(Wittgenstein & Paraconsistência)

João Marcos
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Abstract. In classical logic, a *contradiction* allows one to derive every other sentence of the underlying language; *paraconsistent logics* came relatively recently to subvert this explosive principle, by allowing for the subsistence of contradictory yet non-trivial theories. Therefore our surprise to find Wittgenstein, already at the 1930s, in comments and lectures delivered on the foundations of mathematics, as well as in other writings, counseling a certain tolerance on what concerns the presence of contradictions in a mathematical system. 'Contradiction. Why just *this* spectre? This is really very suspicious.' (*Philosophical Remarks* III–56)

In the last decades, several authors (e.g. Arrington, Hintikka, Van Heijenoort, Wright, Wrigley) have been digging into Wittgenstein's rather non-standard standpoint on what concerns the interpretation and import of contradiction in logic and mathematics, and many other authors (e.g. da Costa, Goldstein, Granger, Marconi) have been investigating the possibility of taking Wittgenstein seriously as one of the early forerunners of paraconsistency. While many advances have been made on the first front, the second set of investigations has led almost exclusively to negative results: no, no operational proposal about the construction of a logic in which (some) contradictions are made inoffensive can be read from Wittgenstein's philosophical work; in fact, it appears that the most one can find there is the exhortation for mathematicians to alter their *attitude* with respect to contradictions and to consistency proofs.

The play is done, and one looks for a resume of the opera. This paper fills that blank, as a thorough investigation of the possible relations between Wittgenstein and paraconsistency.

Keywords: Wittgenstein, contradiction, philosophy of mathematics, foundations of mathematics, paraconsistency.

0. Introdução

Segundo da Costa et al. (1995), "dado o seu caráter de lógica não-clássica, nenhuma exposição geral da paraconsistência pode ser minimamente aceita sem algumas observações filosóficas acerca da sua natureza." Ora, encontramos nos escritos de Wittgenstein um curioso e insistente reclamo por tolerância com relação à presença de contradições em um sistema matemático. Seria Wittgenstein, por excelência, um filósofo da paraconsistência? Esta é a questão sobre a qual nos debruçamos aqui.

A própria trajetória filosófica de Wittgenstein começou pela atração que o filósofo sentira pelo paradoxo de Russell, uma contradição que ameaçava os fundamentos da matemática na virada do século XX, e continuou anos mais tarde pela crítica

Principia **14**(1): 135–73 (2010).
Published by NEL — Epistemology and Logic Research Group, Federal University of Santa Catarina (UFSC), Brazil.

ao programa formalista de Hilbert, o qual pretendia demonstrar vez por todas a consistência da aritmética. Tanto o paradoxo de Russell quanto a Metamatemática de Hilbert são apresentados na seção 1.

É costume dividir a obra wittgensteiniana em duas: a primeira, do *Tractatus Logico-Philosophicus*, e a segunda, mais ou menos a partir das *Investigações Filosóficas*. A despeito da altivez da primeira filosofia de Wittgenstein, é sua segunda filosofia que mais nos interessará aqui. Seu programa matemático se encontra esboçado no último parágrafo das *Investigações*, no qual o filósofo afirma que "é possível uma investigação da matemática inteiramente análoga à nossa investigação da psicologia. É tão pouco *matemática* quanto a outra é *psicológica*. Nela *não* se calcula; não é, pois, logística, por exemplo. Poderia merecer o nome de investigação dos 'fundamentos da matemática'." As obras *Remarks on the Foundations of Mathematics* e *Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics* são por certo as principais fontes nas quais podemos colher os frutos desta investigação, mas as personalíssimas opiniões de Wittgenstein acerca dos fundamentos da matemática podem, com efeito, ser hauridas e esclarecidas em praticamente toda a sua obra, bem como em diversos trabalhos de seus comentadores.

Fiéis ao filósofo, e a seu peculiar método filosófico, neste estudo nos guiamos por perguntas — menos, porém, com o intuito de respondê-las de forma definitiva do que utilizá-las como roteiro de viagem. Pois "em filosofia é sempre bom pôr uma questão ao invés de uma resposta a uma questão. Pois uma resposta a uma questão pode facilmente ser injusta; livrar-se dela por meio de outra questão não o é." (*Foundations* II–5)

Na seção 2 apresentamos o paradoxo de Curry, formulado mais ou menos à mesma época (1942) em que Wittgenstein exorava aos seus jovens discípulos em Cambridge uma mudança de atitude com relação à contradição e à consistência na matemática. O paradoxo de Curry nos mostra, contudo, que há outras vias lógicas em direção à trivialização da teoria de conjuntos, sem passar necessariamente pela contradição, como ocorre no caso do paradoxo de Russell. Desconhecemos a opinião de Hilbert sobre a construção de Curry: o velho matemático alemão enfrentava na época as atribulações de uma Guerra Mundial, e morreria apenas um ano mais tarde. Wittgenstein, por seu lado, não parece ter sequer tomado conhecimento da construção de Curry: tanto quanto Hilbert, ele se preocupou tão-somente com o problema da inconsistência dos cálculos formais, sem distingui-la da trivialidade. De uma maneira ou de outra, certamente não seríamos capazes de distinguir na obra de Wittgenstein qualquer proposta efetiva de um cálculo paraconsistente.

O que fazer da contradição? Na seção 3 exploramos algumas das afirmações — elas próprias contraditórias — de Wittgenstein a este respeito. Na sua primeira filosofia, as contradições não têm vez: elas hão de ser simplesmente dissolvidas; na sua segunda filosofia, pergunta-se pelo uso possível das contradições nos jogos de linguagem. Wittgenstein altercou longamente com seus alunos, entre eles Turing, e buscou dar conta — sem muito êxito, diga-se de passagem — das contradições "ocultas", as quais, acreditava-se, poderiam eventualmente explodir, donde decorreria desafortunadamente a trivialização do cálculo subjacente.

Na seção 4 damos a conhecer as críticas e as recomendações de Wittgenstein com relação à atitude dos matemáticos em face da contradição, e analisamos os próprios objetivos de sua prática filosófica. Wittgenstein insiste que a matemática é uma espécie de jogo, e que os problemas surgem quando os matemáticos se esquecem disso — eles se levam a sério demais. Wittgenstein não julgava realmente que o problema da consistência fosse um problema legítimo, daí o seu entendimento de que o problema da contradição estaria menos na sua ação do que na nossa reação a ela.

Examinamos, na seção 5, os pontos de proximidade e de divergência entre Wittgenstein e aqueles lógicos que são usualmente tomados como fundadores da lógica paraconsistente. Arguimos a tese de que Łukasiewicz e Vasiliev mereceriam o título de paternidade da lógica paraconsistente, e apresentamos as ideias básicas de dois de seus verdadeiros pais, Jaśkowski e da Costa. Fazemos ainda breves considerações sobre a ontologia da paraconsistência.

Na seção 6 mergulhamos fundo na análise wittgensteiniana da matemática. Buscamos as origens e as consequências da crítica feita por Wittgenstein à própria ideia de que a matemática deveria ter um fundamento, e para tanto fazemos uso do vocabulário característico do filósofo: entram em jogo as noções de "gramática", "forma de vida", "história natural" e "semelhanças de família". Conhecemos, em 6.1, a rejeição por Wittgenstein de toda sorte de meta-disciplinas — e, em particular, da Metamatemática de Hilbert. Este ponto de vista culmina num grande engano na interpretação wittgensteiniana das demonstrações de consistência relativa, e na completa incapacidade de entender o funcionamento do Segundo Teorema de Gödel. Em 6.2 propomos compreender tanto a rejeição da Metamatemática quanto a concepção bastante particular de cálculo manifestas por Wittgenstein a partir de seus conceitos pré-semânticos hoje tão inusuais.

Finalmente, na seção 7, perguntamo-nos quais as consequências práticas do arrazoado wittgensteiniano. Do sermão de Wittgenstein aos matemáticos pode resultar desde o simples incômodo até o engavetamento de certos projetos, passando, por exemplo, pelo completo mal-entendido com relação ao significado do Primeiro Teorema de Gödel — mal-entendido este que talvez deva sua origem ao uso dos mesmos conceitos pré-semânticos mencionados acima.

1. De uma Filosofia da Paraconsistência

Tentar derivar toda a matemática pura a partir de um punhado de princípios lógicos, esta era a natureza da tarefa (dita *logicista*) a que se propunha Bertrand Russell, em 1903, em seu *The Principles of Mathematics* (Os Fundamentos da Matemática). Em um apêndice desta obra, Russell nos conta que recém tomara conhecimento de um esforço afim, empreendido alguns anos antes em um trabalho pouco divulgado de Gottlob Frege, cujo primeiro volume viera à luz em 1893, sob o título de *Grundgesetze der Arithmetik* (Leis Básicas da Aritmética). Mesmo tendo feito uma leitura apressada desta última obra, Russell notou uma dificuldade que de início lhe pareceu secundária, mas que logo mais seria conhecida como o mais famoso paradoxo da teoria de conjuntos.

Muitos trabalhos em lógica, em teoria de conjuntos e em filosofia e fundamentos da matemática no século XX terão origem neste paradoxo; sobre este paradoxo se dirá até mesmo que "a descoberta por Russell de um conjunto que é ao mesmo tempo membro de si mesmo e não-membro de si mesmo é a maior descoberta matemática desde $\sqrt{2}$" (cf. Priest 1979: 240). Mas em que consiste afinal o *paradoxo de Russell*?

O desenvolvimento da teoria de conjuntos encontrava-se ainda incipiente no princípio do século XX — seu pontapé inicial fôra dado por Georg Cantor, em 1874, no artigo "Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen" (Sobre uma propriedade essencial de todos os números reais algébricos), publicado nos *Mathematische Annalen.* Somente em 1895 e 1897, nos dois artigos que compunham os "Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre" (Contribuições aos fundamentos da teoria de conjuntos transfinitos), Cantor faria conhecer, na mesma publicação acima, seus trabalhos sobre números ordinais e cardinais. Contudo, até as primeiras tentativas de axiomatização feitas por Zermelo, em 1908 (cf. a Introdução a Fraenkel & Bar-Hillel 1958), a teoria cantoriana permaneceria em um estado primitivo, no qual se podem destacar dois princípios norteadores gerais:

- *Extensionalidade:* dois conjuntos são iguais quando têm os mesmos elementos.
- *Abstração* (ou *Compreensão*): toda propriedade determina um conjunto, constituído por aqueles, e somente aqueles, objetos que gozam desta propriedade.

Na linguagem padrão da teoria de conjuntos, poderíamos formular este segundo princípio como:

(PA) $\exists y \forall x \big(x \in y \leftrightarrow F(x)\big)$, onde $F(x)$ é uma fórmula na qual a variável x pode aparecer livre, mas não y.

O problema surge quando substituímos $F(x)$ pela fórmula $x \notin x$. Neste caso, temos uma sentença que anuncia a existência do conjunto de todos os conjuntos que não pertencem a si mesmos:

(1) $$\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow x \notin x).$$

Denominemos r o conjunto cuja existência é garantida por (1). Daí:

(2) $$\forall x(x \in r \longleftrightarrow x \notin x).$$

Em particular, para $x = r$, temos:

(3) $$r \in r \longleftrightarrow r \notin r.$$

Como resultado, obtivemos um paradoxo: um conjunto r que pertence e não pertence a si mesmo. De (3) concluímos:

(4) $$r \in r \,\&\, r \notin r.$$

Sim, encontramos uma contradição na nossa prototeoria de conjuntos, mas por que isto deveria nos preocupar? É simples. Acontece que há um outro princípio antigo (cf. Bobenrieth Miserda 1996, *passim*, em especial cap. V-2) que afirma:

- *Pseudo-Escoto:* de duas proposições contraditórias deduz-se qualquer outra proposição.

Poderíamos formular este princípio aqui por meio do seguinte esquema:

(PE) $(\alpha \,\&\, \neg\alpha) \rightarrow \beta$.

Este esquema é facilmente demonstrável em uma ampla classe de lógicas, classe esta que inclui a lógica clássica axiomatizada por Russell e Whitehead nos *Principia Mathematica*, em 1910. Recorde-se que é frequente a presença, em lógicas minimamente expressivas, da regra de Modus Ponens, (MP), segundo a qual a partir da demonstração de esquemas φ e $\varphi \rightarrow \theta$ podemos inferir θ. Neste caso, de (4), (PE) e (MP) poderíamos inferir imediatamente a validade de um esquema β arbitrário. Portanto, numa teoria clássica que contenha uma contradição, qualquer fórmula da linguagem subjacente a esta teoria é fatalmente demonstrável.

Ao tomar conhecimento da construção russelliana, Frege viu ruir sua tentativa de fundamentar a matemática. Dedekind, que trabalhava igualmente sobre os fundamentos da aritmética, interrompeu temporariamente seu trabalho. A fim de evitar uma formulação específica do paradoxo, Russell (1996, Ap. B) propusera sua complexa Teoria dos Tipos, mas acabou confessando seu temor de que ela fosse incapaz de resolver outras versões do "mesmo" paradoxo. A sentença que fecha os *Principles* é a seguinte:

> Qual seria a solução completa desta dificuldade eu não logrei descobrir; entretanto, como ela afeta os próprios fundamentos do raciocínio, eu diligentemente recomendo o seu estudo a todos os que se interessam pela lógica. (Russell 1996: 528)

De fato, vários outros paradoxos semelhantes ao de Russell foram sendo formulados a seguir, o que levou Poincaré a instar a comunidade matemática, em 1908, no "IV Congresso Internacional de Matemática", em Roma, a encontrar uma solução para esta crise que parecia abalar seriamente os fundamentos da matemática. Naquele mesmo ano, Wittgenstein tomaria conhecimento dos trabalhos de Russell, e em breve ele decidiria abandonar de uma vez por todas sua intenção de seguir carreira como engenheiro aeronáutico para estudar matemática e lógica (cf. Monk 1995). Ao fim e ao cabo, a matemática redundaria em alimento essencial para sua primeira filosofia.

Anos mais tarde, de 1929 a 1944, quase metade da obra produzida por Wittgenstein trataria da filosofia da matemática, e mais de uma vez ele se referiria a este trabalho como "a sua contribuição principal" (cf. o verbete *Matemática*, em Glock 1998). Contudo, uma boa parte das observações e comentários produzidos por Wittgenstein nesta época são por demais heterodoxos, e podem facilmente nos conduzir à impressão de que "tivemos o nosso bom senso ultrajado" (cf. Wright 1980: 295, e também Wrigley 1980).

Nesta nova fase de sua filosofia, Wittgenstein afirma que sua tarefa "não é atacar a lógica de Russell de dentro, mas de fora" (*Foundations* V–16), isto é, ele pretende *falar sobre* matemática sem propriamente *fazer* matemática, até porque "em matemática só podem haver problemas matemáticos, e não filosóficos" (*Grammar*: 369), e são estes últimos que lhe interessam. Um bom modelo daquilo a que Wittgenstein se propõe combater é dado pela motivação filosófica que dera origem ao programa de investigações *metamatemáticas* concebido pelo matemático alemão David Hilbert. Tecnicamente, este programa poderia ser resumido pela tentativa de (cf. Hilbert 1926):

(a) axiomatização (de uma boa parte) da matemática;

(b) demonstração da consistência por meios finitários.

A demonstração da consistência da aritmética era tida, para Hilbert, como indispensável, a fim de que nos assegurássemos de que "ninguém irá nos expulsar do paraíso criado por Cantor" (cf. Reid 1996, cap. XX). Do ponto de vista clássico, dizemos de uma certa teoria que ela é *inconsistente* quando a partir dela podemos inferir uma contradição, e dizemos que ela é *trivial* quando a partir dela podemos inferir qualquer fórmula na linguagem a ela subjacente. É claro que toda teoria trivial é inconsistente, e no esquema dedutivo da lógica clássica, graças ao Pseudo-Escoto e a Modus Ponens, já sabemos que vale a recíproca: toda teoria inconsistente é trivial. Daí o motivo pelo qual seria importante para Hilbert demonstrar a inexistência de contradições na teoria de conjuntos: usando a teoria de conjuntos para fundamentar toda a matemática, garantiríamos a inexistência de contradições na aritmética, que seria por sua vez consistente, e definitivamente não-trivial.

Tudo isto parece bastante razoável, e até mesmo um caminho natural para a matemática, através do qual ela se mostraria mais segura. O que então no programa de Hilbert tanto incomodava Wittgenstein? Não era, por certo, a tarefa de se evitar a contradição, pois este é um problema matemático, enquanto "a posição cotidiana da contradição, ou sua posição no mundo cotidiano: este é o problema filosófico" (*Investigações* §125). O que o perturbava era justamente o fato de que a ausência de contradições, uma característica interna ao cálculo, pudesse nos conferir uma *segurança* externa ao cálculo, isto é, uma confiança maior no cálculo. Isto decerto ultrapassava as fronteiras do próprio cálculo — o programa de Hilbert não seria portanto um programa estritamente matemático. Mais profundamente, a crítica de Wittgenstein ia contra a própria ideia de que fosse possível, ou mesmo necessária, a fundamentação da matemática.

2. Teria Wittgenstein formulado a ideia de uma lógica paraconsistente?

Wittgenstein teve seus dias de profeta:

> De fato, mesmo neste estágio, prevejo um tempo em que haverá investigações matemáticas de cálculos contendo contradições, e as pessoas realmente se orgulharão de ter se emancipado até mesmo da consistência. (*Vienna*: 139, transcrito em *Remarks*: 332)

Com efeito, vimos assistindo recentemente à construção de cálculos inconsistentes porém não-triviais, ditos *paraconsistentes*. Independente de sua motivação ou justificação, os sistemas lógicos paraconsistentes tiveram sucesso em ilustrar a ideia de cálculos que permitem a ocorrência de proposições contraditórias, porém ao mesmo tempo evitam a construção de paradoxos como o de Russell. Eles são capazes, portanto, de isolar as contradições, impedindo-as de contaminar todo o resto — evitam assim a trivialização que advém da inconsistência. Mas a trivialização poderia muito bem ocorrer por outra via ...

Em 1939, em suas palestras em Cambridge, Wittgenstein discutira intensamente os problemas filosóficos encontrados na fundamentação da matemática. Não muito longe dali, três anos mais tarde, Haskell Curry (1942) apontaria uma outra via lógica em direção à trivialização. Tomemos mais uma vez o Princípio da Abstração, (PA), da prototeoria de conjuntos, e desta vez substituamos $F(x)$ por $(x \in x) \to \beta$, onde β representa uma fórmula arbitrária. Temos então:

$$\exists y \forall x \big(x \in y \longleftrightarrow (x \in x \to \beta)\big). \tag{5}$$

Denominemos c o conjunto de cuja existência trata (5). Daí:

$$\forall x \big(x \in c \longleftrightarrow (x \in x \to \beta)\big). \tag{6}$$

Em particular, para $x = c$, temos:

(7) $$c \in c \longleftrightarrow (c \in c \to \beta).$$

Da bi-implicação em (7) concluímos:

(8) $$c \in c \to (c \in c \to \beta);$$
(9) $$(c \in c \to \beta) \to c \in c.$$

Aqui entra em cena um outro princípio, o qual formularíamos por meio do seguinte esquema:

Princípio da Contração (Cont): $\big(\alpha \to (\alpha \to \beta)\big) \to (\alpha \to \beta)$.

Ora, de (Cont) e de (8), por Modus Ponens (MP), segue:

(10) $$c \in c \to \beta,$$

e de (9) e (10), por (MP), temos:

(11) $$c \in c.$$

Mas de (10) e (11), aplicando novamente (MP), temos:

(12) $$\beta.$$

Mostramos assim que a nossa prototeoria de conjuntos é trivial, mesmo sem passar pela contradição. Observe que o Princípio da Contração e a regra de Modus Ponens são válidas em sistemas tão fracos quanto a parte positiva do Cálculo Intuicionista de Heyting — o *paradoxo de Curry* parece ser irrecorrível.[1] A forma irrestrita do Princípio da Abstração e a lógica clássica são portanto *incompatíveis*, isto é, não é possível manter ambas e ao mesmo tempo escapar à trivialização. Mantendo a lógica clássica subjacente, a única saída é portanto restringir aquele princípio, que é o que faz, por exemplo, a teoria de conjuntos de Zermelo-Fraenkel, **ZF**. Nesta teoria podemos ainda formar conjuntos que sejam a extensão de certas propriedades, mas somente a partir de outros conjuntos já dados:

Princípio Restrito da Abstração (PRA): $\forall z \exists y \forall x \big(x \in y \longleftrightarrow \big(F(x) \,\&\, (x \in z)\big)\big)$.

Uma consequência incômoda é que agora já não é mais possível demonstrar a existência do conjunto binário $\{x, y\}$ formado por x e y, do conjunto união, do conjunto das partes de um conjunto dado, do conjunto vazio, de conjuntos infinitos. Para assegurar seu poder expressivo, **ZF** deve contar com outros axiomas além daqueles que garantem a extensionalidade e a forma restrita da Abstração, (PRA). Outros sistemas de teoria de conjuntos existem, tais como o de Kelley-Morse, o de von Neumann-Bernays-Gödel, e o de Quine. Todos têm cores diferentes, mas essencialmente o mesmo sabor: eles resolvem os problemas dos paradoxos também impondo restrições sobre a fórmula $F(x)$, seu domínio ou sua forma. Assim como a Teoria dos Tipos de Russell, estes sistemas são construídos de modo a evitar os paradoxos que surgem da auto-referência. Daí retira Wittgenstein a seguinte lição: "Devemos às vezes pôr restrições à expressão da generalidade de modo a evitar que sejamos obrigados a extrair consequências indesejáveis disto." (*Zettel* §692)

Por outro lado, temos ainda a alternativa de manter a forma irrestrita do Princípio da Abstração, modificando agora a lógica subjacente ao nosso sistema, substituindo-a por uma lógica paraconsistente que evite também a trivialização não decorrente da contradição (cf. por exemplo Carnielli 1998). Há diversas maneiras de se fazer isso, e a força da nossa prototeoria de conjuntos pode ser assim plenamente restabelecida. Em tais teorias paraconsistentes de conjuntos as contradições seriam não apenas permitidas e controladas, como poderiam ser diretamente estudadas — conjuntos como o de Russell ou o de Curry poderiam existir sem gerar paradoxos e poderíamos até mesmo investigar suas propriedades.

Consideremos agora o seguinte princípio:

- *Princípio da Não-Contradição:* proposições contraditórias não podem ser simultaneamente verdadeiras.

Este era para Aristóteles o mais seguro de todos os princípios lógicos (vide seção 5). Segundo da Costa, uma formulação esquemática para este princípio poderia ser a seguinte:

(PNC): $\neg(\alpha \,\&\, \neg\alpha)$.

Na lógica clássica os princípios da Não-Contradição, (PNC), e do Pseudo-Escoto, (PE), são equivalentes. No entanto, é importante ressaltar que a construção de uma lógica paraconsistente funda-se mais na rejeição da validade de (PE) do que na de (PNC).[2] Com efeito, é fácil encontrar exemplos de lógicas trivalentes tais que (cf. Marcos 1999):

a) vale (PE) mas não vale (PNC): $Ł_3$;
b) vale (PNC) mas não vale (PE): J_3;
c) não vale (PE) nem (PNC): P^1 e P^2.

Destas lógicas, a única que *não* diríamos paraconsistente é $Ł_3$. Mas o que há de especial em lógicas paraconsistentes e que as fazem rejeitar, pelo menos parcialmente, (PE) e, em alguns casos, também (PNC)? No mínimo, o que entendemos pelo símbolo de negação aqui deve diferir do que entendemos por negação no caso clássico. Um artifício comum à semântica de diversas lógicas paraconsistentes é de tomar o operador de negação mais ou menos como um operador modal: sua saída não é *função* da entrada, de modo tal que possamos interpretar como verdadeiras tanto uma fórmula α quanto sua negação, $\neg\alpha$ (cf. por exemplo Marcos 1999, seções 2.2 e 2.3.1).[3] Vemos assim que as lógicas paraconsistentes não têm uso apenas na ilustração da possibilidade de existência de teorias não-triviais mesmo que inconsistentes, e no estudo direto das propriedades destas teorias; com efeito, temos aqui esboçada uma outra característica notável destas lógicas: a possibilidade que nos dão de explorar o significado e o funcionamento da negação. Ora, se em uma tal lógica pudermos asseverar uma fórmula do tipo α & $\neg\alpha$, então o que devemos entender da negação já não pode ser mais o que costumava ser, e o seu funcionamento no cálculo definitivamente não será mais o mesmo.[4] Mas em geral não pretendemos interpretar a negação paraconsistente como apenas mais um operador modal, ou um conectivo unário qualquer — exigimos normalmente que ela, além disso, apresente algumas propriedades interessantes, que a caracterizem. Em suma, se por um lado devemos especificar critérios negativos para a negação, de modo a obter uma *negação* paraconsistente, por outro lado devemos especificar critérios positivos, de modo a obter uma negação *paraconsistente* (cf. Béziau 2000).

A respeito do comportamento da negação, também Wittgenstein tinha suas intuições pessoais. O modelo que ele veio esmerando desde a época do *Tractatus* parece consistir no que poderíamos denominar uma visão explosiva da negação aliada a uma visão cancelativa da contradição (cf. Goldstein 1989: 541–2). Assim, Wittgenstein entendia que uma proposição atômica p se referia a um objeto, que $\neg p$ se referia a todos os objetos que não fossem p, mas p & $\neg p$ não se referia a objeto algum. Mas é só mesmo nas *Investigações* (§547–57) que Wittgenstein se manifestou claramente contra a ideia de que devesse haver algo em comum a toda negação, isto é, de que no fundo toda negação devesse ter uma essência, e compartir "um mesmo significado".

É pela negação que se chega à contradição. Mas e a consistência? Talvez aqui a linguagem tenha exercido seu feitiço. Em alemão, o termo para contradição é *Widerspruch*, e o termo para consistência é *Widerspruchfreiheit*, literalmente, "que está livre de contradição". Isso pode ter inspirado Hilbert, identificando inconsistência e trivialidade, a preocupar-se tão-somente com a possível presença de contradições no cálculo, sem imaginar que a trivialidade pudesse ser alcançada por um outro caminho, como mostrou o paradoxo de Curry. Enquanto isso, desconhecendo igualmente o resultado de Curry, Wittgenstein criticava a importância exagerada que os matemáticos formalistas depositavam na demonstração da consistência, e a hostilidade que apresentavam com relação à contradição. Ele caracterizava o seu próprio objetivo como o de "alterar a *atitude* em face da contradição e das demonstrações de consistência. (*Não* mostrar que esta demonstração mostra algo desimportante. Como é que *poderia* ser assim?)" (*Foundations* II–82)

Entre as principais convicções às quais Wittgenstein acreditava estarmos inclinados, e que ele desejava alterar, estão (cf. Wright 1980: 296–7):

(a) Um cálculo com uma contradição é de algum modo *essencialmente* defeituoso.

(b) Quando uma contradição vem à tona, algum tipo de ação remediadora nos é racionalmente exigida — não podemos apenas deixar estar.

(c) Há uma tal coisa como a lógica ou a teoria de conjuntos *correta*, e os paradoxos mostram que não a encontramos.

(d) Para qualquer ramo particular da matemática, é desejável que ele seja arrumado de tal forma que as contradições possam ser evitadas *mecanicamente*.

(e) As demonstrações de consistência são necessárias — ou ao menos desejáveis. Um sistema para o qual tal demonstração não foi apresentada, ou não é obtenível, é algo inseguro.

(f) Uma contradição oculta é tão ruim quanto uma contradição revelada. Um sistema contendo uma tal contradição é totalmente estragado por ela.

Segundo Wittgenstein,

> veremos a contradição sob uma luz bastante diferente ao olharmos para sua ocorrência e suas consequências como que antropologicamente — e ao olharmos para ela com a exasperação do matemático. Quer dizer, a veremos de maneira bastante distinta se meramente tentarmos *descrever* como a contradição influencia os jogos de linguagem, e se a virmos do ponto de vista do legislador matemático. (*Foundations* II–87)

O que o filósofo realmente almeja é *mudar o nosso olhar.* Agora, se tomarmos à letra a sua predição de que apenas uma mudança de olhar já seria suficiente para promover a emancipação da consistência, então parece que Wittgenstein *é* um dos proponentes do paradigma da paraconsistência (cf. Goldstein 1989: 541).

Se ele nos tivesse dito ao menos como proceder! No entanto, como fica patente, Wittgenstein "não teve sucesso em colocar o problema de se isolar uma contradição em termos *logicamente viáveis*, isto é, ele não formulou realmente a ideia de uma lógica paraconsistente (e talvez ele nem a tivesse aceito se a houvera conhecido)" (cf. da Costa & Marconi 1989: 24, ênfase nossa).

3. Seria possível formulá-la a partir de sua obra?

Uma contribuição fundamental da paraconsistência terá sido a distinção entre inconsistência e trivialidade: enquanto a primeira é uma característica no máximo indesejável do cálculo, a segunda representa a sua ruína, pois o cálculo deixa de "fazer a diferença" (cf.Marconi 1984: 336). Seu mote é dado por da Costa, um de seus fundadores, que afirma que "do prisma sintático-semântico, toda teoria matemática é admissível, desde que não seja trivial" (da Costa 1959: 18).[5] Gilles-Gaston Granger descreve a lógica paraconsistente como um "recurso provisório ao irracional", por manter um indício do racional [sic], que é a condição de não-trivialidade, e outro indício do irracional, que é a presença possível de contradições, presença esta a ser justificada filosoficamente (cf. Granger 1998: 175). A diferença capital no caso de Wittgenstein é que o filósofo não aborda a questão da trivialidade, "e pode-se duvidar mesmo se Wittgenstein, tendo bem ponderado a constituição de uma nova matemática, de um novo cálculo contraditório, teria considerado como possível e apresentando algum interesse a *formulação* de uma *lógica* da contradição, a formulação de suas *regras*" (Granger 1998: 178–9).

Mas afinal, o que Wittgenstein realmente propõe que façamos com as contradições? "A contradição deve ser vista não como uma catástrofe mas como um muro indicando que não podemos entrar aqui" (*Zettel* §687). Para a tarefa de construir um sistema dedutivo inconsistente porém não-trivial, "Wittgenstein oferece a intrigante sugestão de que deveríamos prescrever que nenhuma conclusão se extraia da contradição. No sistema que ele tem em mente há dois tipos de regra, permissões e proibições" (Goldstein 1977: 371). Se é verdade que tudo segue de uma contradição, então tomemos como regra que não hemos de tirar conclusões quaisquer a partir de contradições (*Lectures* XXI: 209). Permitiremos contradições em nossas teorias, mas mesmo assim não admitiremos que tudo o mais siga daí.

Podemos talvez considerar que tais comentários de Wittgenstein "são e não são paraconsistentes" (Granger 1998: 176). O trabalho de montar sistemas lógicos capazes de evitar a ocorrência das condições contraditórias que geram paradoxos tais como o de Russell é na verdade um empreendimento completamente distinto daquele a que se propõe Wittgenstein. Assim é que, em um primeiro momento, para Wittgenstein, "a *solução* para o paradoxo consiste em detectar a condição contraditória, e livrar-se das analogias imprecisas" (Goldstein 1983: 153). As antinomias hão de desaparecer por meio de uma *análise*, não por meio de uma *demonstração* (*Vienna*: 121–2). Assim como os problemas filosóficos, elas devem ser dissolvidas. Isto pode ser feito, por exemplo, ao demonstrarmos que as sentenças que geram os paradoxos não têm uso no jogo da asserção, sendo portanto sentenças sem sentido, e falhando consequentemente em constituir proposições. Como somente proposições podem ser verdadeiras ou falsas, estas sentenças não são nem verdadeiras nem falsas, e sua conjunção não forma uma contradição (*Vienna*: 124). Com efeito, a ideia de que as contradições não seriam proposições pode ser encontrada em toda a obra de Wittgenstein, desde o *Tractatus* (compare, por exemplo, 4.064 com 4.461, ou 4.01 com 4.462, ou finalmente 3.13 e 3.31 com 6.11), até sua filosofia posterior: a contradição de Russell poderia ser entendida como supra-proposicional, algo que se eleva como uma torre sobre todas as proposições e olha para ambas as direções, como uma cabeça de Jano (*Foundations* III–60).

Na segunda filosofia de Wittgenstein, o significado, ou o sentido, não são propriedades das sentenças abstraídas de um jogo de linguagem, jogo este que serve de articulação entre linguagem e realidade. Daí a afirmação de que "você não compreende a proposição até que tenha encontrado a aplicação" (Foundations IV–25). Wittgenstein insiste: a única razão que poderia nos levar a evitar as contradições seria sua falta de utilidade nos nossos jogos de linguagem cotidianos. Pois o jogo da contradição só pode ser, no máximo, um jogo de linguagem que nos é inútil (*Lectures* XXI: 207–9). Em certos momentos Wittgenstein assume uma posição extremada e afirma que nos jogos "úteis" não há contradição, até porque não a permitiríamos (*Foundations* II–80). No mais das vezes, porém, ele tenta imaginar situações em que as contradições fossem admissíveis, ou até mesmo desejáveis. Nos nossos jogos de linguagem mais simples, por exemplo, poderíamos ordenar a alguém: "Feche a porta e não feche a porta." Ora, se nosso propósito fôra o de produzir espanto e indecisão, que sucesso! (*Foundations* III–57) Até mesmo para o Paradoxo do Mentiroso — "eu estou mentindo" — deveríamos ser capazes de imaginar vários usos na nossa vida (*Foundations* V–30). Com efeito, podemos atribuir diversos usos diferentes à contradição nos nossos jogos de linguagem. Em teoria, podemos até mesmo acrescer-lhe novos significados e transferir alguns de seus usos para a matemática (*Lectures* XVIII: 174–6). O importante é deixar claro que não temos razões *a priori* para simplesmente proibir as contradições, pois elas poderiam eventualmente ser úteis em algum jogo. Wittgenstein aqui não nos brinda exatamente com uma rica dieta de exemplos indicando quais práticas que incluem a contradição estariam entre os jogos que as pessoas realmente jogam. Ele sugere, porém, alguns usos possíveis, por exemplo, caso desejássemos descrever a mudança por meio da contradição, e disséssemos de um objeto em movimento que ele está e não está em um determinado lugar (*Foundations* V–8), ou caso desejássemos demonstrar que tudo neste mundo é incerto (*Foundations* II–81).

Poderíamos imaginar situações em que alguém se orgulhasse de ter conseguido produzir uma contradição onde outros falharam. Ou que as pessoas jamais utilizassem os paradoxos para nada, mas estivessem felizes de viver suas vidas na *vizinhança* de uma contradição (*Foundations* II–81). Já no caso em que desejássemos produzir uma contradição com propósitos estéticos, por exemplo, aceitaríamos com hesitação uma demonstração de consistência, pois ela evidenciaria para nós a esterilidade de nossos esforços (*Foundations* II–82).

Em suas palestras em 1939, Wittgenstein tinha como aluno o matemático inglês Alan Turing, e é este quem o chama de volta à matemática. O que acontece, pergunta Turing, se temos um sistema de cálculo que é inconsistente, mas no qual a contradição está oculta? Alguma coisa ruim pode ocorrer, como por exemplo ao aplicarmos este sistema ao cálculo de uma ponte que, após construída, cai (*Lectures* XXII: 211). Poderíamos abonar a empresa construtora apontando um defeito intrínseco do cálculo utilizado? Poderia ter ocorrido um erro da engenharia e não do engenheiro? O cálculo trivial ainda é um cálculo? Wittgenstein se irrita profundamente com a ideia de que possa haver uma contradição *oculta* no cálculo. Diz ele: "Se a contradição está tão bem escondida que ninguém a nota, porque não deveríamos denominar o que fazemos agora um autêntico cálculo?" (*Foundations* V–12) Se temos um método para encontrar tal contradição oculta, então basta aplicá-lo. Ao encontrá-la, remendamos a teoria, se for o caso, de modo a evitá-la (*Vienna*: 120, 124–6, 194–5 e 199–200). Mas se não dispomos de um critério de busca, Wittgenstein sustenta que não faz qualquer sentido dizer que a contradição está "oculta" (*Vienna*: 201, 174 e 195–6). Por outro lado, talvez nós simplesmente não estejamos conseguindo enxergá-la — e quem sabe no fim das contas ela nem seja tão perigosa assim! (*Foundations* II–88)

> Em um sistema gramaticalmente elucidado, não há contradições ocultas, pois uma regra deve ser e é dada para se encontrar contradições. Uma contradição só pode estar oculta aos sentidos ou então oculta por assim dizer na "barafunda" das regras, na parte desordenada da gramática. (*Grammar*: 305)

As respostas de Wittgenstein a Turing são realmente bem pouco satisfatórias. Turing duvidava, por exemplo, de que fosse possível, como queria Wittgenstein, estabelecer uma regra que nos impedisse de tirar conclusões da contradição, ou que pudéssemos evitar a trivialização do cálculo simplesmente evitando usar uma contradição conhecida: haveria outros caminhos, sem passar diretamente pela contradição (*Lectures* XXII: 220), e caminhos pelos quais talvez nem percebêssemos estar passando. Certamente não faria sentido, como propunha Wittgenstein, tomar "a parte saudável do cálculo", de que dispúnhamos antes da inconsistência aparecer (*Vienna*: 196–7). Ora, de fato há uma boa parte do cálculo de Frege, por exemplo, que independe das premissas contraditórias, mas é fato também que a contradição pode ainda nele ser gerada sem grande esforço. Ficava difícil assim defender a proposta de que não deveríamos tirar conclusões quaisquer de uma contradição (*Lectures* XXII: 220), ou de que deveríamos encontrar um modo de não prosseguir a partir de uma contradição (*Lectures* XXIII: 223), ficava difícil defender que uma teoria inconsistente pudesse ser não-trivial. Como deveríamos proceder, professor? "Você parece estar dizendo que se usarmos um pouco de bom senso ninguém se sairá mal", insinuou Turing. "Não", redarguiu Wittgenstein, "absolutamente NÃO é isso o que eu quero dizer" (*Lectures* XXII: 219). Mais adiante ele dirá que não é o senso comum, mas quem sabe algo parecido: a nossa educação, ou treinamento, talvez (*Lectures* XXIII: 223). Contudo, numa carta a Moore, em 1944, Wittgenstein afirma claramente que as contradições deve ser resolvidas pelo "senso comum" (*apud* Hallett 1977:

656). Isto certamente condiz ao espírito do filósofo cujo slogan era: “Não trate o seu senso comum como um guarda-chuva. Ao entrar em uma sala para filosofar, não o deixe do lado de fora, mas o traga consigo.” (*Lectures* VI: 68)

Uma analogia que seduz longamente Wittgenstein é a do cálculo que contém uma contradição visto como um corpo que contém o germe de uma enfermidade. “Acredita-se que uma contradição oculta, tal qual uma doença oculta, cause danos, embora (e talvez justamente porque) ela não se mostre claramente” (*Grammar*: 303). Então, argumentaríamos, encontrar uma contradição em um sistema, assim como um germe em um corpo que em caso contrário estaria saudável, mostraria que o sistema ou corpo como um todo está doente? “De modo algum”, diria Wittgenstein (*Lectures* XIV: 138). “A contradição nem mesmo falsifica coisa alguma. Deixe-a ficar. Não entre lá.” O que significaria dizer que o corpo poderia estar doente, porém não dispomos de nenhum exame possível para verificá-lo? (*Remarks*: 338) A ideia de que mesmo assim pudéssemos estar fatalmente enfermos seria uma espécie de hipocondria. Wittgenstein simpatiza mais com a comparação da contradição com um sintoma, do que com um germe. A contradição seria assim apenas um sintoma (local) da doença de todo o corpo do cálculo (*Foundations* II–80). Mas ela também não precisa ser sintoma de doença alguma . . .

Um interessante exemplo de Wittgenstein ajuda a esclarecer uma conduta possível para o caso em que encontrássemos uma contradição no nosso jogo:

> Suponha que haja uma contradição nos estatutos de um determinado país. Poderia haver uma lei segundo a qual em dias de comemoração o vice-presidente devesse se sentar próximo ao presidente, e uma outra lei segundo a qual ele devesse se sentar entre duas damas. Esta contradição pode passar desapercebida por algum tempo, se o vice-presidente estiver constantemente doente nos dias de comemoração. Mas eis que um dia ocorre uma comemoração e ele não está doente. Então o que fazemos? Eu diria: “Precisamos nos livrar desta contradição.” Tudo bem, porém isto corrompe o que fazíamos antes. De maneira alguma. (*Lectures* XXI: 210)

Neste caso, até que tivéssemos encontrado a contradição, até o dia da comemoração à qual o vice-presidente finalmente compareceu, não precisamos nos preocupar. Ao encontrá-la, fazemos finalmente algo a respeito, e mexemos nos estatutos. Mas eles já não eram estatutos, mesmo com a contradição embutida? E não funcionavam perfeitamente? O leitor talvez se divirta em observar que o exemplo acima é igualmente interessante por não figurar uma contradição inevitável, tal como ocorre com o conhecido Paradoxo do Barbeiro. Com efeito, o presidente (ou o barbeiro) poderia ser uma mulher, e neste caso não haveria, em princípio, qualquer dilema!

Ao viajar em uma estrada encontro um precipício e decido voltar. Mas isto não é “viajar”? No caso do sistema matemático no qual encontramos uma contradição, será que não estávamos fazendo matemática antes? (*Foundations* II–81) Bem, decerto estávamos fazendo matemática, mas matemática inconsistente. Sobre isto opinou Curry (1983): "A apresentação dos paradoxos [...], a qual foi feita na linguagem universal, levou muitas pessoas a afirmar que a linguagem universal é inconsistente. De fato ela é, se usada sem cuidado, e é de se presumir que a falta de cuidado cause danos a qualquer tipo de atividade."

O que nos teria impedido até agora de caminhar no sentido da trivialização? Um anjo bom, talvez. "Pode-se afirmar, creio eu: um anjo bom sempre será necessário, o que quer que você faça." (*Foundations* V–13)

A Metamatemática de Hilbert pretendia, por meio das demonstrações de consistência, demonstrar que não haveria contradições ocultas no sistema. Ora, uma contradição oculta que não tivesse simplesmente passado desapercebida nem fosse encontrável por meio de um critério preciso deveria se tratar, segundo Wittgenstein, de uma contradição acrescida ao sistema por um tipo novo de construção, não previsto — como no caso da construção dos enunciados auto-referentes que geram os paradoxos. O filósofo propõe que não atentemos a construções como a de Russell; deveríamos antes rejeitá-las (*Lectures* XXIII: 222-5). Da mesma forma, Wittgenstein acreditava que nenhuma descoberta metamatemática poderia produzir um sistema imune à possibilidade destas construções — só mesmo um anjo bom poderia fazê-lo.

4. Uma mudança de olhar?

Wittgenstein realmente acredita que o matemático cria os problemas nos quais ele se perde. "O matemático é um inventor, não um descobridor", afirma o filósofo (*Foundations* I–167). A respeito do método da diagonal de Cantor, por exemplo, ele diz que tal procedimento não tem qualquer emprego prático; mais ainda, seu emprego não está para ser descoberto, mas *inventado* (*Foundations* I–9). Do matemático que encontrou uma contradição no cálculo, Wittgenstein diz que *adicionou* algo ao cálculo, que criou um novo cálculo (*Lectures* XXIII: 225).

"O matemático cria essência" (*Foundations* I–32). Mas na segunda filosofia de Wittgenstein a essência é aquilo que nos é dado pelos critérios, normas e convenções gramaticais, ou seja, "a essência está expressa na gramática" (*Investigações* §371). A essência de um termo da linguagem não é uma espécie de entidade, mas algo que nos é dado pelo esclarecimento gramatical deste termo, cuja significação se define pela multiplicidade de seus usos na linguagem. Por isso, o que realmente preocupa o filósofo é o momento em que o matemático comum se permite ultrapassar as fronteiras do discurso matemático formal, e passa a interpretar seus objetos de estudo e falar a respeito de sua objetividade e realidade.

Um tal matemático por certo pensa que a utilidade essencial dos sistemas matemáticos puros é descrever determinadas estruturas conceituais e que a noção de verdade para estes teoremas corresponde a este ensejo. Alfred Tarski, em seu trabalho fundamental sobre o conceito semântico de verdade, afirma:

> Eu não penso que a nossa atitude frente a uma teoria inconsistente mudaria mesmo que decidíssemos por alguma razão enfraquecer o nosso sistema lógico de modo a privar-nos da possibilidade de derivar toda sentença de quaisquer duas sentenças contraditórias. (Tarski 1944)

Sob este ponto de vista, a inconsistência seria portanto um desastre, simplesmente por não estarmos dispostos a pensar nas estruturas como inconsistentes. O matemático comum não pensa que a matemática é um jogo, e que como um jogo ela não precisa *a priori* corresponder a qualquer padrão específico, a menos que lhe incumbamos da tarefa de descrever a *situação presente* (*Foundations* II–82), o que na matemática aplicada — a qual já era conhecida de Wittgenstein — consistia em *evitar* contradições e não *usá-las.* Por que razão, ao descobrirmos que este jogo é inconsistente, ele deixaria de ser jogável? Ou diríamos então que nos enganáramos, e que ele de fato nunca fôra jogável? (*Foundations* V–28) Tal é o matemático que, como Tarski, não considera aceitáveis as teorias inconsistentes, mesmo que não-triviais, por crer que tais teorias devam conter sentenças falsas. Mas Wittgenstein está aqui para fazer a crítica da tendência de se enxergar a verdade do Princípio da Não-Contradição como algo que deva *seguir* obrigatoriamente do significado da negação e da conjunção ("produto lógico") e assim por diante (*Lectures* XIX 184). Wittgenstein rejeita qualquer distinção entre o significado e o uso real dos símbolos, e acrescenta: "O sistema de regras determinando um cálculo determina assim também o 'significado' de seus termos." (*Remarks*: 178)

Wittgenstein se refere com mofa ao "temor e veneração supersticiosa dos matemáticos em face da contradição" (*Foundations* Ap. I–17). Na realidade, o único interesse que ele encontra na contradição inventada [sic] por Russell está no tormento que ela tem proporcionado às pessoas (*Foundations* Ap. I–13). Contudo, as ilações que elas retiram dali, digamos, sobre o caráter transcendente da contradição, o grau de certeza ou de verdade dos sistemas de cálculo, e outros quetais, isto sim preocupa o filósofo. Pois o matemático comum parece crer que entre dois sistemas, um que é reconhecidamente consistente, e outro cuja consistência não foi confirmada, o primeiro tem fundamento mais sólido, ou é metafisicamente mais verdadeiro do que o segundo. Wittgenstein observa que "uma coisa é usar uma técnica matemática que consista em evitar contradições, outra bem diferente é filosofar contra a contradição na matemática" (*Foundations* III–55). É preciso "extrair o espinho metafísico" aqui encravado (*Foundations* V–9).

Por que as pessoas têm medo das contradições? "Acima de tudo, o que deve impressionar o observador incauto é que os matemáticos estejam continuamente aterrorizados por *uma* coisa, que é um tipo de pesadelo para eles, que é a contradição"

(*Vienna*: 131). Wittgenstein até se dispõe a compreender que temamos a contradição *fora* da matemática, porém não *dentro* dela. Pois se uma ponte cair, nosso erro terá sido simplesmente o de ter feito uso de uma lei natural errada. Todavia, Turing afirma que não podemos ter confiança no nosso cálculo até que tenhamos certeza de que nele não há contradições ocultas. Wittgenstein insiste que nós nunca realmente usamos as contradições: se alguém usasse o paradoxo de Russell para multiplicar, dificilmente diríamos que ele está multiplicando. Turing reformula sua objeção: não sabemos se a ponte não cairá se usarmos um cálculo sem contradições, mas se usarmos o cálculo com contradições, algo certamente dará errado! (*Lectures* XXII: 217–9)

Seriam realmente necessárias as demonstrações de consistência? "A demonstração de consistência não pode ser uma *questão de vida ou morte para a matemática.*" (*Vienna*: 141) Acredita-se que a demonstração de consistência seja necessária, pois em caso contrário corremos o risco de "cair no atoleiro a cada passo" (*Foundations* II–78). Mas as pessoas não parecem sentir cotidianamente tamanha necessidade de demonstrações de consistência, e depositam sua inteira confiança em sistemas matemáticos mesmo que lhes falte esta demonstração. Se uma contradição fosse realmente encontrada na aritmética, isso nos mostraria apenas que uma aritmética com uma *tal* contradição pode nos servir muito bem (*Foundations* V–28), como tem de fato servido. Caso tal contradição aparecesse decerto não estaríamos dispostos a abandonar todos os cálculos feitos pelos matemáticos ao longo dos séculos, nem muito menos diríamos que eles não teriam sido cálculos legítimos (*Remarks*: 346). O que Wittgenstein pretende combater são as convicções de que a presença de uma demonstração de consistência deveria nos dar necessariamente mais certeza do que a sua ausência, de que poderíamos dispor de um mecanismo que nos protegesse contra a contradição, de que não deveríamos confiar em um cálculo que não tenha sido demonstrado consistente, de que há tal coisa como um cálculo lógico *correto*, livre de contradições, de que a demonstração de consistência tem como *propósito prático* nos dar motivo para a predição: "Nenhuma desordem surgirá" (*Foundations* II–82 a 86).

Em conversa com Waismann, em dezembro de 1931, Wittgenstein lhe ouve formular o problema da consistência:

> Como saberei que uma proposição que demonstrei por métodos transfinitos não pode ser refutada por um cálculo numérico finito? Se, por exemplo, um matemático encontrar uma demonstração do Último Teorema de Fermat que faça uso essencialmente de métodos transfinitos — digamos o Axioma da Escolha, ou o Princípio do Terceiro Excluído na forma: ou a conjetura de Goldbach é válida para todos os números [pares maiores que 2] ou há um número para o qual ela não vale — como sei que tal teorema não pode ser refutado por um contra-exemplo? Isto não é nem um pouco auto-evidente. E

> no entanto é impressionante a confiança que os matemáticos depositam nos modos transfinitos de inferência, a tal ponto que, assim que uma tal demonstração for conhecida, ninguém mais tentará descobrir um contra-exemplo. Surge agora a questão: seria esta confiança justificável? Ou seja, estaríamos seguros em supor que uma proposição que tenha sido demonstrada por métodos transfinitos não poderá jamais ser refutada por um cálculo numérico concreto? (*Remarks*: 342–3)

Embora Wittgenstein pense que este é um problema mal posto, ele tece algumas considerações sobre vários outros problemas que medram ao seu redor. Para Wittgenstein, o que temos é um jogo, e uma aplicação do cálculo consiste em tomar as proposições verdadeiras e falsas como correspondentes a posições no jogo, e as regras de sintaxe como as regras do jogo: fornecemos desta maneira a gramática de uma linguagem. Para o filósofo parecia claro que uma contradição só poderia ocorrer entre as regras do jogo, mas não em suas configurações. A sintaxe não pode ser justificada, não há tal coisa como a justificação para um jogo (*Remarks*: 321–2; 344–5). As regras podem nos deixar em uma situação tal que não saibamos o que fazer. Imagine duas pessoas que jogam há muitos anos uma mesma partida de xadrez. Em certo momento, um deles faz um movimento e ambos exclamam: "Ganhei!" Terá necessariamente um deles se enganado? Suponha que D, um famoso jogador de futebol, dispute com G, um famoso jogador de tênis, uma espécie de partida híbrida de tênis-futebol. Em um certo momento, a bola bate na rede, e G grita: "Ponto!", ao passo que D grita: "Gol!" Encontraremos a contradição responsável por este desatino? E o que faremos com ela? Enfim, devemos reconhecer que "um cálculo é aplicável a tudo aquilo a que ele é aplicável" (*Remarks*: 323); mas é claro que com um pouco de imaginação e boa vontade sempre podemos conceber uma aplicação.

O que perturbava Wittgenstein não era que a contradição de Russell fosse uma contradição, mas que crescesse no corpo saudável da matemática como uma espécie de câncer ignoto, sem objetivo ou dor. Seu principal problema era a falta de aplicação e, portanto, de significado. Se o seu surgimento no nosso cálculo é tão furtivo, por que deveria ela estragar tudo? E por que deveríamos nos livrar dela? (*Foundations* V–8) Não há nada que nos force a dizer que "p e não-p" seja falso, isto é uma mera convenção. As contradições não têm que ser falsas, elas simplesmente são tomadas como falsas nos nossos jogos cotidianos. Wittgenstein não questiona o direito dos matemáticos e lógicos de impor restrições à matemática de modo a evitar contradições; o que ele quer questionar é a concepção vulgar de que tal restrição nos é imposta de fora.

Durante uma certa época, Wittgenstein pretendeu explicar porque as contradições "não funcionam", porém pouco mais tarde rejeitou tais tentativas, por espúrias. A ideia de que uma contradição não apenas *não funciona*, mas *não pode funcionar*, este era um preconceito que Wittgenstein haveria de censurar (*Lectures* XIX: 185).

Ao atribuirmos um novo significado a ela nós a eliminamos, pois a contradição não está senão na sentença que a expressa. Ou talvez sejamos nós, afinal, que não desejamos que ela funcione (*Lectures* XIX: 187). Em outros momentos, Wittgenstein tinha surtos "tractatianos", e observava que, tanto quanto as tautologias da lógica, as contradições não são proposições significativas; elas são, ao invés, fórmulas vazias, que nada dizem. Não deveríamos construí-las. Nas palavras do filósofo, não deveríamos substituir ξ por h em "$\xi \in h$" (*Foundations* V–21).

Por vezes recorremos a uma analogia mecânica para entender a contradição, e a comparamos por exemplo a uma engrenagem que emperra, e não pode se mover. Ora, Wittgenstein adverte, esta imobilidade é, no mais das vezes, psicológica. Não é que não possamos prosseguir, mas que não sabemos como fazê-lo. Este era o perigo da analogia: pensávamos estar explicando, quando na verdade estávamos apenas substituindo um simbolismo por outro (*Lectures* XVIII: 178–9). Construir ou detectar uma contradição não deve invalidar o que vínhamos fazendo antes, esta contradição só é realmente nociva quando nos faz paralisar o cálculo.

5. O que há de comum entre as ideias de Wittgenstein e aquelas expressas no projeto da lógica paraconsistente?

Ao longo do livro Γ da Metafísica, Aristóteles argumenta que o Princípio da Não-Contradição é o mais seguro de todos os princípios lógicos, uma vez que "é impossível que simultaneamente, e segundo a mesma relação, o mesmo atributo pertença e não pertença a um mesmo sujeito"(cf. Aristóteles 1986, 1005b 18–25). De maneira semelhante, no paradoxo de Russell, seria impossível que um objeto pertencesse e não pertencesse a outro objeto, mesmo que este objeto fosse ele próprio. Insurgindo-se contra a tradição aristotélica, o matemático polonês Jan Łukasiewicz publicou em 1910 no *Bulletin Internationale de l'Académie des Sciences de Cracovie* o artigo "Über den Satz des Widerspruchs bei Aristoteles" (Sobre o Princípio da [Não-]Contradição em Aristóteles), um escrito no qual ele propõe uma revisão fundamental das leis básicas da lógica de Aristóteles, revisão esta que conduziria a sistemas de lógica não-aristotélicos, do mesmo modo que a revisão das leis básicas da geometria de Euclides, promovida por vários matemáticos do século XIX, conduzira a sistemas de geometria não-euclidianos.

Para proceder à sua crítica, Łukasiewicz toma o texto de Aristóteles no original grego, e considera três formulações do Princípio da Não-Contradição (cf. Łukasiewicz 1971):

(a) *Ontológica:* nenhum objeto pode ao mesmo tempo ser e não ser tal e tal.
(b) *Lógica:* nenhuma proposição não-ambígua pode ser ao mesmo tempo verdadeira e falsa.

(c) *Psicológica:* ninguém pode acreditar que um mesmo objeto possa ao mesmo tempo ser e não ser.

Postas desta forma, é claro que nenhuma das formulações acima é idêntica em significado a alguma das outras. Não obstante, para Aristóteles, a formulação lógica e a formulação ontológica seriam logicamente equivalentes, dada a correlação um-a-um entre as proposições e os fatos objetivos (cf. Łukasiewicz 1971: 489). Além disso, segundo Łukasiewicz, Aristóteles se propõe a demonstrar o princípio na sua formulação psicológica a partir da formulação lógica, e aqui a argumentação de Aristóteles sofre as primeiras críticas incisivas de Łukasiewicz. Mas as críticas realmente decisivas são feitas aos argumentos por *elenchus* e por raciocínio *ad impossibile* que Aristóteles, mesmo propugnando a não-demonstrabilidade do Princípio da Não-Contradição, oferece para a demonstração, ou nosso convencimento, da validade deste princípio. Em seguida, Łukasiewicz rejeita a ideia de que este princípio pudesse ser *mais* fundamental do que os outros (cf. Aristóteles 1986, 1005b 32–34), já que há vários outros princípios que dele independem, tais como aqueles que subjazem à Teoria do Silogismo, além de toda a parte positiva do cálculo proposicional clássico (cf. Łukasiewicz 1971: 502–3). Łukasiewicz conclui que uma única formulação do Princípio da Não-Contradição poderia ser defendida, a saber:

(d) *Prático-Ética:* ninguém, em sã consciência, pediria (ou faria) ao mesmo tempo p e não-p.

Łukasiewicz se justifica dizendo que, neste caso, o Princípio da Não-Contradição é nossa "*única arma contra o erro e a falsidade*", e "*uma marca da incompletude intelectual e ética do homem*" (cf. Łukasiewicz 1971: 508, ênfases no original). Łukasiewicz diz ainda suspeitar que talvez fosse por desejar se defender a qualquer custo de seus oponentes e por também reconhecer este valor prático-ético que Aristóteles teria estabelecido este princípio como um *axioma* final, e um *dogma* inatacável (cf. Łukasiewicz 1971: 509).

É interessante observar que, naquele mesmo ano de 1910, sem ter conhecimento dos trabalhos de Łukasiewicz, o médico russo Vasiliev, trabalhando na Universidade de Kazan, na Rússia — o mesmo local onde anos antes seu compatriota Lobatchevski propusera a sua geometria imaginária, não-euclidiana — publicaria na própria universidade o trabalho "O častnyh suždéniáh, o tréugol'niké protivopolžnostéj, o zakoné isklučënnogo čétvërtogo" (Sobre os Juízos Particulares, o Triângulo das Oposições e o Princípio do Quarto Excluído), no qual ele vislumbrava a criação de uma lógica imaginária não-aristotélica.[6] Seguindo uma senda similar àquela trilhada por Łukasiewicz, Vasiliev propôs que o Princípio do Terceiro Excluído aparecia "na mente de Aristóteles com o objetivo de refutar seus adversários, e não por razões lógicas" (*apud* D'Ottaviano 1992: 81).

Por terem proposto a derrogação das leis básicas da lógica aristotélica, Łukasiewicz e Vasiliev podem sem dúvida ser vistos como pais daquelas que hoje são conhecidas como "lógicas não-clássicas". Mas parece que já seria demais querer vêlos como precursores da lógica paraconsistente. Łukasiewicz, por exemplo, encetou igualmente em seu trabalho uma crítica à lógica filosófica tradicional que vinha sendo feita até então, dizendo que ela "simplesmente não se preocupara com as distinções conceituais mais finas por não operar com conceitos agudamente delineados e símbolos determinados sem ambiguidade; ao contrário, ela afundou no charco do discurso fluido e vago usado na vida cotidiana" (cf. Łukasiewicz 1971: 94). Mas nem por isso diremos que Łukasiewicz é um precursor da filosofia analítica!

Alguns anos mais tarde, o matemático polonês Stanisław Jaśkowski, discípulo de Łukasiewicz, tomou para si o que entendeu ser um desafio deixado pelo mestre: encontrar uma lógica interessante e suficientemente rica que acomodasse inconsistências, permitindo a sua investigação consistente. Em 1948, Jaśkowski publicou na *Studia Societatis Scientiarum Torunensis* o trabalho intitulado "Rachunek zdan dla systemów dedukcyjnych sprzecznych" (Cálculo proposicional para sistemas dedutivos inconsistentes), cujo resumo inicial rezava:

> O autor discute as razões que o levam a buscar um cálculo proposicional ajustado às necessidades das teorias inconsistentes. Ele analisa a solução para este problema encontrada em vários sistemas de lógica já existentes e oferece uma nova solução. Ele constrói um novo cálculo proposicional, chamado discursivo (discussivo), definindo a implicação discursiva como: "Se é possível que p, então q", onde a função "é possível que p" é entendida de acordo com o significado dado por Lewis a ela no sistema $S5$. Uma série de teoremas deste cálculo é apresentada, juntamente com uma lista de certas proposições que são nele refutadas. (Jaśkowski 1948: 143)

Jaśkowski tomou como paradigmas o discurso e a situação de uma discussão, e se fez a seguinte questão: "É o caso que p?" O Princípio do Terceiro Excluído, da lógica clássica, nos ensina que a resposta aqui só pode ser *sim* ou *não*, enquanto que o Princípio da Não-Contradição elimina a possibilidade de que optemos por ambas as respostas, por sim *e* não. Mas, raciocinou Jaśkowski, quando fazemos um discurso é frequente que desejemos considerar ambas as possibilidades de uma só vez. Do mesmo modo, durante uma discussão, ao defendermos p devemos respeitar, por uma questão de honestidade, um oponente que afirma não-p. A lógica subjacente a esta situação não pode portanto ser a clássica, a menos que façamos algumas restrições, como abandonar o Princípio do Pseudo-Escoto (vide seção **1.**). Afinal, em discussões reais entre oponentes sérios e honestos as inconsistências que porventura aparecerem nem explodem nem lotam o discurso.[7]

No final da década de 50 e início da de 60, o lógico brasileiro Newton da Costa publicou de forma independente seus primeiros trabalhos no estudo de teorias que dessem suporte a contradições.[8] Segundo da Costa, os principais objetivos da lógica paraconsistente, inicialmente chamada por ele de *teoria dos sistemas formais inconsistentes*, seriam (cf. da Costa 1994: 174):

(a) Estabelecer técnicas lógico-formais capazes de nos permitir a melhor compreensão das estruturas lógicas subjacentes às concepções dos partidários da dialética.
(b) Contribuir para o próprio entendimento das leis da lógica clássica.
(c) Estudar o esquema da separação da teoria de conjuntos [ou, dito de outra forma, o Princípio Restrito da Abstração, (PRA), vide seção 2], quando se enfraquecem as restrições a ele impostas.
(d) Contribuir para a sistematização e o balanço de teorias novas que encerrem contradições e de antigas que, por esse motivo, foram abandonadas ou praticamente relegadas a segundo plano.
(e) Colaborar para a apreciação correta dos conceitos de negação e de contradição.

Da Costa introduziu uma hierarquia de cálculos proposicionais paraconsistentes (cf. da Costa 1974), estendendo-a em seguida a cálculos de predicados de primeira ordem, cálculos de predicados de primeira ordem com igualdade, cálculos de descrições e teorias de conjuntos inconsistentes porém não-triviais.[9]

A primeira importante lição que podemos depreender do trabalho destes lógicos é de que os princípios lógicos são tão evidentes quanto as leis da geometria — isto é, eles não têm evidência alguma. Wittgenstein faria observação semelhante, em suas palestras sobre a matemática, e acrescentaria: "Afirmar que a lógica é auto-evidente, querendo dizer que ela produz uma impressão particular, não nos ajuda em nada" (*Lectures* XVIII: 174). O filósofo assume que podemos negar os princípios da Não-Contradição e do Terceiro Excluído (*Foundations*, Ap. I–18), e também tenta conceber situações em que o princípio da Identidade não valeria (*Foundations* I–132, V–31, V–33). Frege decerto não teria concordado com estas manobras: segundo ele, aquele que não reconhece um princípio lógico, como o da Não-Contradição, padece de "um tipo não diagnosticado de loucura" (cf. Frege 1967: 14). Wittgenstein conhecia este parecer de Frege (*Lectures* XXI: 202), porém reiterou: "As leis da lógica, por exemplo, Terceiro Excluído e [Não-]Contradição, são arbitrárias. Esta afirmação repugna um pouco, não obstante verdadeira." (*1932-1935*: 71)

Com relação à filosofia da paraconsistência, é possível fazer uma separação entre duas posturas distintas: a primeira delas, que denominaríamos "posição fracamente paraconsistente", admite inconsistência em algumas teorias não-triviais, ou seus análogos, tais como a linguagem ou o pensamento, a outra, a "posição fortemente paraconsistente", também denominada *dialeteica*, admite contradições no mundo real (cf. Priest & Routley 1989: 4). Não é difícil filiar Wittgenstein na primeira escola, mas há quem afirme que é possível mesmo apontar tendências dialeteístas na segunda filosofia de Wittgenstein, tendências que se mostravam tão maiores quanto maiores se tornavam as indisposições do filósofo com relação às correntes fundacionalistas em matemática (cf. Goldstein 1989: 551–7).

Ambas as posições fraca e fortemente paraconsistentes têm sido extensamente criticadas por filósofos, por variadas razões. Como da Costa apontara já em 1958:

> Em virtude do clássico Princípio da [Não-]Contradição, uma proposição e sua negação não podem ser verdadeiras ao mesmo tempo; daí não ser possível uma teoria válida do ponto de vista filosófico (ou lógico) encerrar contradições internas. Supor o contrário constituiria, aparentemente, um erro filosófico. (da Costa 1958: 6–7)

Filósofos como Wright (1980: 298, 303 e 310) sustentam que os sistemas inconsistentes são duplamente problemáticos: (1) com relação à sua aplicabilidade, e (2) com relação à sua noção de verdade. No que concerne (1), Wright argumenta que sistemas inconsistentes devem eventualmente acabar por permitir a inferência de conclusões falsas a partir de premissas verdadeiras. Verificamos contudo (cf. por exemplo Marcos 1999, em especial seções 2.2.1 e 2.3.3.1) que nas semânticas que temos usualmente associadas às lógicas paraconsistentes isto simplesmente não é o caso — é possível de fato oferecer-lhes semânticas *adequadas* (isto é, corretas e completas), nas quais este fenômeno não ocorre.[10] Com relação a (2), Wright acredita que sistemas inconsistentes sejam simplesmente incapazes de descrever quaisquer tipos de estruturas, reais ou hipotéticas. Neste sentido, está claro que ele não considera a possibilidade de que as estruturas sejam elas próprias inconsistentes, porém não-triviais.

Já no início do século XX, Meinong propusera uma teoria de objetos que incluía objetos inconsistentes, isto é, objetos com propriedades contraditórias, tais como o quadrado redondo, o maior número primo, ou o conjunto construído por Russell em seu paradoxo. Russell criticou apropriadamente a teoria de Meinong por violar uma certa forma do Princípio da Não-Contradição (cf. Priest & Routley 1989: 24–5), mas está claro que tal crítica perderia todo o vigor caso fôra utilizada na construção da teoria meinongiana uma lógica paraconsistente na qual aquele princípio não fosse, em geral, válido. Não por acaso, observamos que já Łukasiewicz se inspirara na teoria meinongiana em sua revisão ao Princípio da Não-Contradição (cf. Łukasiewicz 1971: 506–7).

No que diz respeito à ontologia das lógicas paraconsistentes uma interessante tese foi defendida por da Costa (1982, cf. ainda o verbete *Paraconsistency*, em Burkhardt e Smith 1991). Resgatando a máxima de Quine (1953, cap. I): “Existir é ser o valor de uma variável” — donde o comprometimento ontológico de nossas teorias seria medido pelos domínios de suas variáveis, isto é, existiria tudo aquilo que pode ser tomado como o valor de uma variável —, da Costa propôs a seguinte ampliação: "Existir é ser o valor de uma variável em uma dada linguagem com uma determinada lógica." Assim, da Costa abre espaço para o aparecimento de diferentes ontologias baseadas em diferentes tipos de lógica, analogamente ao que acontecera no século XIX com o aparecimento das diferentes geometrias baseadas em diferentes conjuntos de axiomas. Deve-se notar que isto nos afasta radicalmente da visão wittgensteiniana acerca da matemática: ao que tudo indica, o filósofo dificilmente aceitaria a ideia de que os jogos que definem a matemática, mesmo que pudessem ser múltiplos, requeressem qualquer espécie de "comprometimento ontológico".

6. Quais as origens da postura de Wittgenstein frente à contradição e à consistência?

Não precisamos sequer destacar as críticas que Wittgenstein faz ao intuicionismo, ao formalismo e ao logicismo, as três escolas hegemônicas da filosofia da matemática do século XX, para já compreendermos a desconfiança com que o filósofo vê a própria ideia de que deveria haver um fundamento para a matemática.

> Para que a matemática precisa de um fundamento? Ela não precisa de um, creio, mais do que as proposições sobre objetos físicos — ou sobre impressões dos sentidos, precisam de uma *análise*. O que as proposições matemáticas realmente precisam é de uma clarificação de sua gramática, assim como o precisam aquelas outras proposições. (*Foundations* V–13)

Assim é que Wittgenstein critica Frege por praticar o que Wittgenstein denominou "física do reino intelectual", já que Frege insiste que podemos verificar as proposições por inspeção direta através de uma espécie de sentido do intelecto (*Lectures* XVIII: 172). Pois não é verdade que sejamos obrigados a entender a demonstração matemática como um meio de descobrir verdades acerca de um mundo matemático de existência independente — isto consistiria numa espécie de história natural (*Naturgeschichte*) dos objetos matemáticos, donde a aritmética, por exemplo, se constituiria na "história natural (mineralogia) dos números" (*Foundations* III–11) — que Wittgenstein rejeita inteiramente. Nada nos obriga a crer que as proposições matemáticas descreveriam entidades abstratas, ou a realidade empírica, ou o funcionamento transcendental da mente. Similarmente aos conceitos de sensações e de cores, os conceitos matemáticos não se referem a objetos específicos cuja existência está garantida pelo simples uso de tais conceitos. Assim é que Wittgenstein desaconselha, por exemplo, o uso da palavra "infinito" no cálculo onde quer que ela confira significado ao cálculo, ao invés de extrair significado dele (*Foundations* Ap. II–17).

Segundo Moreno (1993: 52), “as provas [isto é, as demonstrações matemáticas] são imagens que exprimem aquilo que será considerado como a essência”, elas nos encantam, funcionam como um referencial normativo, e logo em seguida afirmamos que não é possível pensar de outra forma. Em jogos complexos como os jogos matemáticos é muito fácil que nos deixemos conduzir pelas imagens introduzidas pelas próprias demonstrações, imagens que acabam exercendo força sobre o nosso pensamento, e nos obrigando a pensar em uma direção determinada, fixando nossas referências. São as imagens que levam o matemático a fazer afirmações de caráter metafísico acerca dos “fatos matemáticos”, ou da “objetividade e a realidade dos fatos da matemática”. Moreno afirma que a própria atividade filosófica de Wittgenstein se converte, em sua segunda filosofia, em uma luta contra a força das imagens, a qual Moreno denomina “terapia gramatical”. Assim, ainda que possamos decerto afirmar que o domínio da matemática é de certa forma privilegiado, uma vez que nele se trabalha com definições rigorosas e exatas visando a aplicações precisas (Moreno 1993: 51), a descrição gramatical dos conceitos exatos da matemática ainda dependeria de que aceitássemos “inserir tais conceitos na multiplicidade dos usos, olhar para suas diferentes aplicações, efetivas, possíveis, e mesmo inusitadas” (Moreno 1993: 32).

Mas o que devemos entender por “gramática”? Este é um termo usado por Wittgenstein para designar tanto as regras constitutivas da linguagem quanto a investigação ou a organização filosófica destas regras (cf. o verbete *Gramática*, em Glock 1998). Podemos contribuir à gramática de um enunciado (matemático) fornecendo proposições nas quais ele está sendo usado, esclarecendo o que temos em mente, respondendo sobre a espécie e a possibilidade de sua verificação. A gramática também nos diz que certas combinações de palavras não têm sentido, e isto implica na sua retirada de circulação, na sua exclusão da linguagem (*Investigações* §499–500). Em um certo momento Wittgenstein chega a afirmar que “está com efeito na gramática da palavra ‘regra’ que ‘p & $\neg p$’ não seja uma regra (se p é uma regra)” (*Grammar*: 304). Daí, não teria sentido assim falar em regra contraditória, simplesmente porque, caso ela se contradiga, ela não seria uma regra! Isto parece mesmo muito estranho. . . Lembremo-nos contudo de que também o Princípio da Não-Contradição faz parte da nossa gramática, e Wittgenstein não pensa que devamos abrir mão dele só porque encontramos situações — na física quântica, por exemplo — em que ele aparentemente não funciona, uma vez que ir contra este princípio só faz produzir proposições sem sentido no *nosso* jogo de linguagem. É claro que este jogo de linguagem poderia ser completamente distinto do que é, consistindo, por exemplo, em ficar continuamente passando de uma decisão para a decisão contrária — e neste caso uma contradição poderia ter um papel importante (*Zettel* §685–6). “Aqui temos o método de Wittgenstein em funcionamento: procuremos pelos usos de uma expressão; não assumamos que uma expressão tem um uso único ou que não tem uso algum. Então, tomando a contradição, ao invés de asseverarmos *a priori* que ‘p e não-*p*' é sempre sem sentido, consideremos a multiplicidade de usos que lhe damos. E se não conseguirmos encontrar um uso, recordemos que sempre podemos criar um." (cf. Arrington 1969: 40)

Um ponto deve ficar aqui bem claro: para Wittgenstein, a verdade de uma proposição matemática é fruto de nossas convenções, porém estas não são estipuladas arbitrariamente. Ao contrário, elas se baseiam no consenso, não um consenso no sentido de que todos concordamos em atingir *certos resultados*, mas no sentido de que todos *concordamos* em atingir tais resultados. Não se trata de um consenso de opinião, mas de um consenso de ação (*Investigações* §241, *Lectures* XIX: 183–4). "Concebemos a regra [...] devido à concordância na ação — ou seja, de que se percorrêssemos estes passos, quase todos obteríamos os mesmos resultados. E esta regra se torna então um padrão de medida. A regra não exprime uma conexão empírica mas a concebemos porque há uma conexão empírica." (*Lectures* XXX: 291–2) É esta a natureza do convencionalismo de Wittgenstein. As regras não são completamente arbitrárias, pois decorrem da racionalidade da nossa mitologia, expressam necessidades naturais. A essência é vista como uma convenção que organiza nossas impressões sensíveis. Wittgenstein explica que o uso que damos à linguagem se ajusta à nossa forma de vida (*Lebensform*), este curioso entrelaçamento entre cultura, visão de mundo e linguagem. O problema é que as pessoas nem percebem, por exemplo, que é este ajuste que as faz atribuir inexorabilidade às demonstrações matemáticas: elas não notam que "um certo paradigma paira ante o olho de sua mente, e elas desejam *alinhar* o cálculo com este paradigma." (*Remarks*: 346)

Devemos ter sempre em mente o fato de que Wittgenstein trabalha com uma perspectiva antropológica da matemática, como parte da história natural da humanidade. Para o filósofo, a matemática constitui-se de uma família de atividades destinadas a uma família de projetos (cf. o verbete *Matemática*, em Glock 1998). Se na primeira filosofia de Wittgenstein a desconfiança com relação à gramática estava na ordem do dia, pois a forma "gramático-normativa" das proposições poderia disfarçar sua forma lógica, em sua segunda filosofia a gramática substitui a própria sintaxe lógica. Mas se a sintaxe lógica era universal, a gramática não o é — diferentes línguas possuem diferentes gramáticas (cf. o verbete *Gramática*, em Glock 1998). Para mostrar que a própria matemática poderia ser bastante diferente da matemática que conhecemos, Wittgenstein abre as portas da filosofia para uma multitude de alienígenas, animais selvagens, tribos primitivas e indivíduos de países exóticos e distantes, os quais, graças às suas diferentes histórias naturais e formas de vida, ilustram modelos alternativos de matemática, nos quais a contagem ou a medição funcionam de maneira diferente das nossas, a multiplicação dá resultados que são diferentes dos que obteríamos, ou são simplesmente arbitrários, a contradição é um instrumento não apenas permitido, mas bastante útil. Em *Foundations* V, Wittgenstein parece crer que estes jogos de linguagem imaginários nos ajudam a compreender que, se a nossa história natural tivesse sido outra, a nossa matemática poderia muito bem ter sido a mesma que a dos alienígenas. Mas em *Lectures* XXIII ele já é mais precavido, e se afasta desta sorte de exemplos, reconhecendo o perigo que há em aplicar um mesmo conceito em contextos linguísticos muito diferentes ou muito mais gerais do que de costume, pois é difícil decidir o ponto em que teremos esticado nossos conceitos para além do limite das semelhanças de família (*Familienähnlichkeit*), como quando aplicamos o conceito de cálculo em situações nas quais já é difícil reconhecer qualquer tipo de cálculo.

6.1. Contra a Metamatemática, I

"A gramática não diz como a linguagem deve ser construída a fim de realizar seu objetivo, a fim de ter tal ou qual efeito sobre os homens. Ela apenas descreve, e de modo algum explica o uso dos signos." (*Investigações* §496) Com efeito, a gramática não nos diz como construir o nosso cálculo, ou nenhum outro cálculo. Suponhamos todavia que realmente desejássemos construir um cálculo, e desejássemos ainda que ele fosse tal que coibisse as contradições lógicas. Ora, para Wittgenstein esta prescrição já deveria constituir ela própria uma lei lógica (*Lectures* XXII: 214). Ao fazermos considerações metateóricas acerca do uso da palavra "física", sobre a admissibilidade e a adequação das leis da física, sobre a sua aplicação ou seus construtos teóricos, então o que fazemos é uma espécie de metafísica. Mas se fazemos considerações acerca da filosofia, da linguagem ou da matemática, estas considerações já são, por sua vez, respectivamente filosóficas, linguísticas ou matemáticas. Wittgenstein insiste que não há tal coisa como uma filosofia de segunda ordem, ou metafilosofia, quando a filosofia fala do uso da palavra "filosofia", assim como a ortografia também diz respeito ao uso da palavra "ortografia", mas nem por isso "ortografia" seria uma palavra de segunda ordem (*Investigações* §121). Tais observações se inserem em um contexto mais amplo, no qual a rejeição de tais "metadisciplinas" é para Wittgenstein princípio básico de sua filosofia (cf. o verbete *Metalógica /-matemática /-filosofia*, em Glock 1998). É aqui que se reintroduz a proposta wittgensteiniana de rejeição das correntes fundacionalistas da filosofia e da matemática, pois o filósofo entende que a metamatemática consiste apenas na mesma e velha matemática disfarçada, e as tentativas de fundamentar esta matemática, como a de Hilbert com a sua Metamatemática, estariam portanto equivocadas em princípio, por se limitarem meramente à produção de novos cálculos matemáticos. "O que Hilbert está fazendo é matemática e não metamatemática. É mais um cálculo, exatamente igual a qualquer outro" (*Vienna*: 121). Mas não, sustenta Wittgenstein, nenhuma parte da matemática pode garantir *absolutamente* uma outra parte da matemática. Para Curry (1958: 276), de fato, uma tal convicção formalista "pode ter sido inspirada nos 'elementos de filosofia idealista alemã' que se escondem por trás da concepção do programa de Hilbert." A partir da perspectiva wittgensteiniana, de toda forma, o metacálculo não seria uma teoria do cálculo, mas apenas mais um novo cálculo. A expressão da consistência do cálculo não se daria através de uma proposição do próprio cálculo, uma vez que a demonstração de consistência repousa em uma indução sobre todo o corpo do cálculo. Contudo, em tal metacálculo a questão da consistência reapareceria, e depois no metametacálculo, e assim por diante. Daí conclui Wittgenstein que a própria concepção de uma metamatemática se assenta sobre um regressão infinita (*Remarks*: 329–30). “Os problemas *matemáticos* daquilo que chamamos fundamentos não são um fundamento para a matemática mais do que a rocha pintada é o fundamento da torre pintada” (*Foundations* V–13). Wittgenstein compara a demonstração buscada por Hilbert da consistência da aritmética ao caso do matemático que afirma ter descoberto que entre os pontos racionais da reta há mais pontos: Wittgenstein entende que ele não descobriu, mas inventou tais pontos, e o que tem diante de si agora é um novo cálculo (*Remarks*: 338–9).

Todavia, a ânsia em demonstrar a inutilidade de toda a empresa metamatemática e a vacuidade de significado de suas proposições levam Wittgenstein a posições muito difíceis de sustentar, como por exemplo sua visão de que as demonstrações de *consistência relativa*, ou *equiconsistência*, são uma tolice (*Remarks*: 335). Analisemos o caso da demonstração de consistência relativa do cálculo de predicados clássico de primeira ordem, **PO**, com relação ao cálculo proposicional clássico, **CP**. A consistência de **CP** pode ser facilmente demonstrada da seguinte forma. Mostramos primeiramente a *correção* deste sistema, isto é, verificamos que seus axiomas são tautologias, e em seguida que suas regras de inferência preservam tautologias; daí, por indução completa sobre o comprimento das derivações, concluímos que todos os seus teoremas, os quais são demonstrados a partir do uso combinado de seus axiomas e regras, são tautologias. Como corolário, dado que pelo significado da negação neste cálculo duas proposições contraditórias não podem ser simultaneamente tautologias, concluímos que duas proposições contraditórias não podem ser simultaneamente teoremas. Sabemos por outro lado que **PO** é uma *extensão própria* de **CP**, contendo aquele cálculo portanto todos os esquemas tautológicos de **CP**, e ainda outros, nas quais aparecem quantificadores. A demonstração tradicional de consistência relativa consiste na construção de uma função conveniente que leve cada fórmula de **PO** a uma fórmula estruturalmente similar de **CP**, função esta que se pode obter, por exemplo, se simplesmente “apagamos” os quantificadores das fórmulas de **PO**. Daí, se houvesse dois teoremas contraditórios em **PO** eles seriam levados a dois teoremas contraditórios de **CP**, mas acabamos de ver que **CP** não tem teoremas contraditórios, logo o mesmo deve se passar com **PO**. De maneira semelhante podemos demonstrar a equiconsistência entre diferentes sistemas de geometria, como a geometria euclidiana e a riemanniana, e entre diferentes sistemas lógicos, como cálculos proposicionais modais normais e **CP**. Mas sobre este tema Wittgenstein nos oferece o intrigante juízo de que o que temos aqui é "tão-somente" um *mapeamento*, uma função que leva as regras de um jogo a regras de um outro jogo: "*As relações internas nas quais as regras (configurações) de um grupo estão com relação umas às outras são similares àquelas nas quais as do outro grupo estão. Isto é tudo o que a demonstração mostra e não mais.*" (*Remarks*: 335, ênfase no original) Parece haver aqui, contudo, um mal-entendido com relação ao que se pretende com a Metamatemática de Hilbert, isto é, demonstrar a consistência de sistemas *aritméticos*. Ora, esta empreitada só veio abaixo como consequência do Segundo Teorema de Incompletude de Gödel, de 1931, que mostrou que qualquer sistema matemático com poder suficiente para fazer o que conhecemos como aritmética elementar — ser capaz de definir as funções recursivas parciais, ou algo do gênero — há de sofrer da surpreendente limitação de ser incapaz de demonstrar sua própria consistência. Observe que nem **CP** nem **PO** constituem o sistema matemático que usamos para demonstrar sua equiconsistência — a regra de indução completa, por exemplo, não faz parte de nenhum dos dois sistemas. Por outro lado, na demonstração de consistência da aritmética elementar o sistema matemático utilizado não é mais poderoso do que a própria aritmética elementar. Aí está a grande diferença!

6.2. Contra a Metamatemática, II

Há uma explicação concorrente e bastante interessante para a origem no pensamento de Wittgenstein da ideia de que é preciso rejeitar a metamatemática. Ela se baseia em uma frutífera distinção, proposta por van Heijenoort (1967) e reelaborada por Hintikka & Hintikka (1986, cap. I), entre a "linguagem como meio universal" e a "linguagem como cálculo": de acordo com a primeira visão, não podemos observar nossa própria linguagem de fora e descrevê-la, como fazemos com outros objetos que podem ser especificados, referidos, descritos, discutidos e sobre os quais podemos teorizar na nossa linguagem; na segunda visão, em contraste, podemos fazer tudo isto, levantando questões metateóricas acerca da nossa lógica e até mesmo imaginando uma alteração em sua interpretação, por exemplo, a respeito do domínio sobre o qual se aplicam os quantificadores. Segundo van Heijenoort, a adesão de Frege e Russell à primeira visão acima explica a ausência de noções semânticas em seus trabalhos, e em especial a desatenção à distinção entre a noção de demonstrabilidade e a noção de validade baseada na (proto)teoria de conjuntos, distinção esta que só seria levada a efeito após os trabalhos de Löwenheim em 1915 e de Skolem em 1920. Segundo os Hintikkas, a adesão de Wittgenstein também à primeira visão acima explicaria a razão pela qual em todo o seu trabalho filosófico, assim como no trabalho anterior de Frege e no trabalho posterior de Quine, a semântica seria considerada *inefável*, mesmo que não fosse *impossível*. Na primeira filosofia de Wittgenstein, uma consequência desta postura seria a distinção tractatiana entre *dizer* e *mostrar*; em sua filosofia posterior, uma consequência importante seria a rejeição de quaisquer considerações metateóricas acerca da linguagem e, por extensão, a rejeição do platonismo matemático e o abandono das tentativas de produzir demonstrações de consistência.

A distinção acima explicitada pode nos ajudar igualmente a compreender a peculiar concepção de cálculo adotada por Wittgenstein. Ao longo de toda a sua filosofia, Wittgenstein insistiu que as contradições lógicas, assim como as tautologias, seriam desprovidas de sentido e, por conseguinte, de conteúdo informativo (*Tractatus* 4.461, *Foundations* Ap. I–20). Parece correto afirmar que, juntas, as contradições e as tautologias formam uma espécie de "ilha lógica", separadas das proposições comuns (cf. Goldstein 1986: 44). Mas se tal concepção cai bem ao filósofo do *Tractatus*, cuja preocupação é analisar minimamente as proposições da lógica, da epistemologia, da física, da ética e da mística, ela já não se encaixa tão suavemente nos escritos do filósofo dos *Foundations*, cuja preocupação é a investigação gramatical de todas estas proposições. É este último porém quem nos afirma que poderíamos tranquilamente substituir as tautologias pelas contradições na lógica, fazendo dos *Principia Mathematica* de Russell uma coleção de contradições ao invés de uma coleção de tautologias (*Lectures* XIX: 189). Ao que ele emenda em seguida que não importa como lemos as proposições da matemática, mas apenas o que faremos depois com o que lemos (*Lectures* XIX: 190). E ele fala ainda na "invasão desastrosa" da matemática pela lógica (*Foundations* IV–24), e no modo pelo qual a lógica matemática teria apenas perpetuado a tradição aristotélica, ao se infiltrar no pensamento dos matemáticos e dos filósofos impondo uma interpretação não mais que superficial da nossa linguagem cotidiana como uma análise da estrutura dos fatos (*Foundations* IV–48).

Sim, é verdade que "o interesse de Wittgenstein, em sua segunda filosofia, não está nas linguagens artificiais e sua semântica formal, mas nas linguagens comuns (*Investigações* §81). Ele está preocupado com as contradições que surgem no discurso ordinário." (Goldstein 1986: 54) Mas nós temos que tentar compreender a dificuldade que tem um "semanticista sem semântica" (cf. Hintikka & Hintikka 1986: 2–3) como ele em nos chamar a atenção para o fato de que talvez não estejamos vendo os axiomas da matemática como aquilo que eles realmente são: proposições da sintaxe (*Remarks*: 189), ou em afirmar que "o problema de encontrar uma decisão matemática para um teorema pode com alguma justiça ser visto como o problema de se dar um sentido matemático a uma fórmula" (*Foundations* IV–42), ou mesmo em insistir que só podemos dizer que a formação de certas configurações do cálculo é "proibida", mas não "contraditória" (*Remarks*: 339), pois para tanto elas deveriam constituir-se, antes de mais nada, em asserções. Sem dispor de uma semântica, sua única alternativa é fazer-se valer de termos oblíquos, falar indiretamente, torcer para que seu interlocutor concorde em encontrá-lo a meio caminho: faltam-lhe palavras!

Ao fim de tudo isto, podemos sem dúvida compreender o objetivo da prática filosófica de Wittgenstein como o da luta pela derrocada final da metafísica, o combate a toda e qualquer espécie de dogmatismo, ou, como queria Moreno (1993), como a "terapia das imagens". Devemos relativizar as *necessidades:* diferentes jogos e diferentes matemáticas são de fato possíveis. Devemos reconhecer que não há critérios únicos e definitivos. Isto quer dizer que não podemos ter certezas? Não, "o que preciso mostrar é que uma dúvida não é necessária mesmo quando é possível. Que a possibilidade do jogo de linguagem não depende de se duvidar de tudo que se pode duvidar. (Isto está ligado ao papel da contradição na matemática.)" (*Certainty* §392) Não podemos negar às contradições o direito de fazer parte de um jogo matemático — elas decerto não representam qualquer ameaça cética —, mas também é evidente que não somos de maneira alguma obrigados a acolhê-las nos nossos jogos. Só porque conhecemos outros jogos, isto não significa que devamos abandonar o nosso, ou deixar de defendê-lo. Wittgenstein quer acabar com as ilusões do cientista: o paraíso de Cantor, as demonstrações de consistência, seus *puntos fijos*, o que quer que lhe empreste uma segurança ilegítima. Isto implica em destruir as perspectivas do cientista? Só se for do ponto de vista psicológico. Se do ponto de vista do cientista a tarefa de Wittgenstein pode parecer uma tarefa epistemológica, aos olhos do próprio filósofo ela é antes de tudo uma tarefa ética.

7. Haverá implicações desta postura para a prática matemática?

Considere-se celebrado o casamento, com separação de bens, da filosofia com a matemática. A matemática vai trabalhar fora, onde se envolve com certos tipos, e acaba por levantar novos problemas filosóficos. Ela não pode resolvê-los, pois é incapaz de fornecer esclarecimento conceitual. A filosofia, paciente e prendada, envolve em sua prosa a atividade matemática, e tece uma rede donde a matemática retirará tudo aquilo que precisa para ser mais do que uma simples manipulação simbólica. A tal rede colhe ainda muitas confusões metafísicas; estas porém hão de ser resolvidas gramaticalmente. A matemática se envolveu com uma contradição, mas esta a filosofia não pretende resolver, pelo menos não através de uma descoberta lógica ou matemática. A filosofia não pode tocar no uso efetivo da linguagem, nem fundamentá-lo — ela só coloca as coisas, não elucida nada e não conclui nada. Contrariamente à matemática, a filosofia não demonstra, mas argumenta. O máximo que ela pode fazer é descrever o uso da linguagem, e então deixar tudo como está. Ela acumula recordações para uma finalidade determinada. Por seu lado, a matemática não traz embutida uma ideia de progresso, e ao final também deixa tudo como está (*Investigações* §124–7).

Wittgenstein põe fim ao seu trabalho (anti-)filosófico, e espera sinceramente que seus escritos tenham antes servido como um espelho esclarecedor das dificuldades do leitor do que servido à construção de um sistema. Pois em filosofia não há teses. "Se se quisesse expor teses em filosofia, nunca se chegaria a uma discussão sobre elas, porque todos estariam de acordo" (*Investigações* §128) — mas esta já não seria justamente uma tese filosófica?

É certo que durante a fase transicional de sua filosofia, no início da década de 30, Wittgenstein flertava com os intuicionistas, mas dúvidas há de que não tenham restado alguns resquícios desta aventura muitos anos mais tarde. Não raro podemos ver o filósofo caracterizado como finitista e construtivista, além de, claro, anti-platonista (cf. por exemplo Hintikka & Hintikka 1986: 26). Isso quando não o dizem simplesmente esquizofrênico — vide Anderson, Bernays, Beth, Chihara etc. Além de sua postura relaxada com relação à contradição, Wittgenstein também sofreu críticas ao próprio afrouxamento que propusera com relação ao uso da palavra "matemática" — afrouxamento este que é parte inalienável do *método* de análise gramatical, e do *processo* de reconhecimento de semelhanças de família: estaríamos dispostos a denominar matemática uma atividade que só tivesse aplicações imaginárias, ou propósitos ocultos, ou então que não fosse capaz de formar conceitos? — pergunta-nos o filósofo (*Foundations* V–25 e 26). Bem se vê que uma boa parte das apreciações desfavoráveis da filosofia de Wittgenstein se trata de simples equívoco — de certa forma justificado, em terreno tão movediço. Wittgenstein mexe com os brios dos matemáticos: "Imagine que a teoria de conjuntos fôra inventada por um satirista como um tipo de paródia na matemática. — Mais tarde um significado razoável foi visto nela e ela foi incorporada à matemática. (Pois se uma pessoa pode vê-la como o paraíso dos matemáticos, por que outra não poderia vê-la como um chiste?) A questão é: mesmo como chiste, ela não é evidentemente matemática?" (*Foundations* IV–7) Mas afinal, como pode ser que alguns tirem da filosofia de Wittgenstein consequências tão positivas, pretendendo até mesmo analisar suas contribuições na direção de uma filosofia ou de uma matemática paraconsistente, enquanto outros o ignoram ostensivamente, e o interpretam com má vontade?

É difícil a qualquer pessoa ministrar seus ensinamentos sem deixar transparecer seus preconceitos. Em especial a um filósofo, que com uma obra em andamento não tem tantas opções, e se não estimula projetos de trabalho de um lado, de outro no mínimo desencoraja certas linhas de pesquisa. Sob a influência da análise wittgensteiniana da matemática seria bastante razoável que alguns matemáticos considerassem desinteressante e abandonassem, por exemplo, a teoria dos conjuntos transfinitos, e também desacelerassem a elaboração e o desenvolvimento de novos sistemas formais.[11] Nossa sorte é que não o fazem. Para termos uma ideia melhor da natureza desta análise filosófica embaraçadora, finalizaremos aqui com um exemplo específico de interesse, a saber, o caso da discussão feita por Wittgenstein do Primeiro Teorema de Incompletude de Gödel, de 1931 (cf. *Foundations* Ap. I–5 a 19, V–18 e 19).

Uma versão simplificada do Primeiro Teorema de Incompletude de Gödel nos ensina que em qualquer teoria axiomática consistente e correta da aritmética *AP* é possível construir uma sentença g que, não obstante verdadeira, não é demonstrável em *AP*. Esta sentença diz, intuitivamente, algo como "eu não sou demonstrável". Então, se g fosse demonstrável, como a teoria é correta, g seria verdadeira. Porém, se g fosse verdadeira, também seria verdadeiro o que ela diz, isto é, que g não é demonstrável. O procedimento de Gödel se resumiu essencialmente em tomar o sistema formal dos *Principia Mathematica*, numa versão estendida, e mostrar que predicados tais como "não ser demonstrável" são representáveis neste sistema, codificando em seguida os teoremas do próprio sistema de modo que pudessem servir de argumento a este predicado, para então finalmente substituir como argumento o código referente ao próprio predicado de não-demonstrabilidade. Podemos afirmar que este teorema de Gödel introduz sérias limitações aos sistemas formais, pelo menos no sentido de que as teorias "interessantes" da aritmética parecem nunca ser capazes de dizer tudo o que poderiam, elas são por assim dizer *incompletáveis:* há "verdades" que não são demonstráveis, que são *indecidíveis.* Para superar estas "limitações da aritmética" poderíamos fazer aqui uma aplicação da paraconsistência: se uma lógica paraconsistente fosse utilizada para formalizar a aritmética e permitíssemos que esta teoria fosse inconsistente, então a sentença g de Gödel poderia muito bem ser nela demonstrável.

Os comentários de Wittgenstein sobre o tema são largamente inconclusivos. É menos a validade da demonstração gödeliana o que ele questiona do que a interpretação da proposição g. Nós devemos lembrar que o filósofo está comprometido com uma visão da semântica como inefável — a linguagem como meio universal, como vimos na seção 6.2 —, assim ele não pode senão identificar as noções de verdade e de demonstrabilidade no cálculo de Russell: observe que com isso ele não está tomando "*verdadeiro* $\longleftrightarrow$ *demonstrável*" (resultados que poderiam ser verificado matematicamente), mas algo como "*verdadeiro* $=$ *demonstrável*". Tudo que lhe resta afirmar então é que a interpretação de g, como a de qualquer outra proposição matemática, extrai o seu significado de sua própria demonstração, pois "em matemática, processo e resultado são equivalentes" (*Foundations* I–82; cf. também *Tractatus* 6.1261). Uma primeira recomendação de Wittgenstein surge no sentido de que nos esforcemos por tornar mais claro o que queremos dizer com "ser demonstrável". Todavia, se realmente acreditamos ter demonstrado a proposição g, uma dentre as seguintes opções deve ser o caso:

(a) nós nos enganamos — neste caso, o mínimo que deveríamos fazer seria mudar a nossa interpretação de "não-demonstrável";

(b) nós demonstramos g, de fato, mas em um outro sistema matemático, ou em um sistema físico, por exemplo — neste aso, não há problema, pois há proposições verdadeiras em outros sistemas que não são verdadeiras no sistema dos *Principia*, assim como há proposições verdadeiras dos *Principia* que não são verdadeiras "lá fora";

(c) nós de fato demonstramos g no nosso sistema, e temos portanto uma contradição — mas que mal isto pode causar?, se pergunta Wittgenstein, e por que não poderíamos pensar que o Princípio da Não-Contradição é simplesmente falso neste caso?

A crítica de Wittgenstein a este último caso começa por uma comparação com o Paradoxo do Mentiroso, o que não é de todo adequado, pois no presente caso a sentença deste paradoxo afirmaria algo como "eu não sou verdadeira", ao invés de "eu não sou demonstrável" — mas aqui, de novo, isto não faz muita diferença para Wittgenstein.[12] Em seguida, a crítica de Wittgenstein prossegue pela estratégia da desqualificação, afirmando que proposições como g não servem para nada: "É como se alguém extraísse de certos princípios sobre formas naturais e estilo arquitetônico a ideia de que do Monte Everest, onde ninguém pode viver, fizesse parte um chalé no estilo barroco" (*Foundations* Ap. I–19). Esta observação também não é decisiva, em primeiro lugar porque Wittgenstein deveria ser o último a censurar algo por *não ter* uso: e não *poderia ter?*, e em segundo lugar porque já se conhecem hoje diversos outros exemplos[13] de proposições matemáticas "mais naturais", isto é, que não traduzem simplesmente asserções metamatemáticas, que são formalmente indecidíveis em AP.[14]

References

Aristóteles 1986. *Metafísica*. Trad. Hernán Zucchi. Buenos Aires: Editorial Sudamericana.

Arrington, R. L. 1969. Wittgenstein on contradiction. *Southern Journal of Philosophy* **7**(1): 37–43.

Arruda, A. I. 1977. On the imaginary logic of N. A. Vasil'év. In Arruda, A. I., da Costa, N. C. A., e Sette, A. M. (eds.) *Non-Classical Logics, Model Theory and Computability*. Amsterdam: North-Holland, p.3–24.

Béziau, J.-Y. 2000. What is paraconsistent logic? In Batens, D., Mortensen, C., Priest, G., e van Bendegem, J. P. (eds.) *Frontiers in Paraconsistent Logic*. Londres: King's College Publications, p.95–111.

Bobenrieth Miserda, A. 1996. *Inconsistencias ¿Por qué no?* Un estudio filosófico sobre la lógica paraconsistente. Santafé de Bogotá: Tercer Mundo.

Burkhardt, H. & Smith, B. 1991. *Handbook of Metaphysics and Ontology*. Munique: Philosophia Verlag, 2 vol.

Carnap, R. 1949. *The Logical Syntax of Language* .Londres: Routledge & Kegan Paul.

Carnielli, W. A. 1998. Calea logică către inconsistenţă. *Krisis* **7**: 12–31.

Carnielli, W. A. & Marcos, J. 2002. A taxonomy of **C**-systems. In Carnielli, W. A., Coniglio, M. E., e D'Ottaviano, I. M. L. (eds.) *Paraconsistency: The logical way to the inconsistent*, volume 228 de *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, p.1–94. Marcel Dekker.

Carnielli, W. A. & Rathjen, M. 1990. Combinatória e indemonstrabilidade, ou o 13o. trabalho de Hércules. *Matemática Universitária* **12**: 23–41.

Curry, H. 1942. The inconsistency of certain formal logics. *The Journal of Symbolic Logic* **7**: 115–7.

———. 1952. *Leçons de Logique Algébrique*. Paris: Gauthier-Villars.

———. 1958. *Combinatory Logic*, volume I. Amsterdam: North-Holland.

———. 1963. *Foundations of Mathematical Logic*. McGraw-Hill. Reimpr. em Nova Iorque: Dover, 1977.

da Costa, N. C. A. 1958. Nota sobre o conceito de contradição. *Anais da Sociedade Paranaense de Matemática* **1**: 6–8.

———. 1959. Observações sobre o conceito de existência em matemática. *Anais da Sociedade Paranaense de Matemática* **2**: 16–9.

———. 1974. On the theory of inconsistent formal systems. *Notre Dame Journal of Formal Logic* **15**(4): 497–510.

———. 1982. The philosophical import of paraconsistent logic. *The Journal of Non-Classical Logic* **1**(1): 1–19.

———. 1994. *Ensaio sobre os Fundamentos da Lógica*. 2a. ed. São Paulo: Hucitec.

da Costa, N. C. A.; Béziau, J.-Y.; Bueno, O. 1995. What is semantics? A brief note on a huge question. *Sorites* **3**: 43–7.

———. 1998. *Elementos de Teoria Paraconsistente de Conjuntos*, volume 23. Campinas: Coleção CLE.

da Costa, N. C. A. & Marconi, D. 1989. An overview of paraconsistent logic in the 80s. *The Journal of Non-Classical Logic* **6**(1): 5–32.

D'Ottaviano, I. M. L. 1992. A lógica clássica e o surgimento das lógicas não-clássicas. In Évora, F. R. R. (ed.) *Século XIX:* o nascimento da ciência contemporânea, volume 11, p. 65–93. Coleção CLE.

D'Ottaviano, I. M. L. & da Costa, N. C. A. 1970. Sur un problème de Jaśkowski. *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, Séries A–B **270**(21): 1349–53.

Fraenkel, A. A. & Bar-Hillel, Y. 1958. *Foundations of Set Theory*. Amsterdam: North-Holland.

Frege, G. 1967. *The Basic Laws of Arithmetic:* Exposition of the system. Berkeley: University of California Press.

Glock, H. J. 1998. *Dicionário Wittgenstein*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar.

Goldstein, L. 1977. Resenha de 'L. Wittgenstein, *Lectures,* C. Diamond (org.)'. *The Philosophical Quarterly* **27(109)**: 370–1.

———. 1983. Wittgenstein and the logico-semantical paradoxes. *Ratio* **25**(2): 137–53.

———. 1986. The development of Wittgenstein's views on contradiction. *History and Philosophy of Logic* **7**: 43–56.

———. 1989. Wittgenstein and paraconsistency. In Priest, G., Routley, R., e Norman, J. (eds.) *Paraconsistent Logic:* Essays on the inconsistent, p. 540–62. Munique: Philosophia Verlag.

Granger, G. G. 1998. *L'Irrationnel*. Paris: Éditions Odile Jacob.

Hallett, G. 1977. *A Companion to Wittgenstein's Philosophical Investigations.* Ithaca: Cornell University Press.

Hilbert, D. 1926. Über das Unendliche. *Mathematische Annalen* **95**: 161–90.

Hintikka, M. B. & Hintikka, J. 1986. *Investigating Wittgenstein*. Oxford: Basil Blackwell.

Jaśkowski, S. 1948. Rachunek zdan dla systemów dedukcyjnych sprzecznych. *Studia Societatis Scientiarum Torunensis*, Sectio A, 5:57–77. Traduzido para inglês em *Studia Logica* **24**: 143–157, 1967, e em *Logic and Logical Philosophy* **7**: 35–56, 1999.

Kotas, J. & da Costa, N. C. A. 1978. On the problem of Jaśkowski and the logics of Łukasiewicz. In Arruda, A. I., da Costa, N. C. A., e Chuaqui, R. (ed.) *Proceedings of the* I *Brazilian Conference on Mathematical Logic*, p. 127–39, Nova Iorque. Marcel Dekker.

Łukasiewicz, J. 1971. On the principle of contradiction in Aristotle. *Review of Metaphysics* **24**: 485–509.

Marconi, D. 1984. Wittgenstein on contradiction and the philosophy of paraconsistent logic. *History of Philosophy Quarterly* **1**(3): 333–52.

Marcos, J. 1999. *Semânticas de Traduções Possíveis*. Campinas: IFCH, Unicamp. Dissertação (Mestrado em Lógica e Filosofia da Ciência).
http://cutter.unicamp.br/document/?code=vtls000224326.

———. 2005a. Modality and paraconsistency. In Bilkova, M. e Behounek, L. (eds.) *The Logica Yearbook 2004*, p. 213–22. Filosofia.

———. 2005b. Nearly every normal modal logic is paranormal. *Logique et Analyse (N.S.)* **48**: 279–300.

———. 2005. On negation: Pure local rules. *Journal of Applied Logic* **3(1)**: 185–219.

Monk, R. 1995. *Wittgenstein:* o dever do gênio. São Paulo: Companhia das Letras.

Moreno, A. R. 1993. *Wittgenstein:* Através das imagens. Campinas: Editora da Unicamp.

Paris, J. & Harrington, L. 1977. A mathematical incompleteness in Peano arithmetic. In Barwise, J. (ed.) *Handbook of Mathematical Logic*, p. 1133–42. North-Holland.

Priest, G. 1979. The logic of paradox. *Journal of Philosophical Logic* **8**(2): 219–41.

Priest, G. & Routley, R. 1989. First historical introduction: a preliminary history of paraconsistent and dialethic approaches. In Priest, G., Routley, R., e Norman, J. (eds.) *Paraconsistent Logic:* Essays on the inconsistent, pages 3–75. Munique: Philosophia Verlag.

Quine, W. V. O. 1953. *From a Logical Point of View*. Cambridge: Harvard University Press.

Reid, C. 1996. *Hilbert*. Nova Iorque: Springer.

Russell, B. 1996. *The Principles of Mathematics*. Nova Iorque: W. W. Norton & Company.

Tarski, A. 1944. The semantic conception of truth and the foundation of semantics. *Philosophy and Phenomenological Research* **4**: 341–76.

———. 1983. The concept of truth in formalized languages. In *Logic, Semantics and Metamathematics*. Indianápolis: Hackett Publishing Co. Versão revista da tradução em inglês do artigo “Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen”, publicado em 1936.

van Heijenoort, J. 1967. Logic as language and logic as calculus. *Revue Internationale de Philosophie* **17**: 324–30.

Wittgenstein, L. *Foundations* 1967. G. H. von Wright, R. Rhees, G. E. M. Anscombe (eds.) *Remarks on the Foundations of Mathematics.* Cambridge: MIT.

———. *Certainty* 1969. G. E. M. Anscombe, G. H. von Wright (eds.) *On Certainty.* Basil Blackwell.

———. *Grammar* 1974. R. Rhees (ed.) *Philosophical Grammar.* University of California Press.

———. *Lectures* 1976. C. Diamond (org.) *Wittgenstein’s Lectures on the Foundations of Mathematics:* Cambridge, 1939. University of Chicago Press.

———. $\boxed{\textit{Vienna}}$ 1979a. B. F. McGuinness (ed.) *Ludwig Wittgenstein and the Vienna Circle:* conversations recorded by Friedrich Waismann. Basil Blackwell.
———. $\boxed{\textit{1932–1935}}$ 1979b. A. Ambrose (ed.) *Wittgenstein's Lectures:* Cambridge, 1932–1935. Basil Blackwell.
———. $\boxed{\textit{Remarks}}$ 1980. R. Rhees (ed.) *Philosophical Remarks.* University of Chicago Press.
———. $\boxed{\textit{Zettel}}$ 1981. G. E. M. Anscombe, G. H. von Wright (eds.) *Zettel.* Basil Blackwell.
———. $\boxed{\textit{Investigações}}$ 1991. G. E. M. Anscombe, R. Rhees (eds.) *Investigações Filosóficas.* Trad. J. C. Bruni. São Paulo: Nova Cultural, col. Os Pensadores, 5a.ed.
———. $\boxed{\textit{Tractatus}}$ 1994. *Tractatus Logico-Philosophicus.* Trad. L. H. Lopes dos Santos. São Paulo: Edusp.
Wright, C. 1980. *Wittgenstein on the Foundation of Mathematics*. Londres: Duckworth.
Wrigley, M. 1980. Wittgenstein on inconsistency. *Philosophy* **55**: 471–84.

João Marcos
LoLITA & DIMAp, UFRN
Campus Universitário – Lagoa Nova
59078-970 Natal, RN
BRAZIL
jmarcos@dimap.ufrn.br

Resumo. Uma teoria é trivial se a partir dela podemos deduzir qualquer fórmula da linguagem a ela subjacente, é inconsistente se a partir dela podemos deduzir uma contradição, e é paraconsistente se é inconsistente porém não-trivial. É claro que toda teoria trivial é inconsistente; sabemos ainda que para uma teoria clássica a recíproca é igualmente válida. Daí a nossa surpresa ao encontrarmos Wittgenstein, já na década de 30, em comentários e palestras acerca dos fundamentos da matemática, bem como em outros escritos, pregando uma certa tolerância com relação à presença de contradições em um sistema matemático. "Contradição. Por que justo *este* fantasma? Isso é realmente muito suspeito." (*Remarks* III–56)

Investigamos aqui as hipóteses de que Wittgenstein teria formulado a ideia de uma lógica paraconsistente, ou de que possamos licitamente fazê-lo a partir de sua obra. Verificamos ainda se a lógica paraconsistente poderia ser acolhida como justificação de certas ideias wittgensteinianas sobre o caráter relativamente inofensivo das contradições, e quais os pontos em comum entre estas ideias e aquelas expressas no projeto da lógica paraconsistente. Além disso, compreendemos ainda melhor a postura de Wittgenstein frente à contradição e à inconsistência ao perquirirmos suas origens, bem como suas consequências para a prática matemática.

Palavras-chave: Wittgenstein, contradição, filosofia da matemática, fundamentos da matemática, paraconsistência.

Notas

[1] Versões generalizadas dos paradoxos aqui apresentados podem ser encontradas na introdução a da Costa et al. (1998).

[2] Para uma leitura de (PNC) que fundamenta a desconexão entre este princípio e a proposta da lógica paraconsistente, o leitor é convidado a conferir Carnielli & Marcos (2002). Enquanto as lógicas paraconsistentes, por definição, devem de fato rejeitar (PE), os casos práticos de lógicas paraconsistentes que vão de encontro à nossa versão de (PNC) são bastante raros na literatura.
[3] Mais sobre a relação entre lógicas paraconsistentes e lógicas modais pode ser conferido em Marcos (2005a, b).
[4] Um estudo sistemático da negação pode ser encontrado em Curry 1952. Um apanhado geral de trabalhos contemporâneos nesta direção pode ser encontrado em Marcos 2005.
[5] A este lema da Costa denominou *Princípio de Tolerância em Matemática*, por analogia ao Princípio de Tolerância formulado por Carnap em sintaxe (cf. Carnap 1949: 52).
[6] Para conhecer mais sobre o trabalho de Vasiliev, cf. Bobenrieth Miserda 1996, cap. II, e Arruda 1977.
[7] Para conhecer mais sobre o trabalho de Jaśkowski, cf. Bobenrieth Miserda 1996, cap. VIII. Desenvolvimentos mais recentes das ideias originais de Jaśkowski podem ser encontrados em D'Ottaviano & da Costa 1970, e Kotas & da Costa 1978.
[8] Uma seleção dos resultados relacionados publicados entre 1963 e 1974 pode ser encontrado em da Costa 1974.
[9] Para conhecer mais sobre o trabalho de da Costa, cf. Bobenrieth Miserda 1996, cap. IX e X.
[10] O que resulta, em efeito, de uma ampliação moderna da acepção do termo "semântica" (cf. da Costa et al. 1995).
[11] Cf. o verbete *Matemática*, em Glock 1998, para uma discussão sobre este tema.
[12] Devemos ter em vista, não obstante, segundo o clássico *Teorema de Indefinibilidade* tarskiano (cf. Tarski 1983), que o Paradoxo do Mentiroso nos fornece justamente a razão pela qual as verdades aritméticas não podem ser definidas na teoria AP.
[13] Cf. por exemplo Paris & Harrington 1977 e Carnielli & Rathjen 1990.
[14] O autor agradece à preciosa leitura e comentários de José Feres, Jean-Yves Béziau e Arley Moreno, e reconhece o apoio financeiro concedido pelo CNPq e pela CAPES durante a confecção deste artigo, que surgiu como parte da dissertação Marcos 1999. Parte deste trabalho foi apresentada no VIII Encontro Nacional de Filosofia, promovido pela ANPOF em setembro de 1998, em Caxambu, MG.