma valoração v tal que (i) $v(p_1 \equiv \sim p_2) = 1$, (ii) $v(p_2 \equiv (p_1 \equiv \sim p_3)) = 1$ e (iii) $v(p_3) = 0$. De (iii) segue que (iv) $v(\sim p_3) = 1$. Suponha agora, por um lado, que (v) $v(p_1) = 1$. Logo, de (iv) e (v) temos (vi) $v(p_1 \equiv \sim p_3) = 1$, e de (vi) e (ii) seguiria que (vii) $v(p_2) = 1$, isto é, (viii) $v(\sim p_2) = 0$. De (i) e (viii) temos (ix) $v(p_1) = 0$, o que contradiz (v). Suponha então, por outro lado, que (x) $v(p_1) = 0$. De (iv) e (x) segue que (xi) $v(p_1 \equiv \sim p_3) = 0$, e de (ii) e (xi) segue que (xii) $v(p_2) = 0$, donde (xii) $v(\sim p_2) = 1$. De (i) e (xii) temos (xiii) $v(p_1) = 1$, o que novamente contradiz (x). Logo, não faz sentido acrescentar (iii) às suposições (i) e (ii) de satisfação das premissas, e p_3 é de fato consequência semântica de $p_1 \equiv \sim p_2$ e $p_2 \equiv (p_1 \equiv \sim p_3)$.

7.4 Denotemos desta vez por p_i a asserção feita pelo nativo N_i. Então podemos traduzir as afirmações de N_1 e N_2 da seguinte forma:
$p_1 \equiv \sim p_2$
$p_2 \equiv (p_1 \equiv \sim p_3)$
Obviamente, isto nos leva de volta para o exercício anterior, e podemos concluir que N_3 é um cavaleiro.

Nota. Para as questões 7.5, 7.6 e 7.7 chamaremos d_A a proposição segundo a qual A é um cavaleiro, d_B a proposição segundo a qual B é um cavaleiro, e d_U a proposição que afirma que Una está na ilha.

7.5 Premissas: (1) $d_A \equiv (d_B \supset \sim d_U)$, e (2) $d_B \equiv (\sim d_A \supset \sim d_U)$.
Pode-se verificar agora que a sentença $\sim d_U \& (d_A \& d_B)$ é consequência semântica de (1) e (2). Logo, Una não está na ilha (e ambos A e B são cavaleiros).

7.6 Novas premissas: (1) $d_A \equiv ((d_A \vee d_B) \supset d_U)$, e (2) $d_B \equiv ((\sim d_A \vee \sim d_B) \supset d_U)$.
Pode-se verificar que a sentença $d_U \& (d_A \& d_B)$ é consequência semântica de (1) e (2). Logo, Una está na ilha (e ambos A e B são cavaleiros).

7.7 Premissas deste problema: (1) $d_A \equiv ((d_A \& \sim d_B) \supset d_U)$, e (2) $d_B \equiv \sim d_A$.
Pode-se verificar que a sentença $U \& (d_A \& \sim d_B)$ é consequência semântica de (1) e (2). Logo, Una está na ilha (e A é cavaleiro, mas B é caviloso).