JOÃO MARCOS DE ALMEIDA

SEMÂNTICAS DE TRADUÇÕES POSSÍVEIS

JOÃO MARCOS DE ALMEIDA

SEMÂNTICAS
DE TRADUÇÕES POSSÍVEIS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Departamento de Filosofia do Instituto de Filosofia e Ciências Humanas da Universidade Estadual de Campinas sob a orientação do Prof. Dr. Walter Alexandre Carnielli.

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação defendida e aprovada pela Comissão Julgadora em 09/08/1999.

BANCA
Prof. Dr. Walter Alexandre Carnielli
Prof. Dr. Marcelo Esteban Coniglio
Prof. Dr. Jean-Yves Béziau
Profa. Dra. Itala Maria Loffredo D'Ottaviano

AGOSTO/1999

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IFCH - UNICAMP

Almeida, João Marcos de

AL 64 s **Semânticas de traduções possíveis / João Marcos de Almeida. - - Campinas, SP : [s. n.], 1999.**

Orientador: Walter Alexandre Carnielli.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas.

1. Linguagens formais – Semântica. 2. Lógica matemática não-clássica. 3. Lógica – Filosofia. I. Carnielli, Walter Alexandre. II. Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas. III. Título.

À Rosa

Sou trezentos… sou trezentos-e-cinquenta.

Mário de Andrade

(1893-1945)

Summa Logicæ

Lista de figuras

0
Prelúdio

Resumo da Ópera

Em 1990, Walter Carnielli propôs uma nova e original abordagem à semântica formal de lógicas não-clássicas, a assim denominada *semântica de traduções possíveis*. Dada uma lógica não-clássica **L**, tratava-se originalmente de buscar um conjunto de *traduções* (cf. da Silva *et al.*, 1998, e Carnielli & D'Ottaviano, 1997) desta lógica em lógicas polivalentes, conjunto este cuja combinação nos viria a fornecer uma semântica correta e completa para **L**. Em particular, se **L** não fosse caracterizável por matrizes finitas, isto é, se não dispusesse de uma semântica verofuncional, poderíamos de certa forma recuperar esta verofuncionalidade apenas aceitando interpretar cada uma das fórmulas de **L** como o conjunto de todas as suas traduções possíveis. Se **L** já fosse ela própria uma lógica polivalente, então bastaria tomar como única tradução a função identidade. Não obstante a evidente generalidade deste método, até recentemente poucos eram os outros exemplos conhecidos de lógicas dotadas de semânticas de traduções possíveis.

Na presente dissertação, concentramo-nos principalmente nas lógicas ditas *paraconsistentes*, isto é, aquelas que nos permitem lidar com sistemas inconsistentes porém não-triviais, produzidas a partir do trabalho do lógico brasileiro Newton da Costa (1963). As lógicas paraconsistentes nos permitem explorar o significado e o funcionamento da contradição nas linguagens formais. Na década de 40, o filósofo Wittgenstein já manifestara uma visão bem pouco ortodoxa do papel da contradição na matemática – o que justifica a investigação das possíveis relações entre Wittgenstein e a paraconsistência que efetuamos na primeira parte desta dissertação. Em seguida, no campo mais técnico, mostramos como fornecer semânticas de traduções possíveis para cada cálculo da hierarquia originalmente proposta por da Costa, C_n, $1 \leq n < \omega$, bem como para os cálculos de onze outras hierarquias relacionadas. Além disso, a partir das semânticas de traduções possíveis para os cálculos destas hierarquias, mostramos como construir-lhes limites dedutivos inferiores e superiores, a maior parte deles definidos aqui pela primeira vez.

Uma série de problemas e resultados relacionados às semânticas de traduções possíveis é por fim apresentada e comentada. Mostramos a relevância deste tipo de semântica ao estudo das *combinações entre lógicas* (cf. Blackburn & de Rijke, 1997a e 1997b) e da *dualidade entre lógicas* (cf. Queiroz, 1997). Observamos que as semânticas de traduções possíveis não devem necessariamente se basear em lógicas polivalentes, mas podem se basear em lógicas quaisquer, como por exemplo as lógicas modais. Diversos resultados conhecidos na literatura acerca dos cálculos paraconsistentes acima mencionados são expostos, e vários deles são corrigidos.

Não podemos deixar de observar que, em alguns trabalhos recentes (cf. Carnielli, 1997, e Carnielli & D'Ottaviano, 1997), as semânticas de traduções possíveis foram denominadas *semânticas não-determinísticas*. Embora tenha parecido atraente em um certo momento, esta designação foi abandonada por revelar-se obscura – afinal, o que sabemos sobre uma semântica quando sabemos que ela é não-determinística? – e, mais ainda, inoportuna. De fato, nas ciências da computação, o termo "não-determinístico" já se encontra sobrecarregado de significações: não é difícil, assim, encontrar referências a linguagens de programação não-determinísticas, bem como a cálculos, a expressões, a modelos, a mecanismos e a autômatos não-determinísticos; denominam-se algumas vezes não-determinísticos os processos estocásticos; são ditos não-determinísticos os problemas cujas soluções apresentam uma classe de complexidade não-polinomial. Se tal embaraço ainda não fosse suficiente, podemos finalmente encontrar a mesmíssima expressão "semântica não-determinística" em Crawford & Etherington, 1998, só que com um significado praticamente oposto ao que almejamos com os exemplos da semântica de traduções possíveis que aqui apresentamos: estes autores denominam uma certa semântica "não-determinística" exatamente quando suas valorações *não* são verofuncionais.

Já a expressão “semânticas de traduções possíveis” certamente sugere alguma similaridade com as conhecidas semânticas de mundos possíveis, sugestão esta que é deliberada, pois, sob um ponto de vista intuitivo, nas semânticas de traduções possíveis tudo se passa como se estivéssemos trabalhando com vários mundos, só que cada mundo é dotado de uma lógica própria, e são as traduções que nos permitem passar de um mundo a outro. As semelhanças técnicas entre estes dois tipos de semânticas aparentemente param por aí, mas as programáticas talvez vão mais longe. Ora, poderíamos pensar nas semânticas de traduções possíveis como uma realização muito mais radical da interpretação modal que herdamos de Leibniz: não só o mundo poderia ser diferente do que é, isto é, não só os fatos poderiam ter ocorrido diferentemente, mas também a lógica subjacente aos fatos poderia variar de um mundo a outro. Sobre esta tese, contudo, não convém insistir no momento.

Procedemos por descrever minudente, conquanto brevemente, o conteúdo da presente dissertação.

Detalhes tão pequenos

Capítulo 1

“Contradição. Por que justo *este* fantasma? Isto é mesmo muito suspeito.”

Wittgenstein, *Foundations* III-56.

Segundo da Costa *et al.* (1995b), “dado o seu caráter de lógica não-clássica, nenhuma exposição geral da paraconsistência pode ser minimamente aceita sem algumas observações filosóficas acerca da sua natureza.” Ora, encontramos nos escritos de Wittgenstein um curioso e insistente reclamo por tolerância com relação à presença de contradições em um sistema matemático. Seria Wittgenstein um filósofo-mor da paraconsistência? Esta é a questão sobre a qual nos debruçamos neste capítulo.

A própria trajetória filosófica de Wittgenstein começou pela atração que o filósofo sentira pelo paradoxo de Russell, uma contradição que ameaçava os fundamentos da matemática na virada do século XX, e continuou anos mais tarde pela crítica ao programa formalista de Hilbert, o qual pretendia demonstrar vez por todas a consistência da aritmética. Tanto o paradoxo de Russell quanto a Metamatemática de Hilbert são apresentados em **1.**

É costume dividir a obra wittgensteiniana em duas: a primeira, do *Tractatus Logico-Philosophicus*, e a segunda, mais ou menos a partir das *Investigações Filosóficas*. A despeito da altivez da primeira filosofia de Wittgenstein, é sua segunda filosofia que mais nos interessará aqui. Seu programa matemático se encontra esboçado no último parágrafo das *Investigações*, em que o filósofo afirma que "é possível uma investigação da matemática inteiramente análoga à nossa investigação da psicologia. É tão pouco *matemática* quanto a outra é *psicológica*. Nela *não* se calcula; não é, pois, logística, por exemplo. Poderia merecer o nome de investigação dos 'fundamentos da matemática'." As obras *Remarks on the Foundations of Mathematics* e *Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics* são por certo as principais fontes nas quais podemos colher os frutos desta investigação, mas as personalíssimas opiniões de Wittgenstein acerca dos fundamentos da matemática podem, de feito, ser hauridas e esclarecidas em praticamente toda a sua obra, bem como em diversos trabalhos de seus comentadores. De todos os trabalhos relevantes deste gênero os quais houvemos colocar ao nosso alcance procuramos fazer proveito.

Para ser fiéis ao filósofo, e ao seu peculiar método filosófico, neste capítulo nos guiamos por perguntas, menos, porém, com o intuito de respondê-las de forma definitiva do que utilizá-las como roteiro de viagem. Pois "em filosofia é sempre bom pôr uma questão ao invés de uma resposta a uma questão. Pois uma resposta a uma questão pode facilmente ser injusta; livrar-se dela por meio de outra questão não o é." (*Foundations* II-5)

Em **1.1** apresentamos o paradoxo de Curry, formulado mais ou menos na mesma época (1942) em que Wittgenstein exorava aos seus jovens em Cambridge uma mudança de atitude com relação à contradição e à consistência na matemática. O paradoxo de Curry nos mostra, contudo, que há outras vias lógicas em direção à trivialização da teoria de conjuntos, sem passar necessariamente pela contradição, como ocorre no caso do paradoxo de Russell. Desconhecemos a opinião de Hilbert sobre a construção de Curry: o velho matemático enfrentava na época as atribulações de uma Guerra Mundial, e morreria um ano depois. Wittgenstein, por seu lado, não parece ter sequer tomado conhecimento da construção de Curry: tanto quanto Hilbert, ele se preocupou tão-somente com o problema da inconsistência dos cálculos formais, sem distingui-la da trivialidade. De uma maneira ou de outra, certamente não seríamos capazes de distinguir na obra de Wittgenstein qualquer proposta efetiva de um cálculo paraconsistente.

O que fazer da contradição? Em **1.2** exploramos algumas das afirmações – elas próprias contraditórias – de Wittgenstein a este respeito. Na sua primeira filosofia, as contradições não têm vez: elas hão de ser simplesmente dissolvidas; na sua segunda filosofia, pergunta-se pelo uso possível das contradições nos jogos de linguagem. Wittgenstein altercou longamente com seus alunos, entre eles Turing, e buscou dar conta – sem muito êxito, diga-se de passagem – das contradições "ocultas", as quais, acreditava-se, poderiam eventualmente explodir, donde decorreria desafortunadamente a trivialização do cálculo subjacente.

Em **1.3** conhecemos as críticas e as recomendações de Wittgenstein com relação à atitude dos matemáticos em face da contradição, e analisamos os próprios objetivos de sua prática filosófica. Wittgenstein insiste que a matemática é uma espécie de jogo, e que os problemas surgem quando os matemáticos se esquecem disso – eles se levam a sério demais. Wittgenstein não julgava realmente que o problema da consistência fosse um problema legítimo, daí o seu entendimento de que o problema da contradição estaria menos na sua ação do que na nossa reação.

Examinamos, em **1.4**, os pontos de proximidade e de afastamento entre Wittgenstein e aqueles lógicos que são comumente tomados por fundadores da lógica paraconsistente. Arguimos a tese de que Łukasiewicz e Vasiliev mereceriam o título de paternidade da lógica paraconsistente, e apresentamos as idéias básicas de seus verdadeiros pais, Jaśkowski e da Costa. Fazemos ainda breves considerações sobre a ontologia da paraconsistência.

Em **1.5** mergulhamos fundo na análise wittgensteiniana da matemática. Buscamos as origens e as consequências da crítica feita por Wittgenstein à própria idéia de que a matemática deveria ter um fundamento, e para tanto fazemos uso de seu vocabulário característico. Entram em jogo as noções de “gramática”, “forma de vida”, “história natural”, “semelhanças de família”. Conhecemos, em **1.5.1**, a rejeição por Wittgenstein de toda sorte de meta-disciplinas – e, em particular, a Metamatemática de Hilbert. Este ponto de vista culmina num grande engano na interpretação wittgensteiniana das provas de consistência relativa, e na completa incapacidade de compreender o funcionamento do Segundo Teorema de Gödel. Em **1.5.2** propomos explicar tanto a rejeição da Metamatemática quanto a concepção bastante particular de cálculo manifestas por Wittgenstein a partir de seus conceitos pré-semânticos hoje tão inusuais.

Finalmente, em **1.6**, perguntamo-nos quais as consequências práticas do arrazoado wittgensteiniano. Do sermão de Wittgenstein aos matemáticos pode resultar desde o simples incômodo até o engavetamento de certos projetos, passando, por exemplo, pelo completo mal-entendido com relação ao significado do Primeiro Teorema de Gödel – mal-entendido este que talvez tenha tido origem a partir dos conceitos pré-semânticos acima mencionados.

Parte deste capítulo foi apresentada pelo autor na comunicação intitulada “(Wittgenstein & Paraconsistência)”, no VIII ENCONTRO NACIONAL DE FILOSOFIA, promovido em setembro de 1998 pela *Associação Nacional de Pós-Graduação em Filosofia* (ANPOF), em Caxambu, MG.

Capítulo 2

Principiamos este capítulo comparando as exigências de Jaśkowski e de da Costa por ocasião da construção dos primeiros cálculos proposicionais paraconsistentes. Observamos que, contrariamente a Jaśkowski, da Costa não apresentou de imediato uma semântica para os cálculos de sua hierarquia C_n, $1 \leq n \leq \omega$, nem sequer exigiu que eles devessem ter uma interpretação intuitiva.

Em **2.1** apresentamos o cálculo C_1 e mostramos como a sua construção axiomática pode ser vista de maneira mais ou menos “dual” à construção do Cálculo Intuicionista de Heyting. O quadro apresentado na **Figura 1** surge de uma modificação necessária do quadro apresentado em Alves & Queiroz, 1991. Em **2.1.1** buscamos caracterizar sintaticamente o cálculo C_1, expondo algumas de suas mais importantes propriedades. Em **2.2** definimos a conhecida *semântica de* *valorações* não-verofuncionais para C_1, e provamos algumas das consequências mais importantes desta definição. Provamos canonicamente, em **2.2.1**, a corretude e a completude desta semântica de valorações, e apresentamos o seu procedimento de decisão por *quase-matrizes* em **2.2.2**. Corrigimos, nesta última seção, uma incorreção apresentada no algoritmo que define este procedimento de decisão em Alves, 1976, e da Costa & Alves, 1977. Para bem fixar este método de decisão, a seção **2.2.2.1** traz diversos exemplos de quase-matrizes para C_1.

Em **2.3** comparamos o trabalho já feito sobre as lógicas paraconsistentes com aquele realizado sobre as lógicas intuicionistas, procurando mais uma vez motivar a introdução de uma nova semântica formal para as primeiras, a *semântica de traduções possíveis*. Para definir uma tal semântica de traduções possíveis para C_1 baseada em uma lógica trivalente, precisamos primeiro definir a lógica trivalente em questão, e em seguida definir um conjunto de *funções de tradução*. Em **2.3.1** introduzimos as matrizes da lógica $\mathcal{W}_3$, as quais tornaram factíveis os artigos de Carnielli (1999), e de Carnielli e do autor (Carnielli & Marcos, 199?a), e em **2.3.1.1** conseguimos mostrar que esta lógica $\mathcal{W}_3$ é dedutivamente equivalente à lógica paraconsistente J_3, introduzida por D'Ottaviano & da Costa (1970).

Em **2.3.2** armamos um primeiro ensaio, introduzindo um conjunto bastante "generoso" de funções de tradução, funções que levam as fórmulas de C_1 a fórmulas de $\mathcal{W}_3$. Na seção **2.3.3** a semântica de traduções possíveis para C_1 é cosida, e em **2.3.3.1** verificamos que a sua corretude só se realiza se restringimos em algo as funções de tradução recém-introduzidas. O conjunto de *traduções possíveis* de uma fórmula de C_1 é dado por todas as imagens desta fórmula por meio das funções de tradução. Em **2.3.3.2** eliminamos uma parte destas funções, notando a redundância das traduções possíveis por elas produzidas, e apresentamos finalmente o conjunto definitivo de funções de tradução com o qual iremos trabalhar, o qual verificamos possuir propriedades adequadas, análogas àquelas em **2.2**. Em **2.3.3.3** demonstramos a *conveniência*, um resultado mais forte do que a corretude, qual seja, de que podemos transformar um modelo de $\mathcal{W}_3$ e uma função de tradução da estrutura de traduções possíveis para C_1 em um modelo de valorações. O resultado em **2.3.3.4**, denominado *representabilidade*, é a recíproca da conveniência, e em **2.3.3.5** mostramos que a completude da semântica de traduções possíveis para C_1 dele decorre. As provas da conveniência e da representabilidade aqui apresentadas, inspiradas por Carnielli, são originais.

Em **2.3.3.6** mostramos através de diversos exemplos como a semântica de traduções possíveis fornece imediatamente um *novo procedimento de decisão* para as fórmulas de C_1, e em **2.3.3.7** mostramos como mapear este procedimento ao procedimento por quase-matrizes anteriormente apresentado, e vice-versa: poderíamos dizer, grosso modo, que as traduções possíveis causam o acréscimo de novas colunas onde as quase-matrizes acrescentam novas linhas. Através de suas traduções possíveis, as fórmulas de C_1 perdem de certa forma sua unicidade, passando a ser interpretadas como um conjunto de possibilidades na linguagem de $\mathcal{W}_3$; em compensação, o procedimento de avaliação para as fórmulas deste conjunto passa a ser *verofuncional*.

Seguimos até o momento um método heurístico na apresentação da primeira semântica de traduções possíveis da presente dissertação. Apenas em **2.3.4** apresentamos uma primeira definição para a semântica de traduções possíveis, a qual se baseia no conceito de *traduções entre sistemas lógicos*, conceito este apresentado e discutido em **2.3.4.1**, junto com outros conceitos relacionados. Em **2.3.4.2** reapresentamos a semântica de traduções possíveis para C_1 em termos deste novo vocabulário.

Capítulo 3

Este capítulo estende o trabalho feito no capítulo anterior para o restante da hierarquia C_n, com $n<\omega$. Em **3.1** mostramos como construir axiomaticamente cada um dos cálculos desta hierarquia, construção ilustrada na **Figura 2**. Anotamos incorreções na definição de fórmula *bem-comportada* apresentada em da Costa, 1963, e na prova por independência de que cada cálculo C_n seria estritamente mais forte do que seus sucessores, apresentada em da Costa, 1963, e repetida em Alves, 1976.

As semânticas de valorações para cada C_n, suas consequências e os procedimentos por quase-matrizes correspondentes, são os resultados apresentados e discutidos em **3.2**. Em **3.3** apresentamos as restrições que devem ser introduzidas sobre as funções de tradução em cada caso para definir as semânticas de traduções possíveis baseadas em $\mathcal{W}_3$ para cada C_n.

Capítulo 4

Neste capítulo abordamos o problema de se definir um "limite" para a hierarquia C_n, $1 \leq n < \omega$. Em **4.1** notamos que o cálculo C_ω de da Costa não é senão um limite muito "fraco" para a hierarquia C_n: embora todos os teoremas do Cálculo Positivo Clássico sejam válidos em cada C_n, tal já não acontece em C_ω. Se desejamos, como seria muito natural, que o *cálculo-limite* seja tal que seu conjunto de teoremas coincida com o conjunto de teoremas comuns a todos os cálculos da hierarquia, isto é, que o cálculo-limite seja o *limite dedutivo* da hierarquia, percebemos que C_ω não se presta a cumprir este papel, pois não passa de um mero limite dedutivo inferior, e complicado demais, por sinal.

Apresentamos em **4.2** a axiomatização do cálculo C_{min}, sugerida por Carnielli, cálculo construído com o objetivo de estender C_ω de tal forma a ser capaz de demonstrar todos os teoremas do Cálculo Positivo Clássico. Mostramos em seguida como caracterizar C_{min} através de uma semântica de valorações bastante simples. Em **4.3** comparamos os cálculos C_ω e C_{min} e nos perguntamos se este último nos daria o desejado cálculo-limite da hierarquia C_n. Antes de responder a esta questão, mostramos, em **4.4**, como fornecer uma semântica de traduções possíveis bastante simples para C_{min} baseada nas matrizes de uma lógica trivalente que denominamos $\mathcal{W}_3^{\odot}$, e verificamos em seguida como é possível fazer uso desta semântica de traduções possíveis a fim de mostrar que o cálculo C_{min} e, por consequência, também o cálculo C_ω, são incapazes de demonstrar quaisquer proposições negadas.

Em **4.5** mostramos que o cálculo C_{min}, embora seja um interessante e novo limite inferior para a hierarquia C_n, também *não é* o cálculo-limite desta hierarquia. Verificamos assim que há, por exemplo, Leis de De Morgan válidas em cada cálculo da hierarquia C_n que são, não obstante, indemonstráveis a partir de C_{min}. Fixando como exemplo uma destas fórmulas de De Morgan, mostramos em **4.5.1** como derivá-la sintaticamente em cada C_n, e mostramos em **4.5.2** como tanto suas quase-matrizes quanto suas traduções possíveis confirmam sua validade em cada C_n, mas desconfirmam esta validade no caso de C_{min}. O cálculo C_{min} apresenta um axioma a mais do que o cálculo C_ω, mas notamos que este axioma é demonstrável em cada um dos cálculos C_n, cálculos estes que apresentam, por sua vez, dois axiomas não-demonstráveis em C_{min}. Em **4.5.3**, para fechar de vez o assunto, provamos a indemonstrabilidade das leis de De Morgan nos cálculos produzidos pela retirada de C_n de qualquer um destes dois axiomas não-demonstráveis em C_{min}. A seção **4.5.4** resume todo o esforço feito até então.

Finalmente, em **4.6**, mostramos como as semânticas de traduções possíveis para os cálculos C_n podem ser utilizadas para definir a semântica de traduções possíveis para C_{Lim}, o verdadeiro cálculo-limite da hierarquia C_n, e até mesmo providenciar para este cálculo um procedimento de decisão.

Os principais resultados deste capítulo, e vários outros, tais como aqueles apresentados no capítulo **…**, **Primeiras Estórias**, e alguns resultados encontrados no apêndice $\omega\times\omega$, foram apresentados no XII Encontro Brasileiro de Lógica, promovido em maio de 1999 no Parque Nacional do Itatiaia, no Rio de Janeiro, e podem igualmente ser encontrados em um artigo de Carnielli e do autor (Carnielli & Marcos, 199?b).

Capítulo 5

Apresentamos neste capítulo muitos outros cálculos paraconsistentes relacionados à hierarquia C_n de da Costa, seja porque a estendem, seja porque consistem em alternativas a ela, e para cada um deles mostramos como fornecer semânticas de traduções possíveis adequadas. A maioria destes cálculos é introduzida na presente dissertação.

As duas primeiras novas hierarquias são apresentadas em **5.1**, e são construídas a partir da observação de que o cálculo C_1 trata de maneira diferenciada as as fórmulas $\neg(A\wedge\neg A)$ e $\neg(\neg A\wedge A)$: apenas a validade da primeira indicaria neste cálculo o bom-comportamento. Ora, podemos construir um cálculo simétrico a C_1 no qual a segunda fórmula é que fosse privilegiada, e um terceiro cálculo poderia dar a ambas o mesmo tratamento. Outras três hierarquias são apresentadas em **5.2**, a partir da constatação de que a fórmula $A\rightarrow\neg\neg A$ poderia ser acrescentada a cada cálculo das hierarquias anteriores. Béziau (1990) sugeriu estender o cálculo C_1 de da Costa, "facilitando" a propagação do bom-comportamento, de modo a tornar possível a obtenção de uma relação de congruência não-trivial, indefinível em C_1. Apresentamos em **5.3** a hierarquia C_n^+, originada a partir desta modificação, e suas relações de boa-equivalência. Cinco outras hierarquias relacionadas podem ser construídas a partir de C_n^+, como nas duas seções anteriores.

Discutimos, em **5.4**, a questão de se propor "limites" para todas estas hierarquias. Definimos, em **5.4.1**, o cálculo $C_{min}^{\neg\neg}$, um limite dedutivo inferior para a metade das doze hierarquias acima, construído a partir de C_{min} pelo acréscimo do axioma $A\rightarrow\neg\neg A$, como em **5.2**. Deixamos clara ainda a possibilidade de se definir cálculos-limites para cada uma destas hierarquias por meio da combinação das semânticas de traduções possíveis de cada um de seus cálculos, exatamente como fizemos em **4.6** para a hierarquia C_n.

Em **5.4.2** nos interessamos por cálculos maximais estendendo as hierarquias mencionadas. Um cálculo deste gênero é o cálculo trivalente $\mathcal{P}^1$, introduzido por Sette (1973), que estende metade destas hierarquias. Este cálculo é apresentado em **5.4.2.1**, e aprendemos como fornecer-lhe semânticas de sociedade – um caso particular de semânticas de traduções possíveis, estudado em Carnielli & Lima-Marques, 1999 – além de semânticas de mundos possíveis baseadas numa estrutura reflexiva com no máximo dois mundos. Mostramos ainda uma maneira original de caracterizar o cálculo $\mathcal{P}^1$ por meio de uma semântica de traduções possíveis. Em **5.4.2.2** introduzimos um outro cálculo trivalente maximal, que batizamos $\mathcal{P}^2$, capaz de estender todas as doze hierarquias estudadas, e mostramos como dotá-lo igualmente de uma semântica de sociedade, uma semântica de mundos possíveis e uma semântica de traduções possíveis.

O cálculo $\mathcal{P}^2$ é apresentado em Marcos, 199?a, artigo no qual podem ser encontrados os principais resultados da seção **5.4.2** e suas subseções, bem como toda a parte final do apêndice $\omega+\omega$.

Capítulo …

Este capítulo final se ocupa de diversas questões relacionadas às semânticas de traduções possíveis que foram negligenciadas até este ponto. Em **Combinações entre lógicas**, mostramos como as semânticas de traduções possíveis podem ser vistas como uma maneira de combinar lógicas visando a um objetivo específico. Ora, cada tradução de uma lógica $\mathbf{L}_1$ em uma lógica $\mathbf{L}_2$ define um fragmento de $\mathbf{L}_2$ que “se comporta como” $\mathbf{L}_1$. Podemos, neste fragmento de $\mathbf{L}_2$, reproduzir, a menos de uma tradução, as operações que executamos em $\mathbf{L}_1$. Os exemplos de semânticas de traduções possíveis até aqui estudados nos mostraram como *fatorar* uma lógica dada em termos da combinação das lógicas definidas nos fragmentos dados pelas traduções consideradas. Nosso objetivo aqui foi sempre o de fornecer uma interpretação para uma lógica não-clássica. Nos interessamos nesta seção nos outros avanços que poderíamos fazer na fatoração de lógicas. Em **Produto**, mostramos que há uma outra maneira de combinar lógicas, muito mais comum na literatura, que é combinar lógicas dadas para *produzir* como resultado uma nova lógica, mais rica. É claro que as semânticas de traduções possíveis também podem ser utilizadas para este fim. Damos apenas um exemplo, devido a Carnielli (1999), de uma lógica com características paraconsistentes definida a partir de uma semântica de traduções possíveis baseada na combinação de modelos da semântica de mundos possíveis para o Cálculo Intuicionista de Heyting.

Em **Através do Espelho**, discutimos brevemente a dualidade entre lógicas. Fazemos uso das semânticas de traduções possíveis para as lógicas paraconsistentes estudadas para propor lógicas paracompletas que lhes são duais em um certo sentido. Em **Primeiras Estórias** apresentamos lógicas “duais” a C_{min} e a $C_{min}^{\neg\neg}$, e em **Terceiras Estórias** mostramos como caracterizar a dualidade entre as lógicas $\mathcal{P}^1$ e $\mathcal{I}^1$ – esta última introduzida em Sette & Carnielli, 1995. Fornecemos para $\mathcal{I}^1$ semânticas de sociedade, de mundos possíveis e de traduções possíveis. Seguindo

Carnielli & Lima-Marques, 1999, apresentamos um *dualizador de* $\mathcal{I}^1$ *em* $\mathcal{P}^1$, e apresentamos ainda uma *tradução conservativa de* $\mathcal{I}^1$ *em* $\mathcal{P}^1$, corrigindo aquela apresentada em Feitosa, 1997.

Terminamos este capítulo com a seção **Questões abertas**, reapresentando e comentando uma série de questões que foram deixadas em aberto ao longo da dissertação, algumas delas já levantadas na literatura (**Velhas interrogações**), outras que surgiram ao longo do nosso trabalho (**Novas interrogações**). Em meio à reelaboração de tantas questões, vários novos resultados ainda são mencionados.

Apêndice ω

Coletamos neste apêndice todas as lógicas paraconsistentes tratadas na presente dissertação. Apresentamos os seus **Axiomas**, definimos cada um dos **Cálculos**, e ilustramos algumas de suas inter-relações na **Figura 3**. Como fonte de consulta, e para bem diferenciar cada um dos cálculos que ganharam semânticas de traduções possíveis na presente dissertação, fornecemos várias listas de teoremas clássicos: **Leis de De Morgan**, **Implicação-disjunção**, **Implicação-conjunção**, **Formas de contraposição**, **Outros esquemas**, e verificamos em quais cálculos eles são válidos.

Apêndice ω+ω

Este apêndice se ocupa somente de lógicas trivalentes maximais, a maior parte delas com caráter paraconsistente.

Em **Da capacidade de expressão de $Ł_3$, $\mathcal{J}_3$ e $\mathcal{W}_3$**, demonstramos um resultado original, construtivo, segundo o qual as matrizes unárias e binárias definíveis nestes três cálculos são exatamente aquelas, nem mais nem menos, cujo reduto ao domínio clássico consiste em tabelas clássicas. Na seção seguinte, **$\mathcal{J}_3$ é maximal**, este resultado de maximalidade é demonstrado pela primeira vez.

Em **Os cálculos $\mathcal{P}^1$ e $\mathcal{P}^2$**, estes dois cálculos são estudados em detalhe. Em **Um axioma a menos** demonstramos um resultado que, embora conhecido, não é facilmente encontrável na literatura, qual seja, de que um dos axiomas da apresentação original de $\mathcal{P}^1$ (Sette, 1973), é dedutível a partir dos demais. N**A segunda via**, propomos novas axiomatizações para $\mathcal{P}^1$, acrescentando novos axiomas a cada um dos cálculos C_n. Damos a seguir a demonstração construtiva usual (Kálmar), ainda que original, da completude de $\mathcal{P}^1$, e modificamos a demonstração de sua maximalidade apresentada por Sette (1973). N**A Terceira Margem** apresentamos a axiomatização do cálculo $\mathcal{P}^2$, e mostramos como a sua completude pode ser demonstrada a partir de pequenas modificações da demonstração que oferecemos para o cálculo $\mathcal{P}^1$ na seção anterior. A demonstração modificada da maximalidade de $\mathcal{P}^1$ serve igualmente à demonstração da maximalidade de $\mathcal{P}^2$.

Apêndice $\omega\times\omega$

Este apêndice apresenta diversos resultados relativos aos cálculos paraconsistentes citados no apêndice ω. Se é verdade que cada demonstração de independência é uma pérola, oferecemos aqui um belo colar. Na primeira seção, **Da independência dos axiomas de C_n**, tomamos cada um dos doze axiomas de C_n e apresentamos matrizes que demonstram a sua independência dos demais. Estes resultados já haviam sido propostos em Alves, 1976, mas metade deles apresentava problemas. Na seção seguinte, **Da independência dos axiomas de $C_n^{\neg\neg}$**, mostramos a independência dos axiomas de $C_n\cup\{A\to\neg\neg A\}$, e em **A um passo da lógica clássica** usamos as matrizes de $\mathcal{P}^2$ para verificar que o esquema $\neg(A\wedge\neg A)$ permanece indemonstrável nestes últimos cálculos.

Em **Da substituição de axiomas** provamos e desprovamos vários teoremas acerca da possibilidade de substituição de um axioma por outro no interior de uma dada axiomatização, sem alterar a teoria resultante. Em **Bolas e quadrados** mostramos que as fórmulas $\neg(A\wedge\neg A)$ e $\neg(\neg A\wedge A)$ não são equivalentes em nenhum cálculo C_n. Em **C_ω *versus* C_{min}** aprendemos que os esquemas $((A\to B)\to A)\to A$ e $A\vee(A\to B)$ não são demonstráveis em C_ω (**Independência de Peirce e Dummett em C_ω**) e consertamos a prova encontrada em Alves, 1976, de que **Nem C_ω nem C_{min} são finitamente trivializáveis**. Finalmente, em **Incaracterizabilidade por matrizes finitas**, apresentamos duas demonstrações, uma devida a Arruda e outra a Carnielli – esta última aqui apresentada pela primeira vez – de que determinados cálculos paraconsistentes não são também finito-valentes.

Seção ω^{ω}

Nesta seção final se encontram todas as referências da dissertação. Dividimo-las em três partes, a **Bibliografia das seções *n*, $n\leq 1$**, que serve ao capítulo **1.** e a esta introdução (seção **0.**), a **Bibliografia das seções *n*, $n\neq 1$**, que serve igualmente a esta introdução, e aos outros capítulos que não o primeiro, e o **Índice remissivo**, que serve ao leitor curioso e parcimonioso com o seu próprio tempo. A divisão entre as bibliografias se justifica pelo fato de que o capítulo **1.** difere sobremaneira em natureza dos capítulos restantes, pois contém filosofia onde os outros contém matemática – como consequência, suas fontes de consulta são praticamente disjuntas das fontes dos capítulos restantes, e optamos por mantê-las em separado.

Agradecimentos etc.

Aos meus pais, de cabo a rabo. Pela criação, pelo carinho, pelo conforto. Por amor. Por **tudo**. À Rosa, companheira, por **todo o resto**, que não é pouco.

Devo agradecer profundamente ao Walter – mais que orientador, um amigo – por brindar-me com um tema de trabalho tão fascinante e **fecundo**. Mais que lições de lógica, Walter deu-me lições de vida. Ao **santo** Coniglio devo professar minha fé: sem sua ajuda e amizades inestimáveis eu ainda estaria a léguas daqui, e esta dissertação já não seria real. A Itala agradeço pela **confiança**, e por acolher-me inicialmente no programa de pós-graduação. Esta dissertação deve muito de seu conteúdo atual aos **preciosos** comentários de Itala e de Jean-Yves a uma primeira versão sua. A Michael e Arley não sei se devo agradecer ou me queixar: foi através deles que penetrei nas obras e conheci os desígnios fregeanos e **wittgensteinianos**. O primeiro capítulo desta dissertação deve muito à **orientação** segura de Arley, às observações de Jean-Yves e à **revisão** tão cuidadosa do amigo José Feres. Aos meus irmãos, e aos amigos que restaram, sou grato pela fidelidade, pela felicidade, pela paciência, sobretudo durante meus largos **lapsos** de incomunicabilidade criativa.

Esta dissertação foi financiada por uma bolsa do CNPq.

Fazemos um último comentário a respeito do uso que fizemos deste amassilho hipertrofiado de editor de texto e de calculadora – resumo para **computador**. Segundo Picasso, "computadores são inúteis: eles só nos dão respostas." O autor concorda com o pintor em gênero e número, porém não em grau. Bem usado, o precário computador de que hoje dispomos pode eventualmente converter-se em um poderoso laboratório de experimentações matemáticas. Nos dizeres de Feigenbaum, um dos criadores da Teoria do Caos, podemos utilizar o computador como "câmara de bolhas" onde testar e observar o resultado de nossas conjeturas numérico-simbólicas, com o propósito de "criar intuição". Diversos teoremas aqui demonstrados foram sugeridos ao autor por meio desta experimentação no computador. Descobrimos assim, em cada caso, as restrições necessárias e suficientes sobre as traduções possíveis, manipulamos um sem-número de matrizes, implementamos diversos procedimentos recursivos. Nenhum dos apêndices teria sido possível sem o uso do computador. O principal programa que utilizamos foi o *MATHEMATICA*®, desenvolvido pela **Wolfram Research**.

Nem seria preciso dizer que todos os possíveis acertos e êxitos desta dissertação devem ser partilhados pelo autor com todas as pessoas acima mencionadas. Mas dizemos mesmo assim: sem elas nada haveria. Vale registrar ainda que os resultados aqui apresentados são em geral originais, a menos que se manifeste textualmente o contrário; os resultados já conhecidos na literatura são aqui, via de regra, recalculados, e não apenas transcritos. Os erros que porventura persistiram, é claro, são de exclusiva responsabilidade do autor. E de seu computador.

1
De Uma Filosofia Da Paraconsistência

Tentar derivar toda a matemática pura a partir de um punhado de princípios lógicos, esta era a natureza da tarefa (dita *logicista*) a que se propunha Bertrand Russell, em 1903, em seu *The Principles of Mathematics* (Os Fundamentos da Matemática). Em um apêndice desta obra, Russell nos conta que recém tomara conhecimento de um esforço afim, empreendido alguns anos antes em um trabalho pouco divulgado de Gottlob Frege, cujo primeiro volume viera à luz em 1893, sob o título de *Grundgesetze der Arithmetik* (Leis Básicas da Aritmética). Mesmo tendo feito uma leitura apressada desta última obra, Russell notou uma dificuldade que de início lhe pareceu secundária, mas que logo mais seria conhecida como o mais famoso paradoxo da teoria de conjuntos.

Muitos trabalhos em lógica, em teoria de conjuntos e em filosofia e fundamentos da matemática no século XX terão origem neste paradoxo; sobre este paradoxo se dirá até mesmo que "a descoberta por Russell de um conjunto que é ao mesmo tempo membro de si mesmo e não-membro de si mesmo é a maior descoberta matemática desde $\sqrt{2}$." (Priest, 1979, p.240) Mas em que consiste afinal o *paradoxo de Russell*?

A teoria de conjuntos encontrava-se ainda incipiente no princípio do século – seu pontapé inicial fôra dado por Georg Cantor, em 1874, no artigo "Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen" (Sobre uma propriedade essencial de todos os números reais algébricos), publicado nos *Mathematische Annalen*. Somente em 1895 e 1897, nos dois artigos que compunham os "Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre" (Contribuições aos fundamentos da teoria de conjuntos transfinitos), Cantor faria conhecer, na mesma publicação acima, seus trabalhos sobre números ordinais e cardinais. Mas até as primeiras tentativas de axiomatização feitas por Zermelo, em 1908 (cf. a Introdução a Fraenkel & Bar-Hillel, 1958), a teoria cantoriana permaneceria em um estado primitivo, no qual se podem destacar dois princípios norteadores gerais:

- *Extensionalidade:* dois conjuntos são iguais quando têm os mesmos elementos.
- *Abstração* (ou *Compreensão*): toda propriedade determina um conjunto, composto por aqueles, e somente aqueles, objetos que gozam desta propriedade.

Na linguagem padrão da teoria de conjuntos, poderíamos formular este segundo princípio como

(PA): $\exists y \forall x\,(x \in y \leftrightarrow F(x))$, onde $F(x)$ é uma fórmula em que a variável x pode aparecer livre, mas não y.

A dificuldade surge quando substituímos por $F(x)$ a fórmula $x \notin x$. Neste caso, temos uma sentença que anuncia a existência do conjunto de todos os conjuntos que não pertencem a si mesmos:

(1) $\exists y \forall x\,(x \in y \leftrightarrow x \notin x)$.

Denominemos r o conjunto cuja existência é garantida por **(1)**. Daí,

(2) $\forall x\,(x \in r \leftrightarrow x \notin x)$.

Em particular, para $x = r$, temos

(3) $r \in r \leftrightarrow r \notin r$.

Como resultado obtivemos um paradoxo: um conjunto r que pertence e não pertence a si mesmo. De **(3)** concluímos:

(4) $(r \in r)\ \&\ {\sim}(r \in r)$.

Sim, encontramos uma contradição na nossa proto-teoria de conjuntos, mas por que isto deveria nos preocupar? É simples. Acontece que há um outro princípio antigo (cf. Bobenrieth, 1996, *passim*, em especial cap.V-2) que afirma:

- *Pseudo-Escoto:* de duas proposições contraditórias deduz-se qualquer outra proposição.

Poderíamos formular este princípio por meio do seguinte esquema:

(PE): $(\alpha\ \&\ {\sim}\alpha) \rightarrow \beta$.

Este esquema é facilmente demonstrável em uma ampla classe de lógicas, classe esta que inclui a lógica clássica axiomatizada por Russell e Whitehead nos *Principia Mathematica*, em 1910. Recordamos que nas lógicas em geral podemos dispor da regra de Modus Ponens, **(MP)**, segundo a qual a partir da demonstração de esquemas φ e $\varphi \rightarrow \theta$ podemos inferir θ. De **(4)**, **(PE)** e **(MP)** podemos concluir a validade de um esquema β arbitrário. Portanto, numa teoria clássica que contenha uma contradição, qualquer fórmula da linguagem subjacente a esta teoria é fatalmente demonstrável.

Ao conhecer este resultado, Frege viu ruir sua tentativa de fundamentar a matemática. Dedekind, que trabalhava igualmente sobre os fundamentos da aritmética, interrompeu temporariamente seu trabalho. A fim de evitar uma formulação específica do paradoxo, Russell (1996, Ap.B) propusera sua complexa Teoria dos Tipos, mas acabou confessando seu temor de que ela fosse incapaz de resolver outras versões do "mesmo" paradoxo. A sentença que fecha os *Principles* é a seguinte:

> Qual seria a solução completa desta dificuldade eu não logrei descobrir; entretanto, como ela afeta os próprios fundamentos do raciocínio, eu diligentemente recomendo o seu estudo a todos os que se interessam pela lógica. (Russell, ibid., p.528)

De fato, vários outros paradoxos semelhantes ao de Russell foram sendo formulados, o que levou Poincaré a instar a comunidade matemática, em 1908, no "IV Congresso Internacional de Matemática" em Roma, a encontrar uma solução para esta crise que parecia abalar seriamente os fundamentos da matemática. Naquele mesmo ano, Wittgenstein tomaria conhecimento dos trabalhos de Russell, e em breve ele decidiria abandonar de uma vez por todas sua carreira como engenheiro aeronáutico para estudar matemática e lógica (cf. Monk, 1995). Ao fim e ao cabo, a matemática redundaria em alimento essencial para a sua primeira filosofia.

Anos mais tarde, de 1929 a 1944, quase metade da obra produzida por Wittgenstein trataria da filosofia da matemática, e mais de uma vez ele se referiria a este trabalho como "a sua contribuição principal" (cf. o verbete *Matemática*, em Glock, 1998). Contudo, uma boa parte das observações e comentários produzidos por Wittgenstein nesta época são por demais heterodoxos, e podem facilmente nos conduzir à impressão de que tivemos o nosso "bom senso ultrajado" (Wright, 1980, p.295).

Nesta nova fase de sua filosofia, Wittgenstein afirma que sua tarefa "não é atacar a lógica de Russell de dentro, mas de fora" (*Foundations* V-16), isto é, ele pretende *falar sobre* matemática sem *fazer* matemática, até porque "em matemática só pode haver problemas matemáticos, e não filosóficos" (*Grammar*, p.369), e são estes últimos que lhe interessam. Um bom modelo daquilo a que Wittgenstein se propõe combater é dado pela motivação filosófica que dera origem ao programa de investigações matemáticas concebido pelo matemático alemão David Hilbert. Tecnicamente, este programa poderia ser resumido pela tentativa de:

a) axiomatização (de uma boa parte) da matemática;

b) prova da consistência por meios finitários. (cf. Hilbert, 1926)

A prova da consistência da aritmética era tida, para Hilbert, como indispensável, a fim de que nos assegurássemos de que “ninguém irá nos expulsar do paraíso criado por Cantor” (cf. Reid, 1996, cap.XX). Dizemos de uma teoria que ela é *inconsistente* quando a partir dela podemos deduzir uma contradição, e dizemos que ela é *trivial* quando a partir dela podemos deduzir qualquer fórmula na linguagem a ela subjacente. É claro que toda teoria trivial é inconsistente, e no esquema dedutivo da lógica clássica, graças ao Pseudo-Escoto e a Modus Ponens, sabemos que vale a recíproca: toda teoria inconsistente é trivial. Daí o motivo pelo qual seria importante para Hilbert demonstrar a inexistência de contradições na teoria de conjuntos: usando a teoria de conjuntos para fundamentar toda a matemática, garantiríamos a inexistência de contradições na aritmética, que seria por sua vez consistente, e definitivamente não-trivial.

Tudo isto parece bastante razoável, e até mesmo um caminho natural para a matemática, através do qual ela ficaria *mais segura*. O que então no programa de Hilbert tanto incomodava Wittgenstein? Não era, por certo, a tarefa de se evitar a contradição, pois este é um problema matemático, enquanto “a posição cotidiana da contradição, ou sua posição no mundo cotidiano: este é o problema filosófico.” (*Investigações* §125) O que lhe perturbava era justamente o fato de que a ausência de contradição, uma característica interna ao cálculo, pudesse nos dar uma *segurança* externa ao cálculo, isto é, uma confiança maior no cálculo. Isto decerto ultrapassava as fronteiras do próprio cálculo – o programa de Hilbert não seria portanto um programa matemático. Mais profundamente, a crítica de Wittgenstein ia contra a idéia de que fosse possível, ou mesmo necessária, a fundamentação da matemática.

1.1 Teria Wittgenstein formulado a idéia de uma lógica paraconsistente?

Wittgenstein teve os seus dias de profeta:

> De fato, mesmo neste estágio, eu prevejo um tempo em que haverá investigações matemáticas de cálculos contendo contradições, e as pessoas realmente se orgulharão de ter se emancipado até mesmo da consistência. (*Vienna*, p.139, transcrito em *Remarks*, p.332)

Com efeito, vimos assistindo recentemente à construção de cálculos inconsistentes porém não-triviais, ditos *paraconsistentes*. Independente de sua motivação ou justificação, os sistemas lógicos paraconsistentes tiveram sucesso em ilustrar a idéia de cálculos que permitam a ocorrência de proposições contraditórias, porém ao mesmo tempo evitem a construção de paradoxos como o de Russell. Eles são capazes, portanto, de isolar as contradições, impedindo-as de contaminar todo o resto – evitam assim a trivialização que advém da inconsistência. Mas a trivialização poderia muito bem ocorrer por outra via…

Em 1939, em suas palestras em Cambridge, Wittgenstein discutira intensamente os problemas filosóficos encontrados na fundamentação da matemática. Pouco tempo depois, em 1942, Haskell Curry, refinando bastante o paradoxo de Richard, apontaria uma nova via lógica em direção à trivialização. Tomemos mais uma vez o princípio da Abstração da teoria de conjuntos, e desta vez substituamos $F(x)$ por $x \in x \rightarrow \beta$, onde β representa uma fórmula arbitrária. Temos então:

(5) $$\exists y \forall x\, (x \in y \leftrightarrow (x \in x \rightarrow \beta)).$$

Denominemos c o conjunto de cuja existência trata **(5)**. Daí:

(6) $$\forall x\, (x \in c \leftrightarrow (x \in x \rightarrow \beta)).$$

Em particular, para $x = c$, temos:

(7) $$c \in c \leftrightarrow (c \in c \rightarrow \beta).$$

Da bi-implicação em **(7)** concluímos:

(8) $$c \in c \rightarrow (c \in c \rightarrow \beta).$$

(9) $$(c \in c \rightarrow \beta) \rightarrow c \in c.$$

Aqui entra em cena um outro princípio, o qual formularíamos por meio do seguinte esquema:

Lei da Contração (LC): $(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$.

Ora, de **(LC)** e de **(8)**, por Modus Ponens **(MP)**, segue:

(10) $c \in c \rightarrow \beta$.

E de **(9)** e **(10)**, por **(MP)**, temos:

(11) $c \in c$.

Mas de **(10)** e **(11)**, numa última aplicação de **(MP)**, temos:

(12) β.

Mostramos assim que a nossa proto-teoria de conjuntos é trivial, mesmo sem passar pela contradição. Observe que a Lei da Contração e a regra de Modus Ponens são válidas em sistemas tão fracos quanto a parte positiva do Cálculo Intuicionista de Heyting – o *paradoxo de Curry* parece ser irrecorrível.[1] A forma irrestrita do princípio da Abstração e a lógica clássica são portanto *incompatíveis*, isto é, não é possível manter ambas sem a trivialização da teoria. Mantendo a lógica clássica subjacente, a única saída é portanto restringir aquele princípio, que é o que faz, por exemplo, a teoria de conjuntos de Zermelo-Fraenkel, **ZF**. Nesta teoria podemos ainda formar conjuntos que sejam a extensão de certas propriedades, mas somente a partir de outros conjuntos já dados:

Princípio Restrito da Abstração: $\forall z \exists y \forall x\, (x \in y \leftrightarrow (F(x) \& (x \in z)))$.

A consequência incômoda é que agora já não é mais possível demonstrar a existência do conjunto binário $\{x, y\}$ formado por *x* e *y*, do conjunto união, do conjunto das partes de um conjunto dado, do conjunto vazio, de conjuntos infinitos. Para assegurar seu poder expressivo, **ZF** deve contar com outros axiomas além daqueles que garantem a extensionalidade e a forma restrita da Abstração. Outros sistemas de teoria de conjuntos existem, tais como o de Kelley-Morse, o de von Neumann-Bernays-Gödel, e o de Quine. Todos têm cores diferentes, mas o mesmo sabor: eles resolvem os problemas dos paradoxos também impondo restrições sobre a fórmula $F(x)$, seu domínio ou sua forma. Assim como a Teoria dos Tipos de Russell, estes sistemas são construídos de modo a evitar os

[1] Versões generalizadas dos paradoxos podem se encontradas na introdução a da Costa *et al.*, 1998.

paradoxos que surgem da auto-referência. Wittgenstein depreende daí a seguinte lição: “Devemos às vezes pôr restrições à expressão da generalidade de modo a evitar que sejamos obrigados a extrair consequências indesejáveis disto.” (*Zettel* §692)

Por outro lado, temos ainda a alternativa de manter a forma irrestrita do princípio da Abstração, modificando agora a lógica subjacente ao nosso sistema, substituindo-a por uma lógica paraconsistente que evite também a trivialização não decorrente da contradição (cf. p.ex. Carnielli, 1998). Há diversas maneiras de se fazer isso, e a força da nossa proto-teoria de conjuntos poderia ser assim plenamente restabelecida. Em tais teorias paraconsistentes de conjuntos as contradições seriam não apenas permitidas e controladas, como poderiam ser diretamente estudadas – conjuntos como o de Russell ou o de Curry poderiam existir sem gerar paradoxos e poderíamos até mesmo investigar suas propriedades.

Consideremos agora o seguinte princípio:

- *Princípio da Não-Contradição:* proposições contraditórias não podem ser simultaneamente verdadeiras.

Este era para Aristóteles o mais seguro de todos os princípios lógicos (vide **1.4**). Uma formulação esquemática para este princípio poderia ser a seguinte:

(PNC): $\sim(\alpha \mathbin{\&} \sim\alpha)$.

Na lógica clássica os princípios da Não-Contradição, **(PNC)**, e o Pseudo-Escoto, **(PE)**, são equivalentes. No entanto, é importante ressaltar que a construção de uma lógica paraconsistente funda-se mais na rejeição da validade de **(PE)** do que na de **(PNC)**. De fato, no apêndice $\omega+\omega$ deste trabalho podemos encontrar exemplos de lógicas tais que:

a) vale **(PE)** mas não vale **(PNC)**: $Ł_3$;

b) vale **(PNC)** mas não vale **(PE)**: $\mathcal{J}_3$;

c) não vale **(PE)** nem **(PNC)**: $\mathcal{P}^1$ e $\mathcal{P}^2$.

Destas lógicas, a única que *não* diríamos paraconsistente é $Ł_3$. Mas o que há de especial em lógicas paraconsistentes e que as fazem rejeitar, pelo menos parcialmente, **(PE)** e, em alguns casos, também **(PNC)**? No mínimo, o que entendemos pelo símbolo de negação aqui deve diferir do caso clássico. Um artifício comum à semântica de diversas lógicas paraconsistentes é de tomar o operador de negação mais ou menos como um operador modal: sua saída não é função da entrada, de modo tal que podemos interpretar como verdadeiras tanto a fórmula α quanto a sua negação, $\sim\alpha$ (vide p.ex. **2.2** e **2.3.1**). Vemos assim que as lógicas paraconsistentes não têm uso apenas na ilustração da possibilidade de existência de teorias não-triviais mesmo que inconsistentes, e no estudo direto das propriedades destas teorias; com efeito, temos aqui esboçada uma outra característica notável destas lógicas: a possibilidade que nos dão de explorar o significado e o funcionamento da negação. Ora, se em uma tal lógica pudermos escrever uma fórmula do tipo $\alpha \& \sim\alpha$, então o que devemos entender da negação já não pode ser mais o que costumava ser, e o seu funcionamento no cálculo não será definitivamente o mesmo.[2] Mas não pretendemos interpretar a negação paraconsistente como apenas mais um operador modal, ou um conectivo unário qualquer – exigimos normalmente que ela, além disso, tenha algumas propriedades interessantes. Em suma, se por um lado devemos especificar critérios negativos para a negação, de modo a obter uma negação *paraconsistente*, por outro lado devemos especificar critérios positivos, de modo a obter uma *negação* paraconsistente (cf. Béziau, 1999).

A respeito da negação, também Wittgenstein tinha certas intuições. O modelo que ele veio esmerando desde a época do *Tractatus* parece consistir no que poderíamos denominar uma visão explosiva da negação aliada a uma visão cancelativa da contradição (cf. Goldstein, 1989, p.541-2). Assim, Wittgenstein entendia que a proposição atômica p se referia a um objeto, $\sim p$ se referia a todos os objetos que não fossem p, mas $p \& \sim p$ não se referia a objeto algum. Mas é só mesmo nas *Investigações* (§547-57) que Wittgenstein se manifestou claramente contra a idéia de que devesse haver algo em comum a toda negação, isto é, de que no fundo toda negação devesse ter uma essência, e compartilhar "um mesmo significado".

---

[2] Um estudo sistemático da negação pode ser encontrado em Curry, 1952. Uma reformulação moderna deste trabalho é feita por Béziau, 1994.

É pela negação que se chega à contradição. Mas e a consistência? Talvez aqui a linguagem tenha exercido seu feitiço. Em alemão, o termo para contradição é *Widerspruch*, e o termo para consistência é *Widerspruchfreiheit*, literalmente, “que está livre de contradição”. Isso pode ter inspirado Hilbert, identificando inconsistência e trivialidade, a preocupar-se somente com a possível presença de contradições no cálculo, sem imaginar que a trivialidade pudesse ser alcançada por um outro caminho, como mostrou o paradoxo de Curry. Enquanto isso, desconhecendo igualmente o resultado de Curry, Wittgenstein criticava a importância exagerada que os matemáticos formalistas depositavam na prova da consistência, e a hostilidade que apresentavam com relação à contradição. Ele caracterizava o seu próprio objetivo como o de “alterar a *atitude* em face da contradição e das provas de consistência. (*Não* mostrar que esta prova mostra algo desimportante. Como *poderia* ser assim?)” (*Foundations* II-82)

Entre as principais convicções às quais Wittgenstein acreditava estarmos inclinados, e que ele deseja alterar, estão:

a) Um cálculo com um contradição é de algum modo *essencialmente* defeituoso.

b) Quando uma contradição vem à tona, algum tipo de ação remediadora nos é racionalmente exigida – não podemos apenas deixar estar.

c) Há uma tal coisa como a lógica ou a teoria de conjuntos *correta*, e os paradoxos mostram que não a encontramos.

d) Para qualquer ramo particular da matemática, é desejável que ele seja arrumado de tal forma que as contradições possam ser evitadas *mecanicamente*.

e) As provas de consistência são necessárias – ou pelo menos desejáveis. Um sistema para o qual tal prova não foi apresentada, ou não é obtenível, é algo inseguro.

f) Uma contradição oculta é tão ruim quanto uma contradição revelada. Um sistema contendo tal contradição é totalmente estragado por ela. (Wright, 1980, p.296-7)

Segundo Wittgenstein,

> veremos a contradição sob uma luz bastante diferente ao olharmos para sua ocorrência e suas consequências como que antropologicamente – e ao olharmos para ela com a exasperação do matemático. Quer dizer, olharemos para ela de maneira bastante diferente se meramente tentarmos *descrever* como a contradição influencia os jogos de linguagem, e se olharmos para ela do ponto de vista do legislador matemático. (*Foundations* II-87)

O que o filósofo realmente almeja é *mudar o nosso olhar*. Agora, se tomarmos à letra a sua predição de que apenas uma mudança de olhar já seria suficiente para promover a emancipação da consistência, então parece que Wittgenstein *é* um dos proponentes do paradigma da paraconsistência (cf. Goldstein, 1989, p.541).

Se ele nos tivesse dito ao menos como proceder! No entanto, como fica patente, Wittgenstein "não teve sucesso em colocar o problema de se isolar uma contradição *em termos logicamente viáveis*, isto é, ele não formulou realmente a idéia de uma lógica paraconsistente (e talvez ele não a tivesse aceito se a conhecera)." (da Costa & Marconi, 1989, p.24, grifo nosso)

1.2 Seria possível formulá-la a partir de sua obra?

Uma contribuição fundamental da paraconsistência terá sido a distinção entre inconsistência e trivialidade: enquanto a primeira é uma característica no máximo indesejável do cálculo, a segunda representa a sua ruína, pois o cálculo deixa de "fazer a diferença" (Marconi, 1984, p.336). Seu mote é dado por da Costa, um de seus fundadores, que afirma que "do prisma sintático-semântico, toda teoria matemática é admissível, desde que não seja trivial." (da Costa, 1959, p.18)[3] Gilles-Gaston Granger descreve a lógica paraconsistente como um "recurso provisório ao irracional", por manter um indício do racional, que é a condição de não-trivialidade, e outro indício do irracional, que é a presença possível de contradições, presença esta a ser justificada filosoficamente (Granger, 1998, p.175). A diferença capital no caso de Wittgenstein é que o filósofo não aborda a questão da trivialidade, "e pode-se duvidar mesmo se Wittgenstein, tendo bem ponderado a constituição de uma nova matemática, de um novo cálculo contraditório, teria considerado como possível e apresentando algum interesse a *formulação* de uma *lógica* da contradição, a formulação de suas *regras*." (id., ibid., p.178-9)

---

[3] A este lema, da Costa denominou Princípio de Tolerância em Matemática, por analogia àquele formulado por Carnap em sintaxe (cf. Carnap, *The Logical Syntax of Language*, 1949).

Afinal, o que Wittgenstein realmente propõe que façamos com as contradições? “A contradição deve ser vista não como uma catástrofe mas como um muro indicando que não podemos entrar aqui.” (*Zettel* §687) Para a tarefa de construir um sistema dedutivo inconsistente porém não-trivial, “Wittgenstein oferece a intrigante sugestão de que deveríamos prescrever que nenhuma conclusão se extraia da contradição. No sistema que ele tem em mente há dois tipos de regra, permissões e proibições.” (Goldstein, 1977, p.371) Se é verdade que tudo segue de uma contradição, então tomemos como regra que não devemos tirar quaisquer conclusões a partir de contradições (*Lectures* XXI, p.209). Podemos permitir contradições em nossas teorias e mesmo assim não admitir que tudo o mais siga daí.

Podemos dizer que tais considerações de Wittgenstein “são e não são paraconsistentes.” (Granger, ibid., p.176) O trabalho de montar sistemas lógicos capazes de evitar a ocorrência das condições contraditórias que geram paradoxos tais como o de Russell é na verdade um empreendimento completamente distinto daquele a que se propõe Wittgenstein. Assim é que, em um primeiro momento, para Wittgenstein, “a *solução* para o paradoxo consiste em detectar a condição contraditória, e livrar-se das analogias imprecisas.” (Goldstein, 1983, p.153) As antinomias hão de desaparecer por meio de uma *análise*, não por meio de uma *prova* (*Vienna*, p.121-2). Assim como os problemas filosóficos, elas devem ser dissolvidas. Isto pode ser feito, por exemplo, se demonstrarmos que as sentenças que geram os paradoxos não têm uso no jogo da asserção, sendo portanto sentenças sem sentido, e falhando consequentemente em ser proposições. Como somente proposições podem ser verdadeiras ou falsas, estas sentenças não são nem verdadeiras nem falsas, e sua conjunção não forma uma contradição (*Vienna*, p.124). Mais ainda, a idéia de que a contradição não seria uma proposição pode ser encontrada em toda a obra de Wittgenstein, desde o *Tractatus* (compare, por exemplo, 4.064 com 4.461, ou 4.01 com 4.462, ou finalmente 3.13 e 3.31 com 6.11), até sua filosofia posterior: a contradição de Russell poderia ser concebida como algo supra-proposicional, algo que se eleva como uma torre sobre todas as proposições e olha para ambas as direções, como uma cabeça de Jano (*Foundations* III-60).

Na segunda filosofia de Wittgenstein, o significado, ou o sentido, não são propriedades das sentenças abstraídas de um jogo de linguagem, jogo que serve de articulação entre linguagem e realidade. Daí dizer que "você não compreende a proposição até que tenha encontrado a aplicação." (*Foundations* IV-25) Wittgenstein insiste: a única razão que poderia nos levar a evitar as contradições é sua falta de utilidade nos nossos jogos de linguagem cotidianos. Pois o jogo da contradição só pode ser, no máximo, um jogo de linguagem que nos é inútil (*Lectures* XXI, p.207-9). Em certos momentos Wittgenstein exagera, e afirma que nos jogos "úteis" não há contradição, até porque não a permitiríamos (*Foundations* II-80). No mais das vezes, porém, ele tenta imaginar situações em que as contradições fossem admissíveis, ou até mesmo desejáveis. Nos nossos jogos de linguagem mais simples, por exemplo, poderíamos ordenar a alguém: "Feche a porta e não feche a porta". Ora, se nosso propósito fôra o de produzir espanto e indecisão, que sucesso! (*Foundations* III-57) Até mesmo para o Paradoxo do Mentiroso – "eu estou mentindo" – poderíamos imaginar vários usos na nossa vida (*Foundations* V-30). De fato, podemos dar diversos usos diferentes para a contradição nos nossos jogos de linguagem. Podemos até mesmo atribuir-lhe novos significados e transferir alguns destes usos para a matemática (*Lectures* XVIII, p.174-6). O importante é deixar claro que não temos razões *a priori* para proibir as contradições, pois elas podem ser úteis em algum jogo. Wittgenstein aqui não nos brinda exatamente com uma rica dieta de exemplos ilustrando quais práticas que incluem a contradição estariam entre os jogos que as pessoas realmente jogam. Ele sugere, porém, alguns usos possíveis, caso viéssemos a descrever a mudança por meio da contradição, e disséssemos de um objeto em movimento que ele está e não está em um determinado lugar (*Foundations* V-8), ou caso desejássemos provar que tudo neste mundo é incerto (*Foundations* II-81).

Poderíamos imaginar situações em que alguém se orgulhasse de ter conseguido produzir uma contradição onde outros falharam. Ou que as pessoas jamais utilizassem os paradoxos, mas estivessem felizes de viver suas vidas na *vizinhança* de uma contradição (*Foundations* II-81). Já no caso em que desejássemos produzir uma contradição com propósitos estéticos, por exemplo, aceitaríamos com hesitação uma prova de consistência, pois ela evidenciaria para nós a esterilidade de nossos esforços (*Foundations* II-82).

Em suas palestras de 1939, Wittgenstein tinha como aluno o matemático inglês Alan Turing, e é este quem o chama de volta à matemática. O que acontece, pergunta Turing, se temos um sistema de cálculo que é inconsistente, mas no qual a contradição está oculta? Alguma coisa ruim pode ocorrer, como por exemplo ao aplicarmos este sistema ao cálculo de uma ponte que, após construída, cai (*Lectures* XXII, p.211). Poderíamos abonar a empresa construtora apontando um defeito intrínseco do cálculo utilizado? Poderia ter ocorrido um erro da engenharia e não do engenheiro? O cálculo trivial ainda é um cálculo? Wittgenstein se irrita profundamente com a idéia de que possa haver uma contradição *oculta* no cálculo. Diz: “Se a contradição está tão bem escondida que ninguém a nota, porque não deveríamos denominar o que fazemos agora um autêntico cálculo?” (*Foundations* V-12) Se temos um método para encontrar tal contradição oculta, basta aplicá-lo. Ao encontrá-la, remendamos a teoria, se for o caso, de modo a evitá-la (*Vienna*, p.120, 124-6, 194-5 e 199-200). Mas se não temos um critério de busca, Wittgenstein sustenta que não faz sentido dizer que ela está “oculta” (*Vienna*, p.201, 174 e 195-6). Por outro lado, talvez nós simplesmente não estejamos conseguindo enxergá-la – e quem sabe no fim das contas ela nem seja tão perigosa assim! (*Foundations* II-88)

> Em um sistema gramaticalmente elucidado, não há contradições ocultas, pois uma regra deve ser e é dada para se encontrar uma contradição. Uma contradição só pode estar oculta aos sentidos ou então oculta por assim dizer na “barafunda” das regras, na parte desordenada da gramática. (*Grammar*, p.305)

As respostas de Wittgenstein a Turing são realmente muito pouco satisfatórias. Turing duvidava, por exemplo, de que fosse possível, como queria Wittgenstein, estabelecer uma regra que nos impedisse de tirar conclusões da contradição, ou que pudéssemos evitar a trivialização do cálculo simplesmente evitando usar uma contradição conhecida: haveria outros caminhos, sem passar diretamente pela contradição (*Lectures* XXII, p.220), e caminhos pelos quais talvez nem percebêssemos estar passando. Certamente não fazia sentido, como propunha Wittgenstein, tomar “a parte saudável do cálculo”, de que dispúnhamos antes da inconsistência aparecer (*Vienna*, p.196-7). Ora, de fato há uma boa parte do cálculo de Frege, por exemplo, que independe das premissas contraditórias, mas é fato também que a contradição pode nele ser gerada sem grande esforço. Ficava difícil assim defender a proposta de que não deveríamos tirar conclusões quaisquer de uma contradição (*Lectures* XXII, p.220), ou de que deveríamos encontrar um modo de não prosseguir a partir de uma contradição (*Lectures* XXIII, p.223), ficava difícil defender que uma teoria inconsistente pudesse ser não-trivial. Como deveríamos proceder, professor? “Você parece estar dizendo que se usarmos um pouco de bom senso ninguém se sairá mal”, insinuou Turing. “Não”, redarguiu Wittgenstein, “absolutamente NÃO é isso o que eu quero dizer.” (*Lectures* XXII, p.219) Mais adiante ele dirá que não é o senso comum, mas é algo bem parecido: a nossa educação, ou treinamento, talvez (*Lectures* XXIII, p.223). Contudo, numa carta a Moore, em 1944, Wittgenstein afirma claramente que as contradições deve ser resolvidas pelo “senso comum” (cit. em Hallett, 1977, p.656). Isto certamente condiz ao espírito do filósofo cujo slogan era: “Não trate o seu senso comum como um guarda-chuva. Ao entrar em uma sala para filosofar, não o deixe do lado de fora, mas o traga consigo.” (*Lectures* VI, p.68)

Uma analogia que seduz longamente Wittgenstein é a do cálculo que contém uma contradição visto como um corpo que contém o germe de uma enfermidade. “Acredita-se que uma contradição oculta, tal qual uma doença oculta, cause danos, embora (e talvez justamente porque) ela não se mostre claramente.” (*Grammar*, p.303) Então, argumentaríamos, encontrar uma contradição em um sistema, assim como um germe em um corpo que em caso contrário estaria saudável, mostraria que o sistema ou corpo como um todo está doente. “De modo algum”, diria Wittgenstein. “A contradição nem mesmo falsifica coisa alguma. Deixe-a ficar. Não entre lá.” (*Lectures* XIV, p.138) O que significaria dizer que o corpo poderia estar doente, porém não dispomos de nenhum exame para verificá-lo? (*Remarks*, p.338) A idéia de que mesmo assim pudéssemos estar fatalmente enfermos seria uma espécie de hipocondria. Wittgenstein simpatiza mais com a comparação da contradição com um sintoma, do que com um germe. A contradição seria assim apenas um sintoma (local) da doença de todo o corpo do cálculo (*Foundations* II-80). Mas ela não precisa ser sintoma de doença alguma…

Um interessante exemplo de Wittgenstein ajuda a esclarecer uma conduta possível para o caso em que encontrássemos uma contradição no nosso jogo:

> Suponha que haja uma contradição nos estatutos de um determinado país. Poderia haver uma lei segundo a qual em dias de comemoração o vice-presidente devesse se sentar próximo ao presidente, e uma outra lei segundo a qual ele devesse se sentar entre duas senhoras. Esta contradição pode passar desapercebida por algum tempo, se ele estiver constantemente doente nos dias de comemoração. Mas eis que um dia vem uma comemoração e ele não está doente. Então o que fazemos? Eu diria: "Precisamos nos livrar desta contradição." Tudo bem, porém isto vicia o que fizemos antes. De maneira alguma. (*Lectures* XXI, p.210)

Neste caso, até que tivéssemos encontrado a contradição, até o dia da comemoração à qual o vice-presidente finalmente compareceu, não precisamos nos preocupar. Ao encontrá-la, finalmente fazemos algo a respeito, e mexemos nos estatutos. Mas eles já não eram estatutos, mesmo com a contradição embutida? E não funcionavam perfeitamente? O leitor deve observar que o exemplo acima é igualmente interessante por não figurar uma contradição inevitável. Realmente, o presidente poderia ser uma mulher, e neste caso não haveria qualquer dilema!

Ao viajar em uma estrada encontro um precipício e decido voltar. Isto não é "viajar"? No caso do sistema matemático no qual encontramos uma contradição, será que não estávamos fazendo matemática antes? (*Foundations* II-81) Bem, decerto estávamos fazendo matemática, mas matemática inconsistente. Sobre isto opinou Curry (1977): "A apresentação dos paradoxos […], a qual foi feita na linguagem universal, levou muitas pessoas a afirmar que a linguagem universal é inconsistente. De fato é, se usada sem cuidado, e se presumiria que a falta de cuidado vá causar problemas a qualquer tipo de atividade."

O que nos teria impedido até agora de caminhar no sentido da trivialização? Um anjo bom, talvez. "Pode-se dizer, creio: um anjo bom sempre será necessário, o que quer que você faça." (*Foundations* V-13)

A Metamatemática de Hilbert pretendia, por meio das provas de consistência, demonstrar que não haveria contradições ocultas no sistema. Ora, uma contradição oculta que não tivesse simplesmente passado desapercebida nem fosse encontrável por meio de um critério preciso deveria se tratar, segundo Wittgenstein, de uma contradição acrescentada ao sistema por um novo tipo de construção, não previsto – como no caso da construção dos enunciados auto-referentes que geram os paradoxos. O filósofo propõe que não atentemos a construções como a de Russell; deveríamos antes rejeitá-las (*Lectures* XXIII, p.222-5). Da mesma forma, Wittgenstein acreditava que nenhuma descoberta metamatemática poderia produzir um sistema imune à possibilidade destas construções – só mesmo um anjo bom poderia fazê-lo.

1.3 Uma mudança de olhar?

Wittgenstein realmente acredita que o matemático cria os problemas nos quais ele se perde. "O matemático é um inventor, não um descobridor", afirma o filósofo (*Foundations* I-167). A respeito do método da diagonal de Cantor, por exemplo, ele diz que tal procedimento não tem qualquer emprego prático; mais ainda, seu emprego não está para ser descoberto, mas *inventado* (*Foundations* I-9). Do matemático que encontrou uma contradição no cálculo, Wittgenstein diz que *adicionou* algo ao cálculo, que criou um novo cálculo (*Lectures* XXIII, p.225).

"O matemático cria essência." (*Foundations* I-32) Mas na segunda filosofia de Wittgenstein a essência é aquilo que nos é dado pelos critérios, normas e convenções gramaticais, ou seja, "a *essência* está expressa na gramática." (*Investigações* §371) A essência de um termo da linguagem não é uma entidade, mas nos é dada pelo esclarecimento gramatical deste termo, cuja significação se define pela multiplicidade de seus usos na linguagem. Por isso, o que realmente preocupa o filósofo é o momento em que o matemático comum se permite ultrapassar as fronteiras do discurso matemático formal, e passa a interpretar seus objetos de estudo e falar a respeito de sua objetividade e realidade.

Um tal matemático por certo pensa que a utilidade essencial dos sistemas matemáticos puros é descrever determinadas estruturas conceituais e que a noção de verdade para estes teoremas corresponde a este ensejo. Alfred Tarski, em seu trabalho fundamental sobre o conceito semântico de verdade (1944), afirma:

> Eu não penso que a nossa atitude frente a uma teoria inconsistente mudaria mesmo que decidíssemos por alguma razão enfraquecer o nosso sistema lógico de modo a privar-nos da possibilidade de derivar toda sentença de quaisquer duas sentenças contraditórias.

Sob este ponto de vista, a inconsistência seria portanto um desastre, simplesmente por não estarmos dispostos a pensar nas estruturas como inconsistentes. O matemático comum não pensa que a matemática é um jogo, e como um jogo não precisa *a priori* corresponder a um padrão específico, a menos que lhe incumbamos da tarefa de descrever a *situação presente* (*Foundations* II-82), o que na matemática aplicada – a qual já era conhecida de Wittgenstein – consistia em *evitar* contradições e não *usá-las*. Por que, ao descobrirmos que este jogo é inconsistente, ele deixaria de ser jogável? Ou diríamos então que nos enganáramos: ele de fato nunca foi jogável? (*Foundations* V-28) Tal é o matemático que, como Tarski, não considera aceitáveis as teorias inconsistentes, mesmo que não-triviais, por acreditar que estas teorias devam conter sentenças falsas. Mas Wittgenstein está aqui para fazer a crítica da tendência a se enxergar a verdade do princípio da Não-Contradição como algo que deva *seguir* obrigatoriamente do significado da negação e do produto lógico e assim por diante (*Lectures* XIX, p.184). Wittgenstein rejeita qualquer distinção entre o significado e o uso real dos símbolos, e acrescenta: “O sistema de regras determinando um cálculo determina assim também o ‘significado’ de seus termos.” (*Remarks*, p.178)

Wittgenstein se refere com mofa ao “temor e veneração supersticiosa dos matemáticos em face da contradição” (*Foundations* Ap.I-17). Na realidade, o único interesse que ele encontra na contradição inventada (sic) por Russell está no tormento que ela tem proporcionado às pessoas (*Foundations* Ap.I-13). Contudo, as ilações que elas deduzem dali, sobre, digamos, o caráter transcendente da contradição, o grau de certeza ou de verdade dos sistemas de cálculo, e outros quetais, isto sim preocupa o filósofo. Pois o matemático comum parece crer que entre dois sistemas, um que é reconhecidamente consistente, e outro cuja consistência não foi confirmada, o primeiro tem fundamento mais sólido, ou é metafisicamente mais verdadeiro do que o segundo. Wittgenstein observa que "uma coisa é usar uma técnica matemática que consista em evitar contradições, outra coisa é filosofar contra a contradição na matemática." (*Foundations* III-55) É preciso "extrair o espinho metafísico" aqui encravado (*Foundations* V-9).

Por que as pessoas têm medo das contradições? "Acima de tudo, o que deve impressionar o observador incauto é que os matemáticos estejam continuamente aterrorizados por *uma* coisa, que é um tipo de pesadelo para eles, que é a contradição." (*Vienna*, p.131) Wittgenstein até se dispõe a compreender que temamos a contradição *fora* da matemática, porém não *dentro* dela. Pois se uma ponte cair, nosso erro foi o de usar uma lei natural errada. Todavia, Turing afirma que não podemos ter confiança no nosso cálculo até que saibamos que não há nele contradições ocultas. Wittgenstein insiste que nós nunca realmente usamos as contradições: se alguém usasse o paradoxo de Russell para multiplicar, dificilmente diríamos que ele está multiplicando. Turing reformula sua objeção: não sabemos se a ponte não cairá se usarmos um cálculo sem contradições, mas se usarmos o cálculo com contradições, algo certamente dará errado! (*Lectures* XXII, p.217-9)

Seriam realmente necessárias as provas de consistência? "A prova de consistência não pode ser uma *questão de vida ou morte para a matemática*." (*Vienna*, p.141) Pensa-se que a prova de consistência seja necessária, pois em caso contrário corremos o risco de "cair no atoleiro a cada passo." (*Foundations* II-78) Mas as pessoas não parecem sentir tamanha necessidade de provas de consistência, e depositam sua inteira confiança em sistemas matemáticos mesmo que lhes falte esta prova. Se uma contradição fosse realmente encontrada na aritmética, isso nos mostraria que uma aritmética com uma *tal* contradição pode nos servir muito bem (*Foundations* V-28), como tem de fato servido. Caso tal contradição aparecesse decerto não estaríamos dispostos a abandonar todos os cálculos feitos pelos matemáticos ao longo dos séculos, nem muito menos diríamos que eles não eram cálculos legítimos (*Remarks*, p.346). O que Wittgenstein pretende combater são as convicções de que a presença de uma prova de consistência deveria nos dar necessariamente mais certeza do que a sua ausência, de que poderíamos dispor de um mecanismo que nos protegesse contra a contradição, de que não deveríamos confiar em um cálculo que não tenha sido provado consistente, de que há tal coisa como um cálculo lógico *correto*, sem as contradições, de que a prova de consistência tem como *propósito prático* nos dar motivo para a predição: "Nenhuma desordem surgirá." (*Foundations* II-82 a 86)

Em conversa com Waismann, em dezembro de 1931, Wittgenstein lhe ouve formular o problema da consistência:

> Como sei que uma proposição que provei por métodos transfinitos não pode ser refutada por um cálculo numérico finito? Se, por exemplo, um matemático encontrar uma prova do Último Teorema de Fermat que faça uso essencialmente de métodos transfinitos – digamos o Axioma da Escolha, ou a Lei do Terceiro Excluído na forma: ou a conjetura de Goldbach e válida para todos os números ou há um número para o qual ela não vale – como sei que tal teorema não pode ser refutado por um contra-exemplo? Isto não é nem um pouco auto-evidente. E no entanto é impressionante a confiança que os matemáticos depositam nos modos transfinitos de inferência, a tal ponto que, assim que uma tal prova for conhecida, ninguém mais tentará descobrir um contra-exemplo. Surge agora a questão: esta confiança é justificável? Ou seja, estaremos seguros em supor que uma proposição que tenha sido provada por métodos transfinitos não poderá jamais ser refutada por um cálculo numérico concreto? (*Remarks*, p.342-343)

Embora Wittgenstein pense que este é um problema mal posto, ele tece algumas considerações sobre vários outros problemas que medram ao seu redor. Para Wittgenstein, o que temos é um jogo, e uma aplicação do cálculo consiste em tomar as proposições verdadeiras e falsas como correspondentes a posições no jogo, e as regras de sintaxe como as regras do jogo: fornecemos desta maneira a gramática de uma linguagem. Para o filósofo parecia claro que uma contradição só poderia ocorrer entre as regras do jogo, e não em suas configurações. A sintaxe não pode ser justificada, não há tal coisa como a justificação para um jogo (*Remarks*, p.321-2; 344-5). As regras podem nos deixar em uma situação tal que não saibamos o que fazer. Imagine duas pessoas que jogam há muitos anos uma mesma partida de xadrez. Em certo momento, um deles faz um movimento e ambos exclamam: “Ganhei!” Terá necessariamente um deles se enganado? Suponha que D, um famoso jogador de futebol, dispute com G, um famoso jogador de tênis, uma espécie de partida híbrida de tênis-futebol. Em um certo momento, a bola bate na rede, e G grita: “Ponto!”, ao passo que D grita: “Gol!” Encontraremos a contradição responsável por este desatino? E o que faremos com ela? Enfim, devemos reconhecer que “um cálculo é aplicável a tudo aquilo que ele é aplicável” (*Remarks*, p.323); mas é claro que com um pouco de imaginação e boa vontade podemos sempre conceber uma aplicação.

O que perturbava Wittgenstein não era que a contradição de Russell fosse uma contradição, mas que crescesse no corpo saudável da matemática como um câncer, sem objetivo ou dor. Seu principal problema era a falta de aplicação e, portanto, de significado. Se seu surgimento no nosso cálculo é tão furtivo, por que deveria ela estragar tudo? E por que deveríamos nos livrar dela? (*Foundations* V-8) Não há nada que nos force a dizer que “*p* e não-*p*” seja falso, isto é uma convenção. As contradições não tem que ser falsas, elas são simplesmente tomadas como falsas nos nossos jogos cotidianos. Wittgenstein não questiona o direito dos matemáticos e lógicos de impor restrições à matemática de modo a evitar contradições, o que ele quer questionar é a concepção vulgar de que tal restrição nos é imposta de fora.

Durante uma certa época, Wittgenstein pretendeu explicar porque as contradições “não funcionam”, porém pouco mais tarde rejeitou tais tentativas, por espúrias. A idéia de que uma contradição não apenas *não funciona*, mas *não pode funcionar*, este era um preconceito que Wittgenstein censurava (*Lectures* XIX, p.185). Ao atribuirmos um novo significado a ela, nós a eliminamos, pois a contradição não está senão na sentença que a expressa. Talvez sejamos nós, afinal, que não desejamos que ela funcione (*Lectures* XIX, p.187). Em outros momentos, Wittgenstein tinha surtos “tractatianos”, e observava que, tanto quanto as tautologias da lógica, as contradições não são proposições significativas; são, ao invés, fórmulas vazias, que nada dizem. Não deveríamos construí-las. Não deveríamos substituir ξ por h em "$\xi \in h$" (*Foundations* V-21).

Por vezes recorremos a uma analogia mecânica para entender a contradição, e a comparamos por exemplo a uma engrenagem que emperra, e não pode se mover. Ora, Wittgenstein adverte, esta imobilidade é, no mais das vezes, psicológica. Não é que não possamos prosseguir, mas que não sabemos como fazê-lo. Este era o perigo da analogia: pensávamos estar explicando, quando na verdade estávamos apenas substituindo um simbolismo por outro (*Lectures* XVIII, p.178-9). Construir ou detectar uma contradição não deve invalidar o que vínhamos fazendo antes, esta contradição só é realmente nociva quando nos faz paralisar o cálculo.

1.4 O que há de comum entre as idéias de Wittgenstein e aquelas expressas no projeto da lógica paraconsistente?

Ao longo do livro Γ da Metafísica, Aristóteles argumenta que o princípio da Não-Contradição é o mais seguro de todos os princípios lógicos, uma vez que "é impossível que simultaneamente, e segundo a mesma relação, o mesmo atributo pertença e não pertença a um mesmo sujeito" (Aristóteles, Metafísica Γ, 1005b 18-25). De maneira semelhante, no paradoxo de Russell, seria impossível que um objeto pertencesse e não pertencesse a outro objeto, mesmo que este objeto fosse ele próprio. Insurgindo-se contra a tradição aristotélica, o matemático polonês Jan Łukasiewicz publicou em 1910 no *Bulletin Internationale de l'Académie des Sciences de Cracovie* o artigo "Über den Satz des Widerspruchs bei Aristoteles" (Sobre o princípio da contradição em Aristóteles), um escrito no qual ele propõe uma revisão fundamental das leis básicas da lógica de Aristóteles, revisão esta que deveria conduzir a sistemas de lógica não-aristotélicos, do mesmo modo que a revisão das leis básicas da geometria de Euclides, promovida por vários matemáticos do século XIX, levara a sistemas de geometria não-euclidianos.

Para proceder à sua crítica, Łukasiewicz toma o texto de Aristóteles no grego original, e considera três formulações do princípio da Não-Contradição:

(a) *Ontológica:* nenhum objeto pode ao mesmo tempo ser e não ser tal e tal.

(b) *Lógica:* nenhuma proposição não-ambígua pode ser ao mesmo tempo verdadeira e falsa.

(c) *Psicológica:* ninguém pode acreditar que o mesmo objeto possa ao mesmo tempo ser e não ser. (Łukasiewicz, 1971)

Postas desta forma, é claro que nenhuma das formulações acima é idêntica em significado a alguma das outras. Não obstante, para Aristóteles, a formulação lógica e a formulação ontológica seriam logicamente equivalentes, dada a correlação um-a-um entre as proposições e os fatos objetivos (id., ibid., p.489). Além disso, Aristóteles se propõe a provar o princípio na sua formulação psicológica a partir da formulação lógica, e aqui a argumentação de Aristóteles sofre as primeiras críticas incisivas de Łukasiewicz. Mas as críticas realmente decisivas são feitas aos argumentos por *elenchus* e por raciocínio *ad impossibile* que Aristóteles, mesmo propugnando a não-demonstrabilidade do princípio da Não-Contradição, oferece para a demonstração, ou nosso convencimento, da validade deste princípio. No prosseguimento, Łukasiewicz rejeita a idéia de que este princípio pudesse ser *mais* fundamental do que os outros (Aristóteles, ibid., 1005b 32-34), já que há vários outros princípios que dele independem, tais como o princípio do Silogismo, além de toda a parte positiva do cálculo proposicional clássico (Łukasiewicz, 1971, p.502-3). Łukasiewicz conclui que apenas uma formulação do princípio da Não-Contradição poderia ser defendida:

(d) *Prático-Ética:* ninguém, em sã consciência, pediria (ou faria) ao mesmo tempo *p* e não-*p*.

Łukasiewicz se justifica dizendo que, neste caso, o princípio da Não-Contradição é "*a única arma contra o erro e a falsidade*", e "*uma marca da incompletude intelectual e ética do homem*" (id., ibid., p.508, grifo do original). Łukasiewicz diz ainda suspeitar que talvez fosse por desejar se defender a qualquer custo de seus oponentes e por também reconhecer este valor prático-ético que Aristóteles teria estabelecido este princípio como um *axioma* final, e um *dogma* inatacável (id., ibid., p.509).

É interessante observar que, naquele mesmo ano de 1910, sem ter conhecimento dos trabalhos de Łukasiewicz, o médico russo Vasiliev, trabalhando na Universidade de Kazan, na Rússia – o mesmo local onde anos antes seu compatriota Lobatchevski propusera a sua geometria imaginária, não-euclidiana – publicaria na própria universidade o trabalho "O častnyh suždéniáh, o tréugol'niké protivopolžnostéj, o zakoné isklučënnogo čétvërtogo" (Sobre os juízos particulares, o triângulo das oposições e a lei do quarto excluído), em que ele vislumbrava a criação de uma lógica imaginária não-aristotélica.[4] Seguindo uma senda similar àquela trilhada por Łukasiewicz, Vasiliev argumentou que a lei do Terceiro Excluído aparecia "na mente de Aristóteles com o objetivo de refutar seus adversários, e não por razões lógicas" (*apud* D'Ottaviano, 1992, p.81).

Por terem proposto a derrogação das leis básicas da lógica aristotélica, Łukasiewicz e Vasiliev podem ser vistos como pais daquelas que hoje são conhecidas como "lógicas não-clássicas". Mas já seria demais querer vê-los como precursores da lógica paraconsistente. Łukasiewicz, por exemplo, encetou igualmente em seu trabalho uma crítica à lógica filosófica tradicional que vinha sendo feita até então, dizendo que ela "simplesmente não se preocupara com as distinções conceituais mais finas por não operar com conceitos agudamente delineados e símbolos determinados sem ambiguidade; ao contrário, ela afundou no charco do discurso fluido e vago usado na vida cotidiana." (Łukasiewicz, 1971, p.494) Mas nem por isso diremos que Łukasiewicz é um precursor da filosofia analítica!

Alguns anos mais tarde, o matemático polonês Stanislaw Jaśkowski, discípulo de Łukasiewicz, tomou para si o que entendeu ser um desafio deixado pelo mestre: encontrar uma lógica interessante e suficientemente rica que acomodasse inconsistências, permitindo a sua investigação consistente. Em 1948, Jaśkowski publicou na *Studia Societatis Scientiarum Torunensis* o trabalho intitulado "Rachunek zdan dla systemów dedukcyjnych sprzecznych" (Cálculo proposicional para sistemas dedutivos contraditórios), cujo resumo inicial declarava:

[4] Para conhecer mais sobre o trabalho de Vasiliev, cf. Bobenrieth, 1996, cap.II, e Arruda, 1977.

> O autor discute as razões que o levam a buscar um cálculo proposicional ajustado às necessidades das teorias inconsistentes. Ele analisa a solução para este problema encontrada em vários sistemas de lógica já existentes e oferece uma nova solução. Ele constrói um novo cálculo proposicional, chamado discursivo (discussivo), definindo a implicação discursiva como: "Se é possível que *p*, então *q*", onde a função "é possível que *p*" é entendida de acordo com o significado dado por Lewis a ela no sistema S5. Uma série de teoremas do cálculo é apresentada, juntamente com uma lista de certas proposições que são nele refutadas. (Jaśkowski, 1969, p.143)

Jaśkowski tomou como paradigma o discurso, a situação de uma discussão, e se fez a seguinte questão: *É o caso que p?* O princípio do Terceiro Excluído, da lógica clássica, nos ensina que a resposta aqui só pode ser *sim* ou *não*, enquanto que o princípio da Não-Contradição elimina a possibilidade de que optemos por ambas as respostas, por sim *e* não. Mas, raciocinou Jaśkowski, quando fazemos um discurso é frequente que desejemos considerar ambas as possibilidades de uma só vez. Do mesmo modo, durante uma discussão, ao defender *p* devemos respeitar, para sermos honestos, um oponente que afirma não-*p*. A lógica subjacente a esta situação não pode portanto ser a clássica, a menos que façamos algumas restrições, como abandonar o princípio do Pseudo-Escoto (vide **1.**). Afinal, em discussões reais entre oponentes sérios e honestos as inconsistências que porventura aparecerem nem explodem nem lotam o discurso.[5]

No final da década de 50 e início da de 60, o lógico brasileiro Newton da Costa publicou de forma independente seus primeiros trabalhos no estudo de teorias contraditórias.[6] Segundo da Costa, os principais objetivos da lógica paraconsistente, inicialmente chamada por ele de *teoria dos sistemas formais inconsistentes*, seriam:

(a) Estabelecer técnicas lógico-formais capazes de nos permitir a melhor compreensão das estruturas lógicas subjacentes às concepções dos partidários da dialética.

---

[5] Para conhecer mais sobre o trabalho de Jaśkowski, cf. Bobenrieth, 1996, cap.VIII. Desenvolvimentos mais recentes podem ser encontrados em D'Ottaviano & da Costa, 1970, e Kotas & da Costa, 1978.

[6] Um levantamento dos resultados relacionados publicados entre 1963 e 1974 pode ser encontrado em da Costa, 1974.

(b) Contribuir para o próprio entendimento das leis da lógica clássica.

(c) Estudar o esquema da separação da teoria de conjuntos, quando se enfraquecem as restrições a ele impostas.

(d) Contribuir para a sistematização e o balanço de teorias novas que encerrem contradições e de antigas que, por esse motivo, foram abandonadas ou praticamente relegadas a segundo plano.

(e) Colaborar para a apreciação correta dos conceitos de negação e de contradição. (da Costa, 1994, p.174)

Da Costa introduziu uma hierarquia de cálculos proposicionais paraconsistentes (vide os capítulos **2.** e **3.**), estendendo-a em seguida a cálculos de predicados de primeira ordem, cálculos de predicados de primeira ordem com igualdade, cálculos de descrições e teorias de conjuntos inconsistentes porém não-triviais.[7]

A primeira importante lição que podemos depreender do trabalho destes lógicos é que os princípios lógicos são tão evidentes quanto as leis da geometria – isto é, não têm evidência alguma. Wittgenstein faria observação semelhante, em suas palestras sobre a matemática, e acrescentaria: “Afirmar que a lógica é auto-evidente, querendo dizer que ela produz uma impressão particular, não nos ajuda em nada.” (*Lectures* XVIII, p.174) O filósofo assume que podemos negar o princípio da Não-Contradição e o Terceiro Excluído (*Foundations*, Ap.I-18), e também imagina situações em que o princípio da Identidade não valeria (*Foundations* I-132, V-31, V-33). Frege deceto não teria concordado com estas manobras: segundo ele, aquele que não reconhece um princípio lógico, como o da Não-Contradição, sofre de “um tipo não diagnosticado de loucura” (Frege, 1967, p.XVI). Wittgenstein conhecia este parecer de Frege (*Lectures* XXI, p.202), porém reiterou: “As leis da lógica, por exemplo, Terceiro Excluído e [Não-]Contradição, são arbitrárias. Esta afirmação repugna um pouco, não obstante verdadeira.” (*1932-1935*, p.71)

Em relação à filosofia da paraconsistência, é possível fazer uma separação entre duas posturas paraconsistentes distintas, a primeira delas, que denominaríamos “posição fracamente paraconsistente”, permite inconsistência em algumas teorias não-triviais, ou seus análogos, tais como a linguagem ou o pensamento, a

---

[7] Para conhecer mais sobre o trabalho de da Costa, cf. Bobenrieth, 1996, cap.IX e X.

outra, a "posição fortemente paraconsistente", também denominada *dialetéica*, admite contradições no mundo real (Priest & Routley, 1989, p.4). Não é difícil filiar Wittgenstein na primeira escola, mas há quem afirme que é possível mesmo apontar tendências dialeteistas na segunda filosofia de Wittgenstein, tendências que se mostravam tão maiores quanto maiores se tornavam as suas crescentes indisposições com relação às correntes fundacionalistas em matemática (Goldstein, 1989, p.551-7).

Ambas as posições fraca e fortemente paraconsistentes têm sido extensamente criticadas por filósofos, por variadas razões. Como da Costa apontara já em 1958 (p.6-7):

> Em virtude do clássico princípio da [Não-]Contradição, uma proposição e sua negação não podem ser verdadeiras ao mesmo tempo; daí não ser possível uma teoria válida do ponto de vista filosófico (ou lógico) encerrar contradições internas. Supor o contrário constituiria, aparentemente, um erro filosófico.

Filósofos como Wright (1980, p.298, 303, 310) sustentam que os sistemas inconsistentes são duplamente problemáticos: (1) com relação a sua aplicabilidade, e (2) com relação à sua noção de verdade. Com relação a (1), Wright argumenta que sistemas inconsistentes devem eventualmente acabar por permitir a inferência de conclusões falsas a partir de premissas verdadeiras. Veremos adiante (vide p.ex. **2.2.1** e **2.3.3.1**) que nas semânticas que temos associadas às lógicas paraconsistentes isto simplesmente não ocorre – é possível de fato oferecer-lhes semânticas corretas.[8] Com relação a (2), Wright acredita que sistemas inconsistentes seriam simplesmente incapazes de descrever quaisquer tipos de estruturas, reais ou hipotéticas. Neste sentido, está claro que ele não considera a possibilidade de que as estruturas sejam elas próprias inconsistentes, porém não-triviais.

Já na virada do século, Meinong propusera uma teoria de objetos que incluía objetos inconsistentes, isto é, objetos com propriedades contraditórias, tais como o quadrado redondo, o maior número primo, ou o conjunto construído por Russell

[8] O que resulta em uma ampliação moderna da acepção do termo "semântica" (cf. da Costa *et al.*, 1995a).

em seu paradoxo. Russell criticou apropriadamente a teoria de Meinong por violar o princípio da Não-Contradição (cf. Priest & Routley, 1989, p.24-5), mas está claro que tal crítica perderia todo o vigor se fôra utilizada na construção da teoria meinongiana uma lógica paraconsistente na qual aquele princípio não fosse, em geral, válido. Não por acaso, observamos que já Łukasiewicz se inspirara na teoria meinongiana em sua revisão ao princípio da Não-Contradição (cf. Łukasiewicz, 1971, p.506-7).

Com relação à ontologia das lógicas paraconsistentes uma interessante tese foi defendida por da Costa (1982, cf. ainda o verbete *Paraconsistency*, em Burkhardt & Smith, 1991). Resgatando a máxima de Quine (1953, cap.I): "Existir é ser o valor de uma variável" – donde o comprometimento ontológico de nossas teorias é medido pelos domínios de suas variáveis, isto é, existe tudo aquilo que pode ser tomado como o valor de uma variável –, da Costa propôs a seguinte modificação: "Existir é ser o valor de uma variável em uma dada linguagem com uma determinada lógica". Assim, da Costa abre espaço para o aparecimento de diferentes ontologias baseadas em diferentes tipos de lógica, analogamente ao que acontecera no século passado com o aparecimento das diferentes geometrias baseadas em diferentes conjuntos de axiomas. Isto nos afasta radicalmente da visão de Wittgenstein acerca da matemática: ao que tudo indica, o filósofo dificilmente aceitaria a idéia de que os jogos que definem a matemática, mesmo que pudessem ser múltiplos, requeiram qualquer espécie de "comprometimento ontológico".

1.5 Quais as origens da postura de Wittgenstein frente à contradição e à consistência?

Não precisamos destacar as críticas que Wittgenstein faz ao intuicionismo, ao formalismo e ao logicismo, as três escolas hegemônicas da filosofia da matemática do século XX, para compreendermos a desconfiança com que o filósofo vê a própria idéia de que deveria haver um fundamento para a matemática.

> Para que a matemática precisa de um fundamento? Ela não precisa de um, creio, mais do que as proposições sobre objetos físicos – ou sobre impressões dos sentidos, precisam

de uma *análise*. O que as proposições matemáticas realmente precisam é de uma clarificação de sua gramática, assim como o precisam aquelas outras proposições. (*Foundations* V-13)

Assim é que Wittgenstein critica Frege por praticar o que Wittgenstein denominou "física do reino intelectual", já que Frege insiste que podemos verificar as proposições por inspeção direta através de uma espécie de sentido do intelecto (*Lectures* XVIII, p.172). Pois não é verdade que sejamos obrigados a entender a prova matemática como um meio de descobrir verdades acerca de um mundo matemático de existência independente – isto consistiria numa espécie de história natural (*Naturgeschichte*) dos objetos matemáticos, donde a aritmética, por exemplo, se constituiria na "história natural (mineralogia) dos números" (*Foundations* III-11) – que Wittgenstein rejeita inteiramente. Não temos que acreditar que as proposições matemáticas descrevam entidades abstratas, ou a realidade empírica, ou o funcionamento transcendental da mente. Similarmente aos conceitos de sensações e de cores, os conceitos matemáticos não se referem a objetos específicos cuja existência está garantida pelo simples uso de tais conceitos. Assim é que Wittgenstein desaconselha, por exemplo, o uso da palavra "infinito" no cálculo onde quer que ela confira significado ao cálculo, ao invés de extrair significado dele (*Foundations* Ap.II-17).

Segundo Moreno (1993, p.52), "as provas [matemáticas] são imagens que exprimem aquilo que será considerado como a essência", elas nos encantam, funcionam como um referencial normativo, e logo em seguida afirmamos que não é possível pensar de outro modo. Em jogos complexos como os jogos matemáticos é muito fácil nos deixarmos conduzir pelas imagens introduzidas pelas próprias provas, imagens que acabam exercendo força sobre o nosso pensamento, e nos obrigando a pensar em uma direção determinada, fixando nossas referências. São as imagens que levam o matemático a fazer afirmações de caráter metafísico acerca dos "fatos matemáticos", ou da "objetividade e a realidade dos fatos da matemática". Moreno afirma que a própria atividade filosófica de Wittgenstein se converte, em sua segunda filosofia, em uma luta contra a força das imagens, a qual Moreno denomina "terapia gramatical". Assim, ainda que possamos decerto afirmar que o domínio da matemática é de certa forma privilegiado, uma vez que nele se trabalha com definições rigorosas e exatas visando a aplicações precisas (id., ibid., p.51), a descrição gramatical dos conceitos exatos da matemática ainda dependeria de que aceitássemos "inserir tais conceitos na multiplicidade dos usos, olhar para suas diferentes aplicações, efetivas, possíveis, e mesmo inusitadas." (id., ibid., p.32)

Mas o que é a gramática? Este é um termo usado por Wittgenstein para designar tanto as regras constitutivas da linguagem quanto a investigação ou a organização filosófica destas regras (cf. o verbete *Gramática*, em Glock, 1998). Podemos contribuir à gramática de um enunciado (matemático) fornecendo proposições nas quais ele está sendo usado, esclarecendo o que temos em mente, respondendo sobre a espécie e a possibilidade de sua verificação. A gramática também nos diz que certas combinações de palavras não têm sentido, e isto implica na sua retirada de circulação, na sua exclusão da linguagem (*Investigações* §499-500). Em certo momento Wittgenstein chega a afirmar que "está com efeito na gramática da palavra 'regra' que 'p & ~p' não seja uma regra (se p é uma regra)" (*Grammar*, p.304). Daí, não teria sentido assim falar em regra contraditória, simplesmente porque, caso ela se contradiga, ela não seria uma regra! Isto parece mesmo muito estranho. Lembremo-nos contudo de que também o princípio da Não-Contradição faz parte da nossa gramática, e Wittgenstein não pensa que devamos abrir mão dele só porque encontramos situações – na física quântica, por exemplo – em que ele aparentemente não funciona, uma vez que ir contra este princípio só faz produzir proposições sem sentido no *nosso* jogo de linguagem. É claro que este jogo de linguagem poderia ser completamente distinto do que é, consistindo, por exemplo, em ficar continuamente passando de uma decisão para a decisão contrária – e neste caso uma contradição poderia ter um papel importante (*Zettel* §685-6). "Aqui temos o método de Wittgenstein em funcionamento: procuremos pelos usos de uma expressão; não assumamos que uma expressão tem um uso único ou que não tem uso algum. Então, tomando a contradição, ao invés de asseverarmos *a priori* que 'p e não-p' é sempre sem sentido, consideremos a multiplicidade de usos que lhe damos. E se não conseguirmos encontrar um uso, lembremos que sempre podemos criar um.” (Arrington, 1969, p.40)

Um ponto deve ficar aqui bem claro: para Wittgenstein, a verdade de uma proposição matemática é fruto de nossas convenções, porém estas não são estipuladas arbitrariamente. Ao contrário, elas se baseiam no consenso, não no sentido de que todos concordamos em atingir *certos resultados*, mas de que todos *concordamos* em atingir tais resultados. Não se trata de um consenso de opinião, mas de um consenso de ação (*Investigações* §241, *Lectures* XIX, p.183-4). “*Concebemos* a regra […] devido à concordância na ação – ou seja, de que se percorrêssemos estes passos, quase todos obteríamos os mesmos resultados. E esta regra se torna então um padrão de medida. A regra não exprime uma conexão empírica mas a concebemos porque há uma conexão empírica.” (*Lectures* XXX, p.291-2) É esta a natureza do convencionalismo de Wittgenstein. As regras não são completamente arbitrárias, pois decorrem da racionalidade da nossa mitologia, expressam necessidades naturais. A essência é vista como uma convenção que organiza nossas impressões sensíveis. Wittgenstein explica que o uso que damos à linguagem se ajusta à nossa forma de vida (*Lebensform*), este curioso entrelaçamento entre cultura, visão de mundo e linguagem. O problema é que as pessoas nem percebem, por exemplo, que é este ajuste que as faz atribuir inexorabilidade às provas matemáticas: elas não notam que “um certo paradigma paira ante o olho de sua mente, e elas desejam *alinhar* o cálculo com este paradigma.” (*Remarks*, p.346)

Devemos ter sempre em vista o fato de que Wittgenstein trabalha com uma perspectiva antropológica da matemática, como parte da história natural da humanidade. Para o filósofo, a matemática constitui-se de uma família de atividades destinadas a uma família de projetos (cf. o verbete *Matemática*, em Glock, 1998). Se na primeira filosofia de Wittgenstein a desconfiança com relação à gramática estava na ordem do dia, pois a forma “gramático-normativa” das proposições poderia disfarçar sua forma lógica, na sua segunda filosofia a gramática substitui a própria sintaxe lógica. Mas se a sintaxe lógica era universal, a gramática não o é –

diferentes línguas possuem diferentes gramáticas (cf. o verbete *Gramática*, id., ibid.). Para mostrar que a própria matemática poderia ser bastante diferente do que a matemática que conhecemos, Wittgenstein abre as portas da filosofia para uma multitude de alienígenas, animais selvagens, tribos primitivas e indivíduos de países exóticos e distantes, os quais, graças às suas diferentes histórias naturais e formas de vida, ilustram modelos alternativos de matemática, em que a contagem ou a medição funcionam de maneira diferente da nossa, a multiplicação dá resultados diferentes dos nossos, ou simplesmente arbitrários, a contradição é um instrumento não apenas permitido, mas bastante útil. Em *Foundations* V, Wittgenstein parece crer que estes jogos de linguagem imaginários nos ajudam a compreender que, se a nossa história natural tivesse sido outra, a nossa matemática poderia muito bem ter sido a mesma que a dos alienígenas. Mas em *Lectures* XXIII ele já é mais precavido, e se afasta desta sorte de exemplos, reconhecendo o perigo que há em aplicar um mesmo conceito em contextos linguísticos muito diferentes ou muito mais gerais do que de costume, pois é difícil decidir o ponto em que teremos esticado nossos conceitos para além do limite das semelhanças de família (*Familienähnlichkeit*), como quando aplicamos o conceito de cálculo em situações nas quais já é difícil reconhecer qualquer tipo de cálculo.

1.5.1 Contra a Metamatemática, I

"A gramática não diz como a linguagem deve ser construída a fim de realizar a sua finalidade, a fim de ter tal ou tal efeito sobre os homens. Ela apenas descreve, e de modo algum explica o uso dos signos." (*Investigações* §496) Com efeito, a gramática não nos diz como construir o nosso cálculo, ou nenhum outro cálculo. Suponhamos todavia que realmente desejássemos construir um cálculo, e desejássemos ainda que ele fosse tal que coibisse as contradições lógicas. Ora, para Wittgenstein esta prescrição já deve ser ela própria uma lei lógica (*Lectures* XXII, p.214). Ao fazermos considerações metateóricas acerca do uso da palavra "física", sobre a admissibilidade e a adequação das leis da física, sobre a sua aplicação ou seus construtos teóricos, então o que fazemos é uma espécie de metafísica. Mas se fazemos considerações acerca da filosofia, da linguagem ou da matemática, estas considerações já são, por sua vez, respectivamente filosóficas, linguísticas ou matemáticas. Wittgenstein insiste que não há tal coisa como uma filosofia de segunda ordem, ou metafilosofia, quando a filosofia fala do uso da palavra "filosofia", assim como a ortografia também diz respeito ao uso da palavra "ortografia", mas nem por isso "ortografia" seria uma palavra de segunda ordem (*Investigações* §121). Tais observações se inserem em um contexto mais amplo, em que a rejeição de tais "metadisciplinas" é para Wittgenstein um princípio básico de sua filosofia (cf. o verbete *Metalógica /-matemática /-filosofia*, em Glock, 1998). É aqui que se reintroduz a proposta wittgensteiniana de rejeição das correntes fundacionalistas da filosofia e da matemática, pois o filósofo entende que a metamatemática consiste apenas na mesma e velha matemática disfarçada, e as tentativas de fundamentar a matemática, como a de Hilbert, com a sua Metamatemática, estariam portanto equivocadas em princípio, pois se limitam meramente a produzir novos cálculos matemáticos.

"O que Hilbert está fazendo é matemática e não metamatemática. É mais um cálculo, exatamente igual a qualquer outro." (*Vienna*, p.121) Mas não, sustenta Wittgenstein, nenhuma parte da matemática pode garantir *absolutamente* uma outra parte da matemática. Para Curry (1958, p.276), esta crença formalista "pode ter sido inspirada nos 'elementos de filosofia idealista alemã' que se escondem por trás da concepção do programa de Hilbert." O metacálculo não seria portanto uma teoria do cálculo, mas apenas mais um novo cálculo. A expressão da consistência do cálculo não se dá através de uma proposição do próprio cálculo, uma vez que a prova de consistência repousa em uma indução sobre todo o corpo do cálculo. Contudo, no metacálculo a questão da consistência reapareceria, e depois no meta-metacálculo, e assim por diante. Daí conclui Wittgenstein que a própria concepção de uma metamatemática se assenta sobre um regressão infinita (*Remarks*, p.329-30). "Os problemas *matemáticos* daquilo que chamamos fundamentos não são um fundamento para a matemática mais do que a rocha pintada é o fundamento da torre pintada." (*Foundations* V-13) Wittgenstein compara a prova buscada por

Hilbert da consistência da aritmética ao caso do matemático que afirma ter descoberto que entre os pontos racionais da reta há mais pontos: Wittgenstein entende que ele não descobriu, mas inventou tais pontos, e o que tem diante de si agora é um novo cálculo (*Remarks,* p.338-9).

Todavia, a ânsia em demonstrar a inutilidade de toda a empresa metamatemática e a vacuidade de significado de suas proposições levam Wittgenstein a posições muito difíceis de sustentar, como por exemplo sua visão de que as provas de consistência relativa, ou equiconsistência, são uma tolice (*Remarks*, p.335). Analisemos o caso da prova de consistência relativa do cálculo de predicados clássico de primeira ordem, **PO**, com relação ao cálculo proposicional clássico, **CP**. A consistência de **CP** pode ser facilmente demonstrada assim: mostramos primeiramente que seus axiomas são tautologias, e em seguida que suas regras de inferência preservam tautologias; daí, por indução sobre o comprimento das provas, concluímos que todos os seus teoremas, os quais são demonstrados a partir do uso combinado de seus axiomas e regras, são tautologias, e como, dado o significado da negação neste cálculo, duas proposições contraditórias não podem ser tautologias, concluímos que duas proposições contraditórias não podem ser teoremas. Por outro lado, **PO** contém todas as fórmulas de **CP**, e ainda outras, nas quais aparecem quantificadores. A prova de consistência relativa consiste na construção de uma função que leva cada fórmula de **PO** a uma fórmula de **CP**, e que é fácil obter se simplesmente "apagamos" os quantificadores das fórmulas de **PO**. Daí, se houvesse duas fórmulas contraditórias em **PO** elas seriam levadas a duas fórmulas contraditórias de **CP**, mas **CP** é consistente, logo **PO** também o é. De maneira semelhante podemos demonstrar a equiconsistência entre diferentes sistemas de geometria, como a geometria euclidiana e a riemanniana, e entre diferentes sistemas lógicos, como o cálculo proposicional modal e **CP**. Mas sobre este tema Wittgenstein nos oferece o intrigante juízo de que o que temos aqui é tão-somente um *mapeamento,* uma função que leva as regras de um jogo a regras de um outro jogo: "*As relações internas nas quais as regras (configurações) de um grupo estão com relação umas às outras são similares àquelas nas quais as do outro grupo estão. Isto é tudo o que a prova mostra e não mais.*" (*Remarks*, p.335, grifo no original) Parece haver aqui, contudo, um mal-entendido com relação ao que se pretende com a Metamatemática de Hilbert, isto é, demonstrar a consistência de sistemas *aritméticos*. Ora, esta empreitada só veio abaixo como consequência do Segundo Teorema de Incompletude de Gödel, de 1931, que mostrou que qualquer sistema matemático com poder suficiente para fazer o que conhecemos como aritmética elementar – ser capaz de definir as funções recursivas parciais, ou algo parecido – sofre da surpreendente limitação de ser incapaz de demonstrar sua própria consistência. Observe que nem **CP** nem **PO** constituem o sistema matemático que usamos para demonstrar a sua equiconsistência – a regra de indução, por exemplo, não faz parte de nenhum dos dois. Por outro lado, na prova de consistência da aritmética elementar o sistema matemático utilizado não é mais poderoso do que a própria aritmética elementar. Aí está a grande diferença!

1.5.2 Contra a Metamatemática, II

Há uma explicação concorrente e bastante interessante para a origem no pensamento de Wittgenstein da idéia de que é preciso rejeitar a metamatemática. Ela se baseia em uma frutífera distinção, proposta por van Heijenoort (1967) e reelaborada por Hintikka & Hintikka (1986, cap.I), entre a “linguagem como meio universal” e a “linguagem como cálculo”: de acordo com a primeira visão, não podemos observar nossa própria linguagem de fora e descrevê-la, como fazemos com outros objetos que podem ser especificados, referidos, descritos, discutidos e sobre os quais podemos teorizar na nossa linguagem; na segunda visão, em contraste, podemos fazer tudo isto, levantando questões metateóricas acerca da nossa lógica e até mesmo imaginando uma alteração em sua interpretação, por exemplo, a respeito do domínio sobre o qual se aplicam os quantificadores. Segundo van Heijenoort, a adesão de Frege e Russell à primeira visão acima explica a ausência de noções semânticas em seus trabalhos, e em especial a desatenção à distinção entre a noção de demonstrabilidade e a noção de validade baseada na (proto-) teoria de conjuntos, distinção esta que só seria levada a efeito após os trabalhos de Löwenheim em 1915 e de Skolem em 1920. Segundo os Hintikkas, a adesão de Wittgenstein também à primeira visão acima explicaria a razão pela qual em todo o seu trabalho filosófico, assim como no trabalho anterior de Frege e no trabalho posterior de Quine, a semântica seria considerada *inefável*, mesmo que não fosse *impossível*. Na primeira filosofia de Wittgenstein, uma consequência desta postura seria a distinção “tractatiana” entre *dizer* e *mostrar*; em sua filosofia posterior, uma consequência importante seria a rejeição de quaisquer considerações metateóricas acerca da linguagem e, por extensão, a rejeição do platonismo matemático e das tentativas de produzir provas de consistência.

A distinção acima explicitada pode nos ajudar igualmente a compreender a peculiar concepção de cálculo adotada por Wittgenstein. Durante toda a sua vida o filósofo insistiu que as contradições lógicas, assim como as tautologias, são desprovidas de sentido e, por conseguinte, de conteúdo informativo (*Tractatus* 4.461, *Foundations* Ap.I-20). Parece correto afirmar que, juntas, as contradições e as tautologias formam uma espécie de “ilha lógica”, separadas das proposições comuns (cf. Goldstein, 1986, p.44). Mas se tal concepção cai bem ao filósofo do *Tractatus*, cuja preocupação é analisar minimamente as proposições da lógica, da epistemologia, da física, da ética e da mística, ela já não se encaixa tão suavemente nos escritos do filósofo dos *Foundations*, cuja preocupação é a gramática de todas estas proposições. É este último porém quem nos afirma que poderíamos tranquilamente substituir as tautologias pelas contradições na lógica, fazendo dos *Principia Mathematica* de Russell uma coleção de contradições ao invés de uma coleção de tautologias (*Lectures* XIX, p.189). Ao que ele emenda em seguida que não importa como lemos as proposições da matemática, mas apenas o que faremos depois com o que lemos (*Lectures* XIX, p.190). E ele fala ainda na “invasão desastrosa” da matemática pela lógica (*Foundations* IV-24), e no modo pelo qual a lógica matemática teria apenas perpetuado a tradição aristotélica, ao se infiltrar no pensamento dos matemáticos e dos filósofos, impondo uma interpretação não mais que superficial da nossa linguagem cotidiana como uma análise da estrutura dos fatos (*Foundations* IV-48).

Sim, é verdade que “o interesse de Wittgenstein, em sua segunda filosofia, não está nas linguagens artificiais e sua semântica formal, mas nas linguagens comuns (*Investigações* §81). Ele está preocupado com as contradições que surgem no discurso ordinário." (Goldstein, 1986, p.54) Mas nós temos que tentar compreender a dificuldade que tem um "semanticista sem semântica" (cf. Hintikka & Hintikka, 1986, p.2-3) como ele em nos chamar a atenção para o fato de que não estejamos vendo os axiomas da matemática como aquilo que eles realmente são: proposições da sintaxe (*Remarks*, p.189), ou em afirmar que "o problema de encontrar uma decisão matemática para um teorema pode com alguma justiça ser visto como o problema de se dar um sentido matemático a uma fórmula" (*Foundations* IV-42), ou mesmo em insistir que só podemos dizer que a formação de certas configurações do cálculo é "proibida", mas não "contraditória" (*Remarks*, p.339), pois para tanto elas deveriam constituir-se em asserções. Sem dispor de uma semântica, sua única saída é fazer-se valer de termos oblíquos, falar indiretamente, torcer para que seu interlocutor concorde em encontrá-lo a meio caminho: faltam-lhe palavras!

Ao fim de tudo isto, podemos sem dúvida compreender o objetivo da prática filosófica de Wittgenstein como o da luta pela derrocada final da metafísica, o combate a toda e qualquer espécie de dogmatismo, ou, como queria Moreno (1993), como a "terapia das imagens". Devemos relativizar as *necessidades*: diferentes jogos e diferentes matemáticas são de fato possíveis. Devemos reconhecer que não há critérios únicos e definitivos. Isto quer dizer que não podemos ter certeza? Não, "o que preciso mostrar é que uma dúvida não é necessária mesmo quando é possível. Que a possibilidade do jogo de linguagem não depende de se duvidar de tudo que se pode duvidar. (Isto está ligado ao papel da contradição na matemática.)" (*Certainty* §392) Não podemos negar às contradições o direito de fazer parte de um jogo matemático – elas decerto não representam qualquer ameaça cética –, mas também é evidente que não somos obrigados a acolhê-la nos nossos jogos. Só porque conhecemos outros jogos, isto não significa que devamos abandonar o nosso, ou deixar de defendê-lo. Wittgenstein quer acabar com as ilusões do cientista: o paraíso de Cantor, as provas de consistência, seus *pontos fixos*, o que quer que lhe empreste uma segurança ilegítima. Isto implica em destruir as perspectivas do cientista? Só se for do ponto de vista psicológico. Se do ponto de vista do cientista a tarefa de Wittgenstein pode parecer uma tarefa epistemológica, aos olhos do próprio filósofo ela é antes de tudo uma tarefa ética.

1.6 Haverá implicações desta postura para a prática matemática?

Considere-se celebrado o casamento, com separação de bens, da filosofia com a matemática. A matemática vai trabalhar fora, onde se envolve com certos tipos, e acaba por levantar novos problemas filosóficos. Ela não pode resolvê-los, pois é incapaz de fornecer esclarecimento conceitual. A filosofia, paciente e prendada, envolve em sua prosa a atividade matemática, e tece uma rede donde a matemática retirará tudo aquilo que precisa para ser mais do que uma simples manipulação simbólica. A tal rede colhe ainda muitas confusões metafísicas, estas porém deverão ser resolvidas gramaticalmente. A matemática se envolveu com uma contradição, mas esta a filosofia não pretende resolver, pelo menos não através de uma descoberta lógica ou matemática. A filosofia não pode tocar no uso efetivo da linguagem, nem fundamentá-lo – ela só coloca as coisas, não elucida nada e não conclui nada. Contrariamente à matemática, a filosofia não demonstra, mas argumenta. O máximo que ela pode fazer é descrever o uso da linguagem, e então deixar tudo como está. Ela acumula recordações para uma finalidade determinada. Por seu lado, a matemática não tem uma idéia de progresso, e ao final também deixa tudo como está (*Investigações* §124-7).

Wittgenstein põe fim ao seu trabalho (anti-)filosófico, e espera sinceramente que seus escritos tenham servido antes como um espelho esclarecedor das dificuldades do leitor do que servido à construção de um sistema. Pois em filosofia não há teses. “Se se quisesse expor *teses* em filosofia, nunca se chegaria a uma discussão sobre elas, porque todos estariam de acordo.” Mas esta não é uma tese?

É certo que durante a fase transicional de sua filosofia, no início da década de 30, Wittgenstein flertava com os intuicionistas, mas dúvidas há de que não tenham ficado alguns resquícios desta aventura muitos anos mais tarde. Não raro podemos ver o filósofo caracterizado como finitista e construtivista, além de, claro, anti-platonista (cf. p.ex. Hintikka & Hintikka, 1986, p.26). Isso quando não o dizem simplesmente esquizofrênico – vide Anderson, Bernays, Beth, Chihara etc. Além de sua postura relaxada com relação à contradição, Wittgenstein também sofreu críticas ao próprio afrouxamento que propusera com relação ao uso da palavra "matemática" – afrouxamento que é parte inalienável do "método" de análise gramatical, e do "processo" de reconhecimento de semelhanças de família: estaríamos dispostos a denominar matemática uma atividade que só tivesse aplicações imaginárias, ou propósitos ocultos, ou então que não fosse capaz de formar conceitos? (*Foundations* V-25 e 26) Bem se vê que uma boa parte das apreciações desfavoráveis da filosofia de Wittgenstein se trata de simples equívoco – de certa forma justificado, em terreno tão movediço. Wittgenstein mexe com os brios dos matemáticos: "Imagine que a teoria de conjuntos fôra inventada por um satirista como um tipo de paródia na matemática. — Mais tarde um significado razoável foi visto nela e ela foi incorporada à matemática. (Pois se uma pessoa pode vê-la como o paraíso dos matemáticos, por que outra não poderia vê-la como um chiste?) A questão é: mesmo como chiste, ela não é evidentemente matemática?" (*Foundations* IV-7) Mas afinal, como pode ser que alguns tirem da filosofia de Wittgenstein consequências tão positivas, e são capazes até mesmo de ousar analisar seus esforços na direção de uma filosofia ou de uma matemática paraconsistente, enquanto outros o ignoram ostensivamente, e o interpretam com má vontade?

É difícil a qualquer pessoa ministrar seus ensinamentos sem deixar transparecer seus preconceitos. Em especial a um filósofo, que com uma obra em andamento não tem tantas opções, e se não estimula projetos de trabalho de um lado, de outro no mínimo desencoraja certas linhas de pesquisa. Sob o impacto da análise wittgensteiniana da matemática seria bastante razoável que os matemáticos considerassem desinteressante e abandonassem, por exemplo, a teoria dos conjuntos transfinitos, e também desacelerassem a elaboração e o desenvolvimento de novos sistemas formais (cf. o verbete *Matemática*, em Glock, 1998, para referências). Nossa sorte é que não o fazem. Para termos uma idéia melhor da natureza desta análise filosófica embaraçadora, consideremos aqui um único exemplo, o da discussão feita por Wittgenstein do Primeiro Teorema de Incompletude de Gödel, de 1931 (veja *Foundations* Ap.I-5 a 19, V-18 e 19).

Uma versão do Primeiro Teorema de Incompletude de Gödel nos ensina que em qualquer teoria axiomática consistente e correta da aritmética A é possível construir uma sentença g que, não obstante verdadeira, não é demonstrável nessa teoria A. Esta sentença diz, intuitivamente, "eu não sou demonstrável". Então, se g for demonstrável, como a teoria é correta, g é verdadeira. Porém, se g for verdadeira, também é verdadeiro o que ela diz, isto é, g não é demonstrável. O procedimento de Gödel se resumiu essencialmente em tomar o sistema formal dos *Principia Mathematica*, numa versão estendida, e mostrar que predicados como "não ser demonstrável" são representáveis neste sistema, codificando em seguida os teoremas do próprio sistema de modo que pudessem servir de argumento ao predicado, e então substituindo como argumento o código referente a este próprio predicado de não-demonstrabilidade. Podemos dizer que este teorema de Gödel introduz sérias limitações aos sistemas formais, pelo menos no sentido de que as teorias "interessantes" da aritmética parecem nunca ser capazes de dizer tudo o que poderiam, elas são por assim dizer incompletáveis: há "verdades" que não são demonstráveis, que são *indecidíveis*. Para superar estas "limitações da aritmética" poderíamos fazer aqui uma aplicação da paraconsistência: se uma lógica paraconsistente fosse utilizada para formalizar a aritmética e permitíssemos que esta teoria fosse inconsistente, então a sentença g de Gödel poderia muito bem ser nela demonstrável.

Os comentários de Wittgenstein sobre o tema são largamente inconclusivos. É menos a validade da prova o que ele questiona do que a interpretação da proposição g. Nós devemos lembrar que o filósofo está comprometido com uma visão da semântica como inefável – a linguagem como meio universal, como vimos em **1.5.2** –, e ele não pode senão identificar as noções de verdade e de demonstrabilidade no cálculo de Russell: observe que com isso ele não está tomando "*verdadeiro* $\leftrightarrow$ *demonstrável*", mas "*verdadeiro* = *demonstrável*". Tudo que ele pode afirmar então é que a interpretação de *g*, como a de qualquer outra proposição matemática, extrai o seu significado de sua própria demonstração, pois "em matemática, processo e resultado são equivalentes." (*Foundations* I-82; cf. também *Tractatus* 6.1261) Uma primeira recomendação de Wittgenstein surge no sentido de que nos esforcemos por tornar mais claro o que queremos dizer com "ser demonstrável". Todavia, se realmente acreditamos ter provado a proposição *g*, uma dentre as seguintes coisas deve ter ocorrido:

(a) nós nos enganamos – neste caso, o mínimo que devemos fazer é mudar a nossa interpretação de "não-demonstrável";

(b) nós provamos *g*, de fato, mas em um outro sistema matemático, ou em um sistema físico – não há problema, pois há proposições verdadeiras em outros sistemas que não são verdadeiras no sistema dos *Principia*, assim como há proposições verdadeiras dos *Principia* que não são verdadeiras "lá fora";

(c) nós de fato provamos *g* no nosso sistema, e temos portanto uma contradição – que mal isto pode causar?, se pergunta Wittgenstein, e por que não poderíamos pensar que o princípio da Não-Contradição é falso neste caso?

A crítica de Wittgenstein a este último caso começa por uma comparação com o Paradoxo do Mentiroso, o que não é de todo adequado, pois no presente caso a sentença deste paradoxo afirmaria algo como "eu não sou verdadeira", ao invés de "eu não sou demonstrável" – mas aqui, de novo, isto não faz muita diferença para Wittgenstein. Devemos notar que o Paradoxo do Mentiroso nos fornece justamente a razão pela qual as verdades aritméticas não poderiam ser definidas na teoria *A*. Em seguida, a crítica de Wittgenstein continua pelo argumento de que proposições como *g* não servem para nada: "É como se alguém extraísse de certos princípios sobre formas naturais e estilo arquitetônico a idéia de que do Monte Everest, onde ninguém pode viver, fizesse parte um chalé no estilo barroco." (*Foundations* Ap.I-19) Esta observação também não é decisiva, em primeiro lugar porque Wittgenstein deveria ser o último a censurar algo por *não ter* uso: e não *poderia ter*?, e em segundo lugar porque já se conhecem hoje outros exemplos de proposições matemáticas "mais naturais", isto é, que não traduzem asserções metamatemáticas, que são formalmente indecidíveis em *A* (cf. p.ex. Paris & Harrington, 1977).

2
No País Das Maravilhas

Ao apresentar o primeiro cálculo proposicional paraconsistente, em 1948, Jaśkowski pretendia que este cálculo gozasse das seguintes propriedades:

J[i] ele deveria servir de base a um sistema contraditório (inconsistente) que não fosse necessariamente trivial;

J[ii] ele deveria ser suficientemente rico a fim de tornar possível grande parte dos raciocínios usuais, possibilitando inferências práticas;

J[iii] ele deveria ter uma interpretação intuitiva. (Jaśkowski, 1969)

Anos mais tarde, em 1963, da Costa atacaria de forma independente o mesmo problema, propondo desta vez uma hierarquia de cálculos proposicionais paraconsistentes, C_n, $1 \leq n \leq \omega$. Suas exigências sobre estes cálculos, contudo, foram:

dC[i] nestes cálculos o princípio da não-contradição, na forma $\neg(A \wedge \neg A)$, não deve ser um esquema válido;

dC[ii] de duas fórmulas contraditórias não deve ser em geral possível deduzir qualquer outra fórmula;

dC[iii] a extensão destes cálculos aos cálculos de predicados correspondentes deve ser simples;

dC[iv] estes cálculos devem conter a maior parte dos esquemas e regras do cálculo proposicional clássico que não interfiram com as condições anteriores. (da Costa, 1974)

A vagueza na formulação de algumas das condições acima não representa necessariamente um inconveniente, mas abre o caminho para que diversas soluções diferentes possam ser propostas para o problema da paraconsistência.

Observemos que a condição **dC[i]** não deve preocupar Jaśkowski, pois sua lógica é não-adjuntiva e não permite a dedução de uma contradição $(A \wedge \neg A)$ a partir de duas fórmulas contraditórias A e $\neg A$. Mas se prosseguimos e identificamos **J[i]** e **dC[ii]**, **J[ii]** e **dC[iv]**, o que diremos das condições restantes?

Por um lado, **dC[iii]** nos dá a razão pela qual da Costa não raro é julgado o "verdadeiro fundador da lógica paraconsistente" (vide, por exemplo, Arruda, 1980a; D'Ottaviano, 1990 e 1992), ainda mais tendo em vista que seus sistemas de cálculo proposicional paraconsistente se fizeram acompanhar imediatamente de sistemas correspondentes de cálculo paraconsistente de predicados, com e sem igualdade, bem como sistemas de cálculo paraconsistente de descrições e sistemas de teoria paraconsistente de conjuntos (que mais tarde se revelaram triviais – cf. Arruda, 1980b, e da Costa, 1986). Por outro lado, a falta de **J[iii]** talvez explique a dificuldade que temos encontrado em estabelecer uma interpretação intuitiva para os sistemas C_n, dificuldade que entendemos ainda não completamente superada.

Foi com a intenção de contribuir a esta superação que Carnielli & Marcos (199?a) propuseram aplicar à hierarquia de cálculos proposicionais de da Costa uma nova ferramenta semântica, as *semânticas de traduções possíveis* (vide também Carnielli, 1999). Apresentaremos a seguir o cálculo C_1 de da Costa e sua semântica de valorações, e então mostraremos como associar uma semântica de traduções possíveis a este cálculo. No capítulo **3.** estenderemos esta semântica para os outros cálculos da hierarquia. Também o novo cálculo-limite desta hierarquia, que proporemos no capítulo **4.**, receberá uma semântica de traduções possíveis.

2.1 A construção do cálculo C_1

Com Alves & Queiroz (1991) aprendemos como o cálculo paraconsistente C_1 se constrói de uma certa forma "dual" à construção do Cálculo Intuicionista de Heyting (**CIH**):

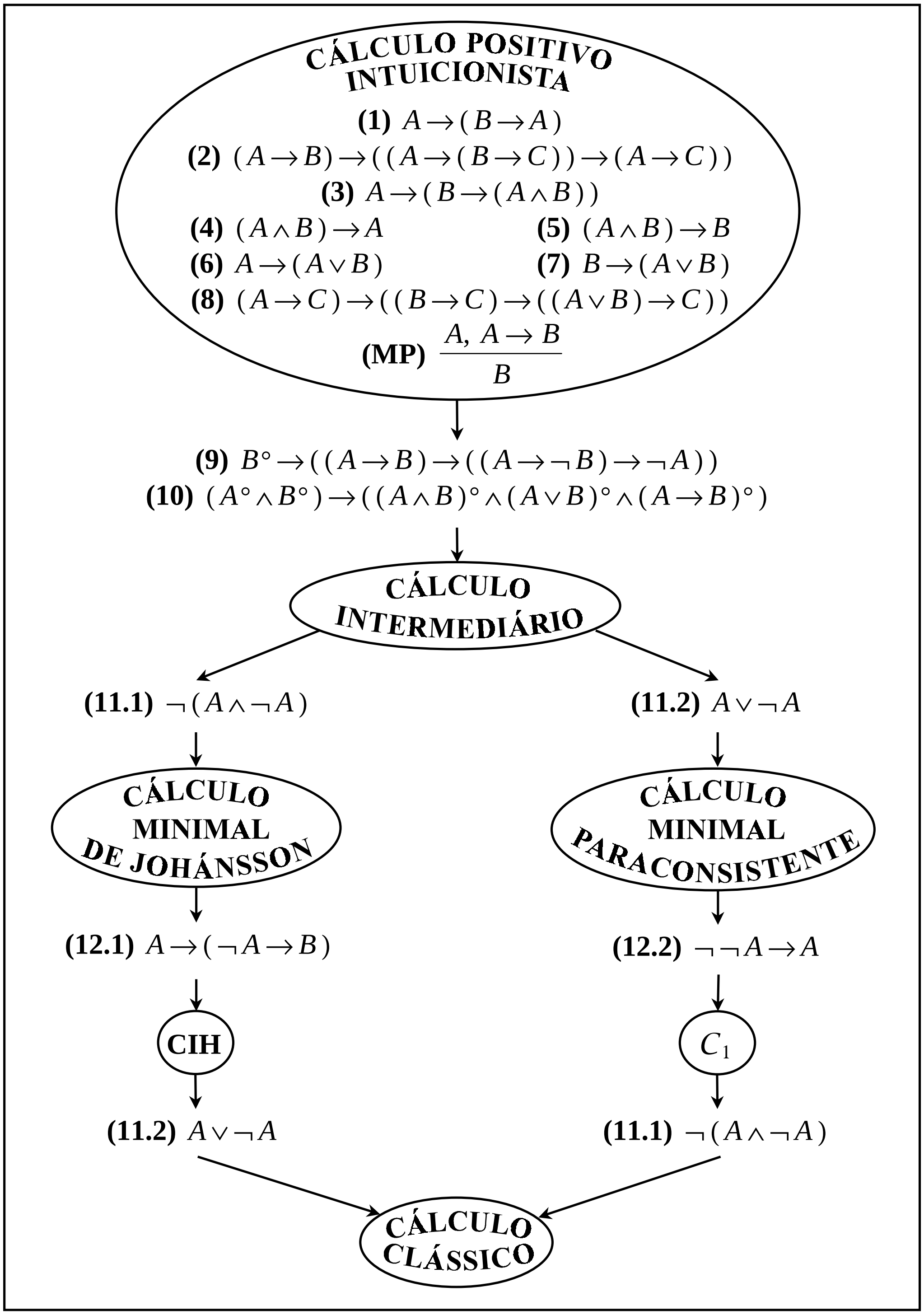

Figura 1

Observe que acima não apresentamos axiomas, mas esquemas de axiomas (ou axiomas, junto com uma regra de substituição). Além disso, usamos X° para abreviar a fórmula $\neg(X \wedge \neg X)$. Faremos referência a esta fórmula, quando demonstrável, como exprimindo o fato de que *a proposição X é bem-comportada*.

É a axiomatização de C_1 por **(1)** a **(10)**, **(11.2)** e **(12.2)**[1], mais a regra de Modus Ponens **(MP)**, que consideraremos no presente trabalho, e denotaremos os axiomas, nesta ordem, por C_1**(1)** a C_1**(12)**. Diremos que C_1**(9)** nos dá a *forma paraconsistente da redução ao absurdo*, C_1**(10)** nos garante a *propagação do bom-comportamento*, C_1**(11)** representa o *princípio do terceiro excluído*, e C_1**(12)** permite a *redução das negações*.[2]

2.1.1 Algumas importantes propriedades sintáticas de C_1

Sabemos que a lógica clássica pode ser axiomatizada por C_1**(1)** - C_1**(8)**, C_1**(12)** e **(RA)**: $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$ (Kleene, 1952). Por outro lado, como veremos mais adiante, em C_1 não são válidos vários esquemas clássicos, tais como $A \to \neg\neg A$. Daí, é fácil ver que de C_1 não se pode mesmo deduzir o esquema $\neg(A \wedge \neg A)$, pois em caso contrário teríamos, por C_1**(9)** e **(MP)**, **(RA)**. Por construção, C_1 atende portanto a **dC[i]**, a primeira exigência de da Costa.

Denominamos *negação forte de A* à fórmula $\neg A \wedge A^\circ$, e a abreviamos por $\sim A$. A linguagem de C_1, as noções de fórmula bem-formada (fbf) e de consequência sintática ($\vdash$) são definidas da maneira usual (cf. Mendelson, 1964).

Algumas propriedades sintáticas de C_1:

a. Vale o *Teorema da Dedução* **(TD)**: se $\Gamma, A \vdash B$ então $\Gamma \vdash A \to B$. Com efeito, **(TD)** vale em toda lógica na qual a única regra de inferência seja **(MP)** e os esquemas C_1**(1)** e C_1**(2)** sejam demonstráveis.

---

[1] Alves & Queiroz (1991) na verdade afirmaram que o axioma C_1**(12)** poderia ser substituído em C_1 pelo esquema $A^\circ \to (A \to (\neg A \to B))$, o que tornava a **Figura 1** mais simétrica. Esta afirmação é, contudo, falsa. Vide o apêndice $\omega\times\omega$, **Da substituição de axiomas**.

[2] Para a independência de cada um dos axiomas de C_1 frente aos demais, vide o apêndice $\omega\times\omega$, **Da independência dos axiomas de C_n**.

b. Seja $\Gamma \cup \{F\}$ um conjunto de fbfs, e seja **V** o conjunto das variáveis que intervêm em $\Gamma \cup \{F\}$. Denominemos por **V°** o conjunto $\{p^\circ\colon\ p \in \mathbf{V}\}$. Então $\Gamma \vdash F$ no cálculo proposicional clássico se e somente se Γ, $\mathbf{V}^\circ \vdash F$ em C_1 (da Costa, 1963)[3]. À demonstração deste fato nos serve o esquema C_1**(10)**.

c. A negação forte tem todas as propriedades da negação clássica. Veremos adiante, por exemplo, que valem em C_1 os esquemas $(A \vee {\sim}A)$, $(A \rightarrow {\sim\sim}A)$, ${\sim}(A \rightarrow B) \rightarrow A$, $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow {\sim}B) \rightarrow {\sim}A)$ e ${\sim}(A \wedge {\sim}A)$.

d. A Lei de Peirce **(LP)**, $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$, é um teorema. Sua demonstração é imediata a partir do terceiro e do quarto esquemas em ***c.***, de **(MP)** e de **(TD)**.

e. Valem todas as regras e esquemas da *lógica positiva clássica*. Ela é dada pela adição de **(LP)** a C_1**(1)** - C_1**(8)**, e **(MP)**. (Alves, 1976)

f. C_1 é *consistente*. Com efeito, este cálculo é um subsistema do cálculo clássico, o qual é consistente.

g. C_1 é *finitamente trivializável*. Basta observar que $(A \wedge {\sim}A) \rightarrow B$ é um esquema demonstrável (ele é, de fato, substituível em C_1 pelo esquema C_1**(9)**)[4]. Em particular, sendo F um teorema qualquer de C_1, trivializamos este cálculo se a ele acrescentarmos a fórmula ${\sim}F$.

h. O bom-comportamento se propaga na negação de fórmulas bem-comportadas, isto é, o esquema $A^\circ \rightarrow (\neg A)^\circ$ é demonstrável em C_1.

i. O *Teorema da Substitutividade de Equivalentes* não vale em C_1. Assim, dadas duas proposições F e G tais que $\vdash F \equiv G$, não temos em geral que $\vdash (\neg F) \equiv (\neg G)$. Como veremos logo adiante, não são teoremas de C_1, por exemplo, $\neg(F \wedge G) \equiv \neg(G \wedge F)$ ou $\neg(F \vee G) \equiv \neg(G \vee F)$. Isto ocorre porque a relação de equivalência que define a álgebra de Lindenbaum de C_1 não é uma *congruência*. Mais ainda, Mortensen (1980) provou que, dadas certas restrições, não é possível definir em C_1 uma relação de congruência diferente da identidade. Por outro lado, se acrescentarmos simplesmente aos axiomas de C_1 o esquema

---

[3] Observe o leitor que, ao enunciar este resultado, no **Teorema 9**, p.16, da Costa não contempla o caso em que um número infinito de variáveis proposicionais intervenha em Γ.

[4] Para um resultado ainda mais fino, vide o apêndice $\omega\times\omega$, **Da substituição de axiomas**.

$(A \equiv B) \to (\neg A \equiv \neg B)$, então o que obtemos é o cálculo proposicional clássico (cf. Alves, 1976).

j. Usemos $X^{\square}$ para abreviar a fórmula $\neg(\neg X \wedge X)$. Pode-se facilmente mostrar que $A^{\circ} \to A^{\square}$ é um esquema válido de C_1 mas não a sua recíproca (vide o apêndice ω×ω, **Bolas e quadrados**). Como consequência, trivializaremos necessariamente o cálculo C_1 se a ele acrescentarmos uma fórmula do tipo $F \wedge \neg F \wedge F^{\circ}$, mas não se acrescentarmos uma fórmula do tipo $F \wedge \neg F \wedge F^{\square}$.

2.2 Uma semântica de valorações para C_1

Podemos entender a negação do cálculo C_1 como cumprindo o papel de uma modalidade. Assim como nas lógicas modais pode haver proposições verdadeiras porém não necessariamente verdadeiras, qualquer semântica para C_1 deve levar em consideração que algumas proposições desta lógica podem ser verdadeiras ao mesmo tempo em que suas negações também o são. E de maneira semelhante à qual se pode demonstrar que os cálculos modais de Lewis não são caracterizáveis por matrizes finitas, também para C_1 se pode demonstrar tal resultado (vide o apêndice ω×ω, **Incaracterizabilidade por matrizes finitas**).

Da Costa & Alves (1977) propuseram contudo uma engenhosa semântica bivaluada para C_1. Tratava-se de uma generalização da semântica comum para o cálculo clássico, construída neste caso específico à imagem e semelhança do cálculo paraconsistente em questão. O que se fez foi uma espécie de tradução *verbatim* dos axiomas de C_1.

Uma valoração paraconsistente para C_1:

Denotemos por $\mathrm{For}(S)$ o conjunto de fórmulas de um cálculo S. Uma valoração para C_1 é uma função v: $\mathrm{For}(C_1) \to \{0, 1\}$ tal que valem as seguintes condições:[5]

- Pelos axiomas C_1**(1)** - C_1**(8)**,

val[i] $v(A \wedge B) = 1 \iff v(A) = 1$ e $v(B) = 1$;

[5] No que segue, usaremos os símbolos ⇒ e ⇔ para abreviar, respectivamente, as expressões "se … então …" e "… se e somente se …" (sse).

val[ii] $v(A \vee B)=1 \Leftrightarrow v(A)=1$ ou $v(B)=1$;

val[iii] $v(A \rightarrow B)=1 \Leftrightarrow v(A)=0$ ou $v(B)=1$.

- Pelo axioma C_1**(9)**,

val[iv] $v(B^\circ)=v(A \rightarrow B)=v(A \rightarrow \neg B)=1 \Rightarrow v(A)=0$.

- Pelo axioma C_1**(10)**,

val[v] $v(A^\circ)=v(B^\circ)=1 \Rightarrow v((A\#B)^\circ)=1$, onde # representa qualquer um dos conectivos binários de C_1, isto é, $\# \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$.

- Pelos axiomas C_1**(11)** e C_1**(12)**,

val[vi] $v(A)=0 \Rightarrow v(\neg A)=1$;

val[vii] $v(\neg\neg A)=1 \Rightarrow v(A)=1$.

Observe que a função de valoração acima definida não é *verofuncional*: em geral, se sabemos de uma fórmula F apenas que $v(F)=1$ não poderemos dizer se $v(\neg F)=0$ ou se $v(\neg F)=1$.

Por refletir de maneira tão imediata os axiomas do sistema paraconsistente em questão, diremos que as valorações propostas acima são *valorações paraconsistentes*, e chamaremos esta semântica de valorações de *semântica paraconsistente*.

Algumas consequências da definição de valoração paraconsistente:

a. $\boldsymbol{v(A)=0 \Leftrightarrow v(\sim A)=1}$**.** ($\Rightarrow$) Com efeito, assuma $v(\neg A \wedge A^\circ)=v(\sim A)=0$. Então, por **val[i]**, duas coisas podem ocorrer: (a) $v(\neg A)=0$, donde, por **val[vi]**, $v(A)=1$; (b) $v(\neg(A \wedge \neg A))=v(A^\circ)=0$, donde, novamente por **val[vi]**, $v(A \wedge \neg A)=1$, e por **val[i]**, temos novamente $v(A)=1$. ($\Leftarrow$) Reciprocamente, seja $v(\sim A)=1$. Por **val[i]**, temos $v(\neg A)=1$ e $v(A^\circ)=1$. Daí, por **val[iii]**, $v(A \rightarrow A)=1$ e $v(A \rightarrow \neg A)=1$. De **val[iv]** temos finalmente que $v(A)=0$.

b. $\boldsymbol{v(A^\circ)=0 \Leftrightarrow v(A)=1}$ **e** $\boldsymbol{v(\neg A)=1}$**.** ($\Rightarrow$) Imediato. ($\Leftarrow$) Sejam $v(A)=v(\neg A)=1$. De $v(A)=1$ e de ***a.***, temos que $v(\sim A)=0$, donde $v(A^\circ)=0$.

c. $\boldsymbol{v(A) \neq v(\neg A)}$ **e** $\boldsymbol{v(B) \neq v(\neg B) \Rightarrow v((A\#B)^\circ)=1}$, onde $\# \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$. De fato, de $v(A) \neq v(\neg A)$ e $v(B) \neq v(\neg B)$ concluímos, por ***b.***, que $v(A^\circ)=v(B^\circ)=1$. Daí, por **val[v]**, temos $v((A\#B)^\circ)=1$.

2.2.1 Corretude e completude com relação à semântica proposta

Uma *teoria de* C_1 é um conjunto de fbfs fechado sob aplicações de sua única regra, **(MP)**. Dizemos que uma teoria Γ é $\neg$-*inconsistente* se existe uma fórmula F tal que $\{F,\neg F\}\subseteq\Gamma$, e dizemos que ela é *trivial* se $\Gamma=\mathrm{F{\small OR}}(C_1)$. As noções de validade, modelo e consequência semântica – ou satisfatibilidade, ou forçamento – são definidas da maneira usual (cf. Mendelson, 1964).

Lema. *Toda teoria não-trivial tem um modelo.* Como no caso clássico, a demonstração faz uso do fato de que toda teoria não-trivial pode ser estendida a uma teoria maximal não-trivial (Lema de Lindenbaum). Note-se que este resultado ainda é válido em C_1, mesmo nos casos em que a teoria em foco é $\neg$-inconsistente. Em seguida, definimos uma valoração v tal que $v(A)=1$ se $A\in\Gamma$, e $v(A)=0$ em caso contrário. Aí, basta mostrar que v satisfaz as condições **val[i]** - **val[vii]**.

Corretude. $\Gamma\vdash A \;\Rightarrow\; \Gamma\vDash A$. Como de costume, demonstra-se por indução sobre o comprimento da dedução de A a partir de Γ.

Completude. $\Gamma\vDash A \;\Rightarrow\; \Gamma\vdash A$.

Seja $\Gamma\vDash A$. Então toda valoração v que é modelo de Γ é tal que $v(A)=1$. Mas $v(A)=1$ sse $v(\sim A)=0$, logo não existe valoração tal que seja modelo de Γ e $v(\sim A)=1$, isto é, $\Gamma\nvDash\sim A$. Portanto, $\Gamma\cup\{\sim A\}$ não tem modelo, e então, pelo lema anterior, $\Gamma\cup\{\sim A\}$ é trivial. Em particular, $\Gamma\cup\{\sim A\}\vdash\sim\sim A$. Mas sabemos que $\Gamma\cup\{A\}\vdash\sim\sim A$, pois ~ comporta-se como a negação clássica, logo $\Gamma\cup\{A\vee\sim A\}\vdash\sim\sim A$. Daí, $\Gamma\vdash\sim\sim A$, e então $\Gamma\vdash A$.

2.2.2 Um procedimento de decisão

Ao apresentar-nos a semântica paraconsistente, da Costa & Alves (1977) apresentaram também, como um “produto secundário”, um procedimento de decisão para o cálculo C_1, utilizando uma estrutura que eles denominaram *quase-matrizes*, e cuja construção para uma fórmula F dada segue os passos do seguinte algoritmo:

QM 1. Faça em uma linha a lista das variáveis proposicionais que intervêm em *F*.

QM 2. Disponha sob a linha anterior linhas sucessivas contendo todas as combinações possíveis de 0's e 1's que podem ser atribuídas a estas variáveis.

QM 3. Faça, numa nova coluna, a lista de todas as negações das variáveis proposicionais e para cada negação e cada linha:

QM 3.1. escreva o valor 1 se naquela linha a variável negada toma o valor 0;

QM 3.2. bifurque a linha e escreva 0 numa parte e 1 na outra, se naquela linha a variável negada toma o valor 1.

QM 4. Faça uma lista das subfórmulas de *F*, em ordem crescente de comprimento e da negação das subfórmulas próprias de *F*. Para cada subfórmula *A* e cada linha:

QM 4.1. se *A* não é uma fórmula negada, proceda como na tabela de verdade para o cálculo proposicional clássico;

QM 4.2. se *A* é da forma $\neg B$, e se *B* toma o valor 0, escreva 1, senão, se *B* toma o valor 1:

QM 4.2.1. se *B* é da forma $\neg D$, verifique se *D* e $\neg D$ tomam valores diferentes – neste caso escreva 0, em caso contrário, bifurque a linha e escreva 0 numa parte e 1 na outra, senão

QM 4.2.2. se *B* é da forma $D \wedge \neg D$ escreva 0, senão[6]

QM 4.2.3. *B* deve ser da forma $D \# E$, onde $\# \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \equiv\}$ – verifique por um lado se *D* e $\neg D$ tomam valores diferentes e por outro lado se *E* e $\neg E$ também tomam valores diferentes, e neste caso escreva 0, em caso contrário, bifurque a linha e escreva 0 numa parte e 1 na outra.

---

[6] Em Alves, 1976, p.71, e da Costa & Alves, 1977, p.625, este passo foi apresentado como "se *B* é da forma $D \wedge \neg D$ (ou $\neg D \wedge D$) escreva 0", certamente por desconhecimento do fato de que $\neg(D \wedge \neg D)$ e $\neg(\neg D \wedge D)$ não são fórmulas equivalentes em C_1. Note que, sem a alteração acima, o procedimento de quase-matrizes é portanto, *incorreto*. Vide o apêndice $\omega \times \omega$, **Bolas e quadrados**.

Temos de fato descrito um procedimento recursivo. Precisamos mostrar que ele funciona, isto é, que ele nos dá de fato um procedimento de decisão para os teoremas de C_1.

Dada uma fórmula F qualquer, denotemos por $\boldsymbol{QM_F}$ sua quase-matriz, e denotemos por $col(F)$ o conjunto composto por todas as subfórmulas de F e pelas negações das subfórmulas próprias de F. Ora, $\boldsymbol{QM_F}$ dispõe, por construção, de exatamente uma coluna para cada elemento de $col(F)$. Se uma fórmula G é tal que $G \in col(F)$, então dada uma linha k de $\boldsymbol{QM_F}$, denotamos por $k(G)$ o valor que G toma nesta linha. Dizemos que uma dada valoração v *corresponde* a uma dada linha k de $\boldsymbol{QM_F}$ se ela é tal que, para todo $G \in col(F)$, $v(G) = k(G)$.

Lemas. *Sejam dadas uma fórmula F e a sua quase-matriz correspondente* $\boldsymbol{QM_F}$. *Então:*

I. *Toda valoração paraconsistente corresponde a alguma linha de* $\boldsymbol{QM_F}$. Verifica-se por indução sobre o número de colunas de $\boldsymbol{QM_F}$.

II. (Loparić) *Dada uma linha qualquer, k, de* $\boldsymbol{QM_F}$, *existe uma valoração paraconsistente, v, que a ela corresponde*. Basta definir uma função v tal que, para toda fórmula A de $L(C_1)$, $v(A) = 0$ se

$A \in col(F)$ e $k(A) = 0$, ou

$A \notin col(F)$ e A é uma fórmula atômica, ou

$A = \neg B$ e $v(B) = 1$, ou

$A = B \wedge C$ e $[v(B) = 0$ ou $v(C) = 0]$, ou

$A = B \vee C$ e $[v(B) = 0$ e $v(C) = 0]$, ou

$A = B \rightarrow C$ e $[v(B) = 1$ ou $v(C) = 0]$,

e $v(A) = 1$ em caso contrário. Verifica-se então que v satisfaz as condições **val[i] - val[vii]** (vide **2.2**) que definem uma valoração paraconsistente.

Teorema. (M. Fidel) *Uma fórmula A é teorema de C_1 se e somente se a última coluna de sua quase-matriz contém apenas* 1'*s*. Consequência imediata do lema anterior.

2.2.2.1 Alguns exemplos de quase-matrizes

a) $\nvdash p \to \neg\neg p$ (vide **2.1.1**)

p	$\neg p$	$\neg\neg p$	$p \to \neg\neg p$
0	1	0	1
1	0	1	1
	1	0	**0**
		1	1

b) $\nvdash \neg(p \wedge \neg p)$ (vide **2.1.1**)

$\vdash p^\circ \to (\neg p)^\circ$ (vide ***2.1.1.h***)

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$	$\boxed{p^\circ}$ $\neg(p \wedge \neg p)$	$\neg\neg p$	$\neg p \wedge \neg\neg p$	$\boxed{(\neg p)^\circ}$ $\neg(\neg p \wedge \neg\neg p)$	$p^\circ \to (\neg p)^\circ$
0	1	0	1	0	0	1	**1**
1	0	0	1	1	0	1	**1**
	1	1	**0**	0	0	1	**1**
				1	1	0	**1**

c) $\vdash p^\circ \to p^\square$

$\nvdash p^\square \to p^\circ$ (vide ***2.1.1.j***)

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$	$\boxed{p^\circ}$ $\neg(p \wedge \neg p)$	$\neg p \wedge p$	$\boxed{p^\square}$ $\neg(\neg p \wedge p)$	$p^\circ \to p^\square$	$p^\square \to p^\circ$
0	1	0	1	0	1	**1**	1
1	0	0	1	0	1	**1**	1
	1	1	0	1	0	**1**	1
					1	**1**	**0**

d) $\nvdash \neg(p \vee q) \equiv \neg(q \vee p)$ (vide **2.2.1.*i***)

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$	$\neg p$	$\neg q$	$\boxed{1}$ $\neg(p \vee q)$	$\boxed{2}$ $\neg(q \vee p)$	$1 \equiv 2$
0	0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0	0	1
					1	0	0	1
							1	**0**
						1	0	**0**
							1	1
1	0	1	1	0	1	0	0	1
				1	1	0	0	1
							1	**0**
						1	0	**0**
							1	1
1	1	1	1	0	0	0	0	1
					1	0	0	1
							1	**0**
						1	0	**0**
							1	1
				1	0	0	0	1
							1	**0**
						1	0	**0**
							1	1
					1	0	0	1
							1	**0**
						1	0	**0**
							1	1

2.3 Uma nova semântica para C_1

Fazendo uma analogia entre as lógicas intuicionistas e as paraconsistentes, diríamos que as primeiras são *cautelosas*, por admitir que algumas sentenças e suas negações sejam ambas não-demonstráveis, ou ainda que ambas sejam simultaneamente falsas; as segundas são *ousadas*, por admitir, ao contrário, que algumas sentenças sejam tão demonstráveis quanto suas negações, ou ainda que sejam verdadeiras ambas as parcelas de uma contradição.

O tratamento formal das lógicas intuicionistas surgiu a partir da formalização matemática (cf. Heyting, 1956) de questionamentos epistêmicos sobre a matemática. Fundado por Brouwer em 1907, o intuicionismo concebia a matemática como uma atividade mental humana, e seus objetos de estudo seriam construções mentais cujas propriedades deveriam ser estabelecidas também por construções mentais. Brouwer criticava extensamente a lógica de seu tempo, e sua crítica incluía, por exemplo, ataques ferozes ao princípio do terceiro excluído, segundo o qual a matemática deveria ter sempre algo a dizer sobre uma dada proposição ou sobre sua negação: pelo menos uma das duas deveria ser demonstrável, pelo menos uma das duas deveria ser verdadeira. Além de uma sólida motivação filosófica, e a consequente formalização como um fragmento da lógica clássica, o Cálculo Intuicionista (de Heyting) passou logo a contar com interpretações semânticas diversas – as interpretações topológicas de Tarski e Stone, generalizadas modernamente na semântica categórica dos *topoi*, as semânticas de mundos possíveis de Kripke (e, similarmente, Beth) – e interpretações baseadas em algoritmos – a interpretação "efetiva" de Kleene, e a interpretação "Dialectica" de Gödel (cf. van Dalen, 1986). Surgiu ainda a proposta de Gentzen de formalização do intuicionismo como um sistema de dedução natural e também como um cálculo de sequentes, e uma teoria de modelos tradicional foi desenvolvida pela escola polonesa. Em particular, um tratamento da lógica intuicionista através de sua teoria da prova é bastante oportuno, dada a sua ênfase na demonstração de suas proposições, na sua construção – o que guarda relações com as provas ditas *canônicas* da teoria dos tipos de Martin-Löf. Afinal, não é difícil imaginar que a nossa teoria matemática pode simplesmente não ser forte o suficiente para construir nem a demonstração de uma dada proposição nem a demonstração de sua negação. Esta proposição seria simplesmente *indecidível* nesta teoria. A metateoria de uma lógica cautelosa poderia admitir que, em certas circunstâncias, simplesmente não dispomos de informação suficiente para, entre duas conclusões opostas, decidir por uma delas.

Em contraste, as lógicas paraconsistentes tiveram uma origem bem mais recente e bastante diversa, e muito trabalho nesta área ainda está por fazer. Sem mesmo repassar o que já foi feito até o momento, julgamos notável, contudo, que as interpretações filosóficas das lógicas paraconsistentes tenham surgido em grande parte na esteira de seus desenvolvimentos formais, e não o contrário. Em particular, uma semântica "intuitiva" para os cálculos C_n ficou em débito, uma semântica que explicasse *como* ou *em que sentido* uma dada proposição e sua negação poderiam ser ambas simultaneamente verdadeiras. Além da semântica bivaluada recém-exposta para o cálculo C_1, reflexo de sua sintaxe, e que como veremos a seguir pode ser facilmente estendida aos cálculos C_n, com n finito, não dispomos até o momento, por exemplo, de uma semântica de Kripke para estes cálculos, senão para aquele que foi apresentado como cálculo-limite da hierarquia, C_ω (cf. Baaz, 1986). Mas a dualidade intuitiva com o intuicionismo nos sugere que a metateoria de uma lógica ousada poderia admitir que, em certas circunstâncias, dispomos de uma quantidade de informações tão abundante que é possível justificar duas conclusões opostas.

Seguindo Carnielli & Marcos (199?a), propomos a seguir uma semântica de traduções possíveis para C_1, como uma alternativa que esperamos razoável à semântica anteriormente apresentada. É claro que mais cedo ou mais tarde teremos que responder à óbvia questão: "o que é uma semântica de traduções possíveis?" Optamos por fazê-lo mais tarde, após apresentada, e entendida, a semântica de traduções possíveis proposta para C_1.

2.3.1 As matrizes da lógica $\mathcal{W}_3$

A fim de fornecer uma semântica de traduções possíveis para C_1 consideremos antes o cálculo trivalente $\mathcal{W}_3$, cujas matrizes lógicas definimos a seguir:

$\wedge_1$	**V**	**V⁻**	**F**
V	V	V	F
V⁻	V⁻	V⁻	F
F	F	F	F

$\wedge_2$	**V**	**V⁻**	**F**
V	V	V⁻	F
V⁻	V	V⁻	F
F	F	F	F

$\wedge_3$	**V**	**V⁻**	**F**
V	V	V⁻	F
V⁻	V⁻	V⁻	F
F	F	F	F

	$\neg_L$
V	F
V⁻	F
F	V

$\vee_1$	**V**	**V⁻**	**F**
V	V	V	V
V⁻	V⁻	V⁻	V⁻
F	V	V	F

$\vee_2$	**V**	**V⁻**	**F**
V	V	V⁻	V
V⁻	V	V⁻	V
F	V	V⁻	F

$\vee_3$	**V**	**V⁻**	**F**
V	V	V⁻	V
V⁻	V⁻	V⁻	V⁻
F	V	V⁻	F

	$\neg_C$
V	F
V⁻	V⁻
F	V

$\rightarrow_1$	**V**	**V⁻**	**F**
V	V	V	F
V⁻	V⁻	V⁻	F
F	V	V	V

$\rightarrow_2$	**V**	**V⁻**	**F**
V	V	V⁻	F
V⁻	V	V⁻	F
F	V	V⁻	V

$\rightarrow_3$	**V**	**V⁻**	**F**
V	V	V⁻	F
V⁻	V⁻	V⁻	F
F	V	V⁻	V

onde $\{ V, \ V^{-} \}$ é o conjunto de valores distinguidos.

Dado um cálculo lógico S, denotemos por $L(S)$ sua linguagem, adequada a um tipo de similaridade τ_S. Observe que $L(\mathcal{W}_3)$ conta com três conjunções, $\wedge_1$, $\wedge_2$ e $\wedge_3$, três disjunções, $\vee_1$, $\vee_2$ e $\vee_3$, três implicações, $\rightarrow_1$, $\rightarrow_2$ e $\rightarrow_3$, e duas negações, $\neg_C$ e $\neg_L$, isto é, $\mathrm{FOR}(\mathcal{W}_3)$ é a álgebra das fórmulas geradas por todos estes conectivos. Usamos aqui, sem risco de mal-entendido, os mesmos símbolos para os conectivos na linguagem e interpretados pelas matrizes acima.

Ora, os conectivos primitivos de C_1 são $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ e $\neg$. Se tomarmos ao acaso em $\mathcal{W}_3$ uma conjunção, $\wedge_i$, uma disjunção, $\vee_j$, uma implicação, $\rightarrow_k$, e uma negação, $\neg_A$, podemos então definir em $\mathcal{W}_3$ o fragmento que denominamos $\mathcal{W}_{3\,ijkA}$, a subálgebra de $\mathrm{FOR}(\mathcal{W}_3)$ gerada por $\{\wedge_i, \ \vee_j, \ \rightarrow_k, \ \neg_A\}$. Há $(3\times3\times3\times2=)\,54$ tais fragmentos em $\mathcal{W}_3$. As linguagens de cada $\mathcal{W}_{3\,ijkA}$ e de C_1 são adequadas a um mesmo tipo de similaridade. Dizemos que o cálculo $\mathcal{W}_3$ é aqui *fatorado* em termos de seus fragmentos.

Podemos dizer que a $\neg_L$ é uma negação *forte*, já que ela tem todas as propriedades da negação clássica. Para verificar isto, basta ver que todos os axiomas da lógica clássica, ou ainda, os axiomas C_1**(1)** a C_1**(12)** em conjunto com a fórmula $\neg(A \wedge \neg A)$, assumem valores distinguidos se os interpretamos pelas matrizes de $\{\wedge_i, \vee_j, \rightarrow_k, \neg_L\}$, i, j, $k \in \{1, 2, 3\}$. Como consequência, cada $\mathcal{W}_{3\,ijkL}$ nada mais é do que a própria lógica clássica, disfarçada sob a forma trivalente.

Uma interpretação intuitiva de $\mathcal{W}_{3\,ijkA}$ é a seguinte: nas matrizes dos conectivos, V e F rotulam, respectivamente, informações verdadeira e falsa, ao passo que V⁻ rotula a informação que verdadeira por *default*, isto é, por falta de evidência em contrário. As matrizes são construídas com a idéia de que V⁻ é um valor intermediário tal que $\mathrm{F} \ll \mathrm{V}^- < \mathrm{V}$, isto é, ele funciona *quase* como o valor V na lógica clássica, só que quando é avaliado por um dos conectivos binários ele pode "estragar" o resultado da operação, que pode ser F mas só pode ser mais verdadeiro do que V⁻ caso ambas as proposições combinadas por este conectivo já disponham de evidências conclusivas a seu favor. As negações avaliam a mudança provocada, por exemplo, por acréscimo de novas informações ao sistema em uma proposição com o valor intermediário V⁻. Duas situações podem ocorrer:

- a proposição pode tornar-se verdadeira no futuro, caso em que sua negação deve ser F – este movimento é capturado pela *negação local*, $\neg_L$;
- ela pode continuar tal como está, caso em que sua negação deve ser V⁻ – este movimento é capturado pela *negação contínua*, $\neg_C$.

2.3.1.1 $\mathcal{W}_3$ é J_3!

Dentre as lógicas não-clássicas, as lógicas polivalentes figuram decerto entre as classes mais estudadas, e com mais aplicações, e dentre as lógicas polivalentes, as lógicas trivalentes são as mais conhecidas. Oferecendo fragmentos de $\mathcal{W}_3$ para a interpretação de C_1, do modo como veremos adiante, com a delimitação do conjunto ***T*** das funções de tradução, trabalhamos sem dúvida em um arcabouço conceitual e com uma ferramenta de trabalho de excelente qualidade.

Há que se reconhecer, contudo, que $\mathcal{W}_3$ não é mais uma *nova* lógica trivalente. Considere as seguintes matrizes, de $\mathcal{J}_3$:

$\vee^J$	**1**	**½**	**0**
1	1	1	1
½	1	½	½
0	1	½	0

	∇^J
1	1
½	1
0	0

	$\neg^J$
1	0
½	½
0	1

onde { 1 , ½ } é o conjunto de valores distinguidos.

Tomaremos doravante V como 1, V⁻ como ½ e F como 0. Note que podemos facilmente definir em $\mathcal{W}_3$, usando apenas seus conectivos $\{\neg_L, \neg_C, \wedge_3\}$, todos os conectivos de $\mathcal{J}_3$:

$$A \vee^J B \stackrel{\text{def}}{=} \neg_C((\neg_C A) \wedge_3 (\neg_C B))\,;$$

$$\nabla^J A \stackrel{\text{def}}{=} \neg_L \neg_L A\,;$$

$$\neg^J A \stackrel{\text{def}}{=} \neg_C A\,.$$

$\mathcal{J}_3$ foi proposta por D'Ottaviano e da Costa (cf. D'Ottaviano & da Costa, 1970, e D'Ottaviano, 1982) justamente para servir de base a teorias paraconsistentes, e ao mesmo tempo atender ao requisito **J[iii]** de Jaśkowski, segundo o qual um sistema lógico paraconsistente deveria gozar de interpretação intuitiva. No cálculo $\mathcal{J}_3$ a conjunção, a implicação básica e a equivalência básica são definidas a partir dos conectivos primitivos, $\{\vee^J, \nabla^J, \neg^J\}$, da seguinte maneira:

$$A \wedge^J B \stackrel{\text{def}}{=} \neg^J((\neg^J A) \vee^J (\neg^J B))\,;$$

$$A \rightarrow^J B \stackrel{\text{def}}{=} (\neg^J(\nabla^J A)) \vee^J B\,;$$

$$A \equiv^J B \stackrel{\text{def}}{=} (A \rightarrow^J B) \wedge^J (B \rightarrow^J A)\,.$$

Suas matrizes são, portanto:

$\wedge^J$	**1**	**½**	**0**
1	1	½	0
½	½	½	0
0	0	0	0

$\rightarrow^J$	**1**	**½**	**0**
1	1	½	0
½	1	½	0
0	1	1	1

$\equiv^J$	**1**	**½**	**0**
1	1	½	0
½	½	½	0
0	0	0	1

O caráter paraconsistente de $\mathcal{J}_3$, apresentado por meio dos conectivos acima, se revela em parte pelo fato de que não são válidos nas matrizes acima, entre outros, os esquemas:

$$A \to^J (\neg^J A \to^J B) \qquad\qquad (A \wedge^J \neg^J A) \to^J B$$

$$(A \to^J B) \to^J ((A \to^J (\neg^J B)) \to \neg^J A)$$

$$(A \to^J B) \to^J ((\neg^J B) \to^J (\neg^J A)) \qquad\qquad (A \equiv^J B) \to^J ((\neg^J A) \equiv^J (\neg^J B))$$

$$(A \to^J B) \equiv^J \neg^J (A \wedge^J \neg^J B) \qquad\qquad (A \to^J B) \equiv^J (\neg^J A \vee^J B)$$

É possível definir em $\mathcal{J}_3$, ainda, a matriz de $\to^{Ł}$, a implicação de $Ł_3$, a lógica trivalente de Łukasiewicz. Assim:

$$A \to^{Ł} B \ \stackrel{\text{def}}{\equiv}\ ((\nabla^J(\neg^J A)) \vee^J B) \wedge^J ((\nabla^J B) \vee^J (\neg^J A)) .$$

Sua matriz seria, portanto:

$\to^{Ł}$	**1**	**½**	**0**
1	1	½	0
½	1	1	½
0	1	1	1

$Ł_3$ é usualmente definida a partir dos conectivos $\to^{Ł}$ e $\neg^{Ł}$, e a matriz deste último é a mesma de $\neg^J$. Alternativamente, podemos definir os conectivos iniciais de $\mathcal{J}_3$ tomando como primitivos $\to^{Ł}$ e $\neg^{Ł}$:

$$A \vee^J B \ \stackrel{\text{def}}{\equiv}\ (A \to^{Ł} B) \to^{Ł} B ;$$

$$\nabla^J A \ \stackrel{\text{def}}{\equiv}\ (\neg^{Ł} A) \to^{Ł} A .$$

$\mathcal{J}_3$ e $Ł_3$ definem portanto exatamente as mesmas matrizes unárias e binárias. Observe contudo que elas não são lógicas *equivalentes*, pois 1 é o único valor distinguido em $Ł_3$.

Voltando ao caso de $\mathcal{W}_3$, notamos que, em particular, as matrizes da disjunção e da implicação de $\mathcal{J}_3$ não coincidem, respectivamente, com nenhuma das matrizes das disjunções e implicações de $\mathcal{W}_3$! Apesar disso, podemos definir facilmente em $\mathcal{J}_3$ os conectivos que tomamos como primitivos em $\mathcal{W}_3$:

$$
\begin{aligned}
A \wedge_1 B &\stackrel{\text{def}}{=} \neg^J (A \to^{Ł} \neg^J (\neg^J B \to^{Ł} B)));\\
A \wedge_2 B &\stackrel{\text{def}}{=} B \wedge_1 A;\\
A \wedge_3 B &\stackrel{\text{def}}{=} A \wedge^J B;\\
A \vee_1 B &\stackrel{\text{def}}{=} (\neg^J A \to^{Ł} ((\neg^J B \to^{Ł} B) \to^{Ł} A)) \to^{Ł} A;\\
A \vee_2 B &\stackrel{\text{def}}{=} B \vee_1 A;\\
A \vee_3 B &\stackrel{\text{def}}{=} (A \vee_1 B) \wedge^J (A \vee_2 B);\\
A \to_1 B &\stackrel{\text{def}}{=} \neg^J ((\neg^J B \to^{Ł} B) \to^{Ł} \neg^J ((\neg^J A \to^{Ł} A) \to^{Ł} A));\\
A \to_2 B &\stackrel{\text{def}}{=} (\neg^J A \to^{Ł} (\neg^J A \to^{Ł} (\neg^J B \to^{Ł} B))) \to^{Ł} B;\\
A \to_3 B &\stackrel{\text{def}}{=} (A \to_1 B) \wedge^J (A \to_2 B);\\
\neg_L A &\stackrel{\text{def}}{=} \neg^J \nabla^J A;\\
\neg_C A &\stackrel{\text{def}}{=} \neg^J A.
\end{aligned}
$$

Como já vimos que a recíproca também é verdadeira, e ambos os sistemas $\mathcal{W}_3$ e J_3 têm dois valores distinguidos, eles são portanto dedutivamente equivalentes.[7] Como uma outra importante consequência das definições acima, vemos que teria bastado tomar apenas $\{\neg_L, \neg_C, \wedge_3\}$ como conectivos primitivos em $\mathcal{W}_3$ já que podemos definir $\{\wedge_1, \wedge_2, \vee_1, \vee_2, \vee_3, \to_1, \to_2, \to_3\}$ em termos desses três conectivos.

A constatação de que $\mathcal{W}_3$ nada mais é do que um disfarce para J_3 é uma boa notícia, dado que podemos dispor assim de uma axiomática no estilo hilbertiano correta e completa para este sistema, uma extensão natural para primeira-ordem, bem como de uma teoria de modelos bem desenvolvida, além de muitos outros resultados (cf. D'Ottaviano, 1981 e 1982, e D'Ottaviano & da Costa, 1985).[8]

Não obstante a equivalência entre $\mathcal{W}_3$ e J_3, na exposição a seguir usaremos o nome $\mathcal{W}_3$ sempre para ressaltar que estaremos usando os conectivos de $\mathcal{W}_3$.

---

[7] Para mais detalhes sobre a capacidade expressiva destas lógicas trivalentes, e sua relação com a lógica clássica, vide o apêndice $\omega+\omega$, **Da capacidade de expressão de $Ł_3$, J_3 e $\mathcal{W}_3$**.

[8] Um resultado que não se encontra explícito na literatura da área, mas que pode ser demonstrado é a maximalidade de J_3. Vide o apêndice $\omega+\omega$, J_3 **é maximal**.

2.3.2 Traduções para as fórmulas de C_1

Propomos interpretar as fórmulas de C_1 utilizando as matrizes de $\mathcal{W}_3$ que acabamos de exibir. Mas dado que em C_1 temos, por exemplo, apenas *uma* implicação, o que fazer das *três* implicações de $\mathcal{W}_3$, e assim por diante? Neste caso, tudo se passa como se as fórmulas de C_1 tivessem comportamentos diversos, de acordo com o contexto. Assim podemos entender que, acorde as circunstâncias, uma dada implicação de C_1 poderia na verdade ser "traduzida" de três formas diferentes.

Primeiras restrições sobre as traduções

Definiremos aqui um conjunto $\boldsymbol{T}$ de *funções de tradução*, mapeamentos bastante especiais entre as fórmulas de C_1 e fórmulas de $\mathcal{W}_3$. Buscaremos de início deixar este conjunto o mais amplo possível, dentro de certos limites, impondo sobre $\boldsymbol{T}$ um mínimo de restrições. Assim, cada $* \in \boldsymbol{T}$ deve ser tal que:

Tr 1. para variáveis atômicas p:

a. $p^* = p$;

b. $(\neg p)^* \in \{\neg_L p, \neg_C p\}$.

Tr 2. para fórmulas do tipo $(A \# B)$, onde $\# \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$:

$(A \# B)^* \in \{A^* \#_1 B^*, A^* \#_2 B^*, A^* \#_3 B^*\}$.

Tr 3. para fórmulas do tipo $\neg A$:

$(\neg A)^* \in \{\neg_L A^*, \neg_C A^*\}$.

Está claro que, nas restrições acima, temos proposições e conectivos de $L(C_1)$ à esquerda da igualdade, e temos fórmulas e conectivos de $L(\mathcal{W}_3)$ à sua direita. Dizemos que uma fórmula de $\mathcal{W}_3$ é uma *tradução possível* de uma fórmula de C_1 quando aquela é uma imagem desta por meio de uma função de tradução.

Exemplo. Pelas restrições acima, o conjunto de traduções possíveis da fórmula $\neg(\boldsymbol{p} \wedge \neg \boldsymbol{q})$, com p e q variáveis proposicionais, seria $\{\neg_L(p \wedge_1 \neg_L q)$, $\neg_L(p \wedge_1 \neg_C q)$, $\neg_C(p \wedge_1 \neg_L q)$, $\neg_C(p \wedge_1 \neg_C q)$, $\neg_L(p \wedge_2 \neg_L q)$, $\neg_L(p \wedge_2 \neg_C q)$,

$\neg_C(p\wedge_2\neg_L q)$, $\neg_C(p\wedge_2\neg_C q)$, $\neg_L(p\wedge_3\neg_L q)$, $\neg_L(p\wedge_3\neg_C q)$, $\neg_C(p\wedge_3\neg_L q)$, $\neg_C(p\wedge_3\neg_C q)\}$.

2.3.3 Uma semântica de traduções possíveis para C_1

A *semântica de traduções possíveis* para C_1 que aqui finalmente propomos é o par $<\mathcal{W}_3, \boldsymbol{T}>$, que denominaremos simplesmente **TP**. Uma *valoração de* **TP** é uma valoração de $\mathcal{W}_3$, isto é, uma função que leva as fbfs de $\text{For}(\mathcal{W}_3)$ a elementos do conjunto de valores de verdade de $\mathcal{W}_3$, $\{\mathrm{V}, \mathrm{V}^-, \mathrm{F}\}$. Dizemos que uma fórmula α é *válida* se para toda valoração w de **TP**, $w(\alpha)$ assume um valor distinguido de verdade; dizemos que uma valoração w é um *modelo* para um conjunto Δ de fórmulas se $w(\alpha)$ assume um valor distinguido para todo $\alpha\in\Delta$; e dizemos finalmente que Δ *força* α em $\mathcal{W}_3$, e denotamos por $\Delta \vDash_3 \alpha$, se para todo modelo w de Δ temos que $w(\alpha)$ assume um valor distinguido. Além disso, dados um conjunto de fórmulas $\Gamma\cup\{A\}$ em $\text{For}(C_1)$ e uma função de tradução $*$ em $\boldsymbol{T}$ definimos agora em C_1 a relação de *forçamento local*, $\vDash^*_{\mathbf{TP}}$, por

$$\Gamma \vDash^*_{\mathbf{TP}} A \Leftrightarrow \Gamma^* \vDash_3 A^*.$$

Lemos $\Gamma \vDash^*_{\mathbf{TP}} A$ como "Γ força A sob a tradução $*$". Definimos em C_1 a relação de *forçamento global*, $\vDash_{\mathbf{TP}}$, por

$$\Gamma \vDash_{\mathbf{TP}} A \Leftrightarrow \Gamma \vDash^*_{\mathbf{TP}} A, \text{ para toda } * \text{ em } \boldsymbol{T}.$$

Lemos $\Gamma \vDash_{\mathbf{TP}} A$ como "Γ força A em **TP**". Caso o conjunto Γ de fórmulas seja vazio, lemos $\vDash^*_{\mathbf{TP}} A$ como "A é válido sob a tradução $*$", ou "A é *possivelmente válido*", e lemos $\vDash_{\mathbf{TP}} A$ como "A é válido em **TP**", ou "A é *necessariamente válido*".

Queremos que esta semântica de traduções possíveis seja no mínimo correta e completa para o cálculo C_1, isto é, que

$$\Gamma \vdash A \Leftrightarrow \Gamma \vDash_{\mathbf{TP}} A.$$

A seguir veremos que para tanto será necessário impor algumas restrições "naturais" sobre as funções de tradução.

2.3.3.1 Corretude

Tratemos de demonstrar que todo teorema de C_1 é válido em **TP**, isto é, que

$$\vdash A \Rightarrow \vDash_{\mathbf{TP}} A.$$

Antes de mais nada observemos que a única regra de C_1, Modus Ponens, *preserva validade*, isto é, para toda valoração w de **TP** tal que $w(B)$ e $w(B \to_i A)$ ambos assumem valores distinguidos, $w(A)$ também assume um valor distinguido – basta olhar a matriz de cada uma das implicações de $\mathcal{W}_3$. Posto de outra forma,

$$w(B) \in \{\mathrm{V}, \mathrm{V}^-\} \text{ e } w(B \to_i A) \in \{\mathrm{V}, \mathrm{V}^-\} \Rightarrow w(A) \in \{\mathrm{V}, \mathrm{V}^-\}.$$

Basta verificar agora se todas as traduções possíveis dos axiomas de C_1 são fórmulas válidas em $\mathcal{W}_3$. É fácil ver que são de fato válidas todas as traduções de C_1**(1)** - C_1**(8)**, C_1**(11)** e C_1**(12)**.

Este fenômeno já não se repete, por exemplo, com o axioma C_1**(9)**:

$$B^\circ \to ((A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A))$$

Até o momento há $2^3 \times 3^6 = 5.832$ traduções possíveis para C_1**(9)**. Para entender de que maneira 1.458 entre elas *falham*, basta tomar, por exemplo, duas proposições p e q tais que

$$w(p) = \mathrm{V} \text{ e } w(q) = \mathrm{V}^-,$$

e uma função de tradução $*$ cujo contradomínio é exatamente o fragmento $\mathcal{W}_{3\ 333C}$, isto é, tal que

$$(\neg(q \wedge \neg q) \to ((p \to q) \to ((p \to \neg q) \to \neg p)))^* =$$
$$\neg_C (q \wedge_3 \neg_C q) \to_3 ((p \to_3 q) \to_3 ((p \to_3 \neg_C q) \to_3 \neg_C p)).$$

Então, pelas matrizes de $\mathcal{W}_3$, temos que

$$w(p \to_3 q) = \mathrm{V}^-, \; w(\neg_C p) = \mathrm{F}, \text{ e } w(\neg_C q) = \mathrm{V}^-,$$

donde

$$w(p \to_3 \neg_C q) = \mathrm{V}^-, \text{ e } w(q \wedge_3 \neg_C q) = \mathrm{V}^-,$$

logo

$$w((p \to_3 \neg_C q) \to_3 \neg_C p) = \mathrm{F}, \text{ e } w(\neg_C (q \wedge_3 \neg_C q)) = \mathrm{V}^-,$$

e daí

$w((p \rightarrow_3 q) \rightarrow_3 ((p \rightarrow_3 \neg_C q) \rightarrow_3 \neg_C p)) = \mathrm{F}$.

Como consequência:

$w(\neg_C (q \wedge_3 \neg_C q) \rightarrow_3 ((p \rightarrow_3 q) \rightarrow_3 ((p \rightarrow_3 \neg_C q) \rightarrow_3 \neg_C p))) = \mathrm{F}$.

Observando o ponto exato em que as traduções de C_1**(9)** falham, verificamos que elas passariam a valer se restringíssemos a tradução da negação externa de proposições do tipo B° à negação local sempre que a tradução de $\neg B$ se der pela negação contínua, isto é, se $(\neg B)^* = \neg_C B^*$ então $(\neg(B \wedge \neg B))^* = \neg_L (B \wedge \neg B)^*$. Esta é exatamente a nova restrição que adotaremos. Neste caso, restam 4.374 traduções possíveis para C_1**(9)**, mas todas "funcionam". Se recordamos que $\neg_L$ faz o papel da negação clássica, o que estamos dizendo com esta nova restrição é exatamente o que deveríamos esperar: proposições do tipo B° devem ser bem-comportadas, isto é, comportar-se classicamente!

Tratemos agora do axioma C_1**(10)**:

$$(A^\circ \wedge B^\circ) \rightarrow ((A \wedge B)^\circ \wedge (A \vee B)^\circ \wedge (A \rightarrow B)^\circ)$$

Dispúnhamos, inicialmente, de $2^{10} \times 3^{12} = 544.195.584$ traduções possíveis para C_1**(10)**. Com a nova restrição que resultou da análise do axioma C_1**(9)** acima, temos agora "apenas" $3^{17} = 129.140.163$ traduções possíveis. Mas ainda temos problemas. Para termos uma amostra do modo pelo qual 95.659.380 entre elas falham, tomemos, por exemplo, duas proposições p e q e uma função de tradução $*$ tais que

$w(p) = \mathrm{V}$ e $w(q) = \mathrm{V}^-$,

$(\neg p)^* = \neg_C p$, $(\neg q)^* = \neg_L q$,

$(\neg(A \wedge \neg A))^* = \neg_L (A \wedge \neg A)^*$, para todo A,

$(A \# B)^* = A^* \#_3 B^*$ e $(\neg(A \# B))^* = \neg_C (A \# B)^*$,

para todo A e todo B, $B \neq \neg A$, onde $\# \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$.

Então, pelas matrizes de $\mathcal{W}_3$ temos que

$w(\neg_C p) = \mathrm{F}$, e $w(\neg_L q) = \mathrm{F}$, $w(p \#_3 q) = \mathrm{V}^-$,

$(\neg((p \# q) \wedge \neg(p \# q)))^* = \neg_L ((p \#_3 q) \wedge_3 \neg_C (p \#_3 q))$, donde

$$w(p \wedge_3 \neg_C p) = \mathrm{F},\quad w(q \wedge_3 \neg_C q) = \mathrm{F},$$
$$w(\neg_C (p \#_3 q)) = \mathrm{V}^-,$$

logo

$$w((p^\circ)^*) = w(\neg_L (p \wedge_3 \neg_C p)) = \mathrm{V},\ w((q^\circ)^*) = w(\neg_L (q \wedge_3 \neg_C q)) = \mathrm{V},$$
$$w((p \#_3 q) \wedge_3 \neg_C (p \#_3 q)) = \mathrm{V}^-,$$

e daí

$$w((p^\circ \wedge q^\circ)^*) = \mathrm{V},$$
$$w(((p \# q)^\circ)^*) = w(\neg_L ((p \#_3 q) \wedge_3 \neg_C (p \#_3 q))) = \mathrm{F},$$

e mais ainda,

$$w(((p \wedge q)^\circ \wedge (p \vee q)^\circ \wedge (p \rightarrow q)^\circ)^*) = \mathrm{F},$$

Consequência:

$$w(((p^\circ \wedge q^\circ) \rightarrow ((p \wedge q)^\circ \wedge (p \vee q)^\circ \wedge (p \rightarrow q)^\circ))^*) = \mathrm{F}.$$

Observando o ponto exato em que as traduções de C_1**(10)** falham, verificamos que elas passariam a valer se fizéssemos mais algumas restrições, e aqui comprovamos a necessidade da inclusão em $\mathcal{W}_3$ dos três conectivos binários de cada espécie. Caso a tradução da negação de *A* se valha da negação contínua, mas a tradução da negação de *B* se valha da negação local, então devemos usar o primeiro conectivo de cada espécie, segundo o qual apenas o primeiro componente pode “estragar” a operação, isto é, se $(\neg A)^* = \neg_C A^*$ e $(\neg B)^* = \neg_L B^*$, então $(A \# B)^* = A^* \#_1 B^*$. De modo semelhante, caso a tradução da negação de *A* se valha da negação local e a tradução da negação de *B* se valha da contínua, então devemos usar o segundo conectivo; caso ambas as traduções se valham da negação contínua, então devemos usar o terceiro conectivo; caso ambas se valham da negação local podemos usar qualquer dos três conectivos. Além disso, caso as traduções tanto da negação de *A* quanto da negação de *B* se valerem da negação local, então a tradução da negação da sua combinação também deve se valer desta negação, isto é, se $(\neg A)^* = \neg_L A^*$ e $(\neg B)^* = \neg_L B^*$ então $(\neg (A \# B))^* = \neg_L (A \# B)^*$.

Mais uma vez, estas serão exatamente as restrições que adotaremos. Neste caso, restam 33.480.783 traduções possíveis para C_1**(10)**, mas todas funcionam. Se recordamos que $\neg_L$ cumpre o papel da negação clássica, estas novas restrições nos ensinam, grosso modo, que proposições que possuem componentes bem-comportadas, isto é, que já foram interpretadas classicamente, devem elas próprias ser bem-comportadas. Como esperávamos, o bom-comportamento deve se propagar!

Para conseguirmos a corretude da nossa semântica, mostra-se **necessário** portanto restringir algo o nosso conjunto ***T*** de funções de tradução.

Segundas restrições sobre as traduções:

Tr 1. para variáveis atômicas *p*:

- **a.** $p^* = p$;
- **b.** $(\neg p)^* \in \{\neg_L p, \neg_C p\}$.

Tr 2. para fórmulas do tipo $(A \# B)$, onde $\# \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$:

- **a.** $(A \# B)^* = A^* \#_1 B^*$, se $(\neg A)^* = \neg_C A^*$ e $(\neg B)^* = \neg_L B^*$;
- **b.** $(A \# B)^* = A^* \#_2 B^*$, se $(\neg A)^* = \neg_L A^*$ e $(\neg B)^* = \neg_C B^*$;
- **c.** $(A \# B)^* = A^* \#_3 B^*$, se $(\neg A)^* = \neg_C A^*$ e $(\neg B)^* = \neg_C B^*$;
- **d.** $(A \# B)^* \in \{A^* \#_1 B^*,\ A^* \#_2 B^*,\ A^* \#_3 B^*\}$, em caso contrário.

Tr 3. para fórmulas do tipo A°:

- **a.** $(\neg(A \wedge \neg A))^* = \neg_L (A \wedge \neg A)^*$, se $(\neg A)^* = \neg_C A^*$;
- **b.** $(\neg(A \wedge \neg A))^* \in \{\neg_L (A \wedge \neg A)^*,\ \neg_C (A \wedge \neg A)^*\}$, em caso contrário.

Tr 4. para fórmulas do tipo $\neg(A \# B)$, onde $\# \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, $B \neq \neg A$:

- **a.** $(\neg(A \# B))^* = \neg_L (A \# B)^*$, se $(\neg A)^* = \neg_L A^*$ e $(\neg B)^* = \neg_L B^*$;
- **b.** $(\neg(A \# B))^* \in \{\neg_L (A \# B)^*, \neg_C (A \# B)^*\}$, em caso contrário.

Tr 5. para fórmulas do tipo $\neg\neg A$: $(\neg\neg A)^* \in \{\neg_L (\neg A)^*, \neg_C (\neg A)^*\}$.

Exemplo. Retomando o exemplo anterior (vide **2.3.2**), pelas novas restrições expostas acima, o conjunto de traduções possíveis da fórmula $\neg(\boldsymbol{p}\wedge\neg\boldsymbol{q})$, com p e q variáveis proposicionais, seria o seguinte:

- se $p=q$, temos que $(p^\circ)^*\in\{\neg_L(p\wedge_1\neg_L p), \neg_C(p\wedge_1\neg_L p), \neg_L(p\wedge_1\neg_C p), \neg_L(p\wedge_2\neg_L p), \neg_C(p\wedge_2\neg_L p), \neg_L(p\wedge_2\neg_C p), \neg_L(p\wedge_3\neg_L p), \neg_C(p\wedge_3\neg_L p), \neg_L(p\wedge_3\neg_C p)\}$;
- se $p\neq q$, então
  - se $(\neg p)^*=\neg_C p^*$ e $(\neg\neg q)^*=\neg_L(\neg q)^*$, temos que $(\neg(p\wedge\neg q))^*\in \{\neg_L(p\wedge_1\neg_L q), \neg_C(p\wedge_1\neg_L q), \neg_L(p\wedge_1\neg_C q), \neg_C(p\wedge_1\neg_C q)\}$;
  - se $(\neg p)^*=\neg_L p^*$ e $(\neg\neg q)^*=\neg_C(\neg q)^*$, temos que $(\neg(p\wedge\neg q))^*\in \{\neg_L(p\wedge_2\neg_L q), \neg_C(p\wedge_2\neg_L q), \neg_L(p\wedge_2\neg_C q), \neg_C(p\wedge_2\neg_C q)\}$;
  - se $(\neg p)^*=\neg_C p^*$ e $(\neg\neg q)^*=\neg_C(\neg q)^*$, temos que $(\neg(p\wedge\neg q))^*\in \{\neg_L(p\wedge_3\neg_L q), \neg_C(p\wedge_3\neg_L q), \neg_L(p\wedge_3\neg_C q), \neg_C(p\wedge_3\neg_C q)\}$;
  - se $(\neg p)^*=\neg_L p^*$ e $(\neg\neg q)^*=\neg_L(\neg q)^*$, temos que $(\neg(p\wedge\neg q))^*\in \{\neg_L(p\wedge_1\neg_L q), \neg_L(p\wedge_1\neg_C q), \neg_L(p\wedge_2\neg_L q), \neg_L(p\wedge_2\neg_C q), \neg_L(p\wedge_3\neg_L q), \neg_L(p\wedge_3\neg_C q)\}$.

Todas estas restrições parecem (e de fato são) muito complicadas e, pior, produzem um número exagerado de traduções possíveis, mesmo para fórmulas muito simples. Fizemos um mínimo de restrições sobre $\boldsymbol{T}$ de modo a garantir a corretude; se mirarmos porém com atenção os conjuntos definidos em cada subcaso do exemplo acima, notaremos logo muita redundância: boa parte das fórmulas em cada conjunto são equivalentes em $\mathcal{W}_3$. Assim, por exemplo, $\neg_L(p\wedge_1\neg_L p)$ e $\neg_C(p\wedge_1\neg_L p)$ produzem as mesmas matrizes, e também $\neg_L(p\wedge_2\neg_C q)$ e $\neg_L(p\wedge_3\neg_C q)$. Será que não podemos impor novas restrições, ficando ainda assim com um conjunto de traduções possíveis **suficiente** pros nossos objetivos futuros?

Buscamos agora um conjunto "definitivo" de restrições sobre as funções de tradução.

2.3.3.2 As restrições sobre as traduções

Notemos, antes de mais nada, que não há porque supor que a tradução da negação de uma fórmula atômica possa ser bem-comportada – sabemos que em C_1 o bom-comportamento é propriedade de fórmulas mais complexas. Isto justifica a modificação em **Tr 1.b** a seguir. O restante se explica pela eliminação de redundâncias.

Tr 1. para variáveis atômicas *p*:

a. $p^* = p$;

b. $(\neg p)^* = \neg_C p$.

Tr 2. para fórmulas do tipo $(A \# B)$, onde $\# \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$:

a. se $(A \# B)$ é $(A \wedge \neg A)$, então $(A \wedge \neg A)^* = (A^* \wedge_3 (\neg A)^*)$, senão

b. $(A \# B)^* = A^* \#_1 B^*$, se $(\neg A)^* = \neg_C A^*$ e $(\neg B)^* = \neg_L B^*$;

c. $(A \# B)^* = A^* \#_2 B^*$, se $(\neg A)^* = \neg_L A^*$ e $(\neg B)^* = \neg_C B^*$;

d. $(A \# B)^* = A^* \#_3 B^*$, nos demais casos.

Tr 3. para fórmulas do tipo $\neg (A \# B)$, onde $\# \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$:

a. se $(A \# B)$ é $(A \wedge \neg A)$, então $(\neg (A \wedge \neg A))^* = \neg_L (A \wedge \neg A)^*$, senão

b. $(\neg (A \# B))^* = \neg_L (A \# B)^*$, se $(\neg A)^* = \neg_L A^*$ e $(\neg B)^* = \neg_L B^*$;

c. $(\neg (A \# B))^* \in \{\neg_L (A \# B)^*, \neg_C (A \# B)^*\}$, nos demais casos.

Tr 4. para fórmulas do tipo $\neg\neg A$:

a. $(\neg\neg A)^* = \neg_L (\neg A)^*$, se $(\neg A)^* = \neg_L A^*$;

b. $(\neg\neg A)^* \in \{\neg_L (\neg A)^*, \neg_C (\neg A)^*\}$, em caso contrário.

O leitor já saberá facilmente, a esta altura, reconstruir o exemplo anterior, desta vez atendendo a estas novíssimas restrições – e perceberá de imediato a economia com elas alcançada.

Algumas consequências das restrições sobre *T* e das matrizes de $\mathcal{W}_3$:

a. $\boldsymbol{w(A^*) = \mathbf{F} \Leftrightarrow w(\neg_L A^*) = \mathbf{V}}$. Imediato.[9]

[9] Compare, neste ponto e adiante, com **2.2**, **Algumas consequências da definição de valoração paraconsistente**.

b. $\boldsymbol{w((A^\circ)^*)=\mathrm{F} \Leftrightarrow w(A^*)=\mathrm{V}^-}$ **e** $\boldsymbol{w((\neg A)^*)=\mathrm{V}^-}$**;**

$\boldsymbol{w((A^\circ)^*)=\mathrm{V} \Leftrightarrow w(A^*)=\mathrm{F}}$ **ou** $\boldsymbol{w((\neg A)^*)=\mathrm{F}}$.

Com efeito, de **Tr 2.a.** e **Tr 3.a.** temos que $(\neg(A\wedge\neg A))^*=\neg_L(A^*\wedge_3(\neg A)^*)$, logo $w((A^\circ)^*)=\mathrm{F} \Leftrightarrow w(\neg_L(A^*\wedge_3(\neg A)^*))=\mathrm{F}$. Mas, pelas matrizes de $\mathcal{W}_3$ temos $w(\neg_L(A^*\wedge_3(\neg A)^*))=\mathrm{F} \Leftrightarrow w(A^*\wedge_3(\neg A)^*)\in\{\mathrm{V},\mathrm{V}^-\} \Leftrightarrow w(A^*)\in\{\mathrm{V},\mathrm{V}^-\}$ e $w((\neg A)^*)\in\{\mathrm{V},\mathrm{V}^-\} \Leftrightarrow w(A^*)=w((\neg A)^*)=\mathrm{V}^-$ (e $(\neg A)^*=\neg_C A^*$). Note ainda, a partir das matrizes dos conectivos, que não é possível nem que $w(A^*)=w((\neg A)^*)=\mathrm{V}$, nem que $w((A^\circ)^*)=\mathrm{V}^-$.

c. $\boldsymbol{[w(A^*)=\mathrm{F}}$ **ou** $\boldsymbol{w((\neg A)^*)=\mathrm{F}]}$ **e** $\boldsymbol{[w(B^*)=\mathrm{F}}$ **ou** $\boldsymbol{w((\neg B)^*)=\mathrm{F}] \Rightarrow w(((A\#B)^\circ)^*)=\mathrm{V}}$, onde $\#\in\{\wedge,\vee,\rightarrow\}$. Há quatro combinações possíveis:

[α.] $w(A^*)=\mathrm{F}$ e $w(B^*)=\mathrm{F}$, caso em que $w((A\#B)^*)\in\{\mathrm{V},\mathrm{F}\}$, logo $w((\neg(A\#B))^*)\in\{\mathrm{F},\mathrm{V}\}$, e por ***b.*** concluímos que $w(((A\#B)^\circ)^*)=\mathrm{V}$;

[β.] $w(A^*)=\mathrm{F}$ e $w((\neg B)^*)=\mathrm{F}$, caso em que $w((\neg A)^*)=\mathrm{V}$ e ainda: ou **(i)** ou $w(B^*)=\mathrm{V}$, e então procedemos como em **[α.]**; **(ii)** ou $w(B^*)=\mathrm{V}^-$, e então $(\neg B)^*=\neg_L B$. Daí, por **Tr 2.** concluímos que $(A\#B)^*\neq(A\#_2B)$, logo $w((A\#B)^*)\in\{\mathrm{V},\ \mathrm{F}\}$ e então procedemos como em **[α.]**;

[γ.] $w((\neg A)^*)=\mathrm{F}$ e $w(B^*)=\mathrm{F}$, caso semelhante a **[β.]**.

[δ.] $w((\neg A)^*)=\mathrm{F}$ e $w((\neg B)^*)=\mathrm{F}$, caso em que, se $w(A^*)=\mathrm{V}$ e $w(B^*)=\mathrm{V}$, procedemos como em **[α.]**, e em caso contrário procedemos como em **[β.]** e **[γ.]**.

d. $\boldsymbol{w(A^*)=\mathrm{F} \Leftrightarrow w((\sim A)^*)=\mathrm{V}}$**.** Por ***b.*** e pelas matrizes de $\mathcal{W}_3$ temos $w(A^*)=\mathrm{F} \Leftrightarrow w((A^\circ)^*)=\mathrm{V}$ e $w((\neg A)^*)=\mathrm{V}$. Lembrando que $\sim A=\neg A\wedge A^\circ$, temos, por **Tr 2.** e pelas matrizes das conjunções, $w((A^\circ)^*)=\mathrm{V}$ e $w((\neg A)^*)=\mathrm{V} \Leftrightarrow w((\sim A)^*)=\mathrm{V}$.

e. $\boldsymbol{w((\sim A)^*)=\mathrm{V} \Leftrightarrow w(\neg_L A^*)=\mathrm{V}}$**;**

$\boldsymbol{w((\sim A)^*)\in\{\mathrm{V},\mathrm{F}\}}$**;** $\boldsymbol{w(\neg_L A^*)\in\{\mathrm{V},\mathrm{F}\}}$**.** De ***a.*** e ***d.***, imediato.

2.3.3.3 Conveniência

Como apenas restringimos o conjunto ***T*** de funções de tradução, ainda continuamos com uma semântica de traduções possíveis **TP** *correta* para C_1, isto é, uma semântica tal que associa apenas valores distinguidos aos teoremas de C_1. Na realidade, neste ponto um resultado mais forte e mais interessante é possível. Como já temos associada a C_1 uma outra semântica, a semântica paraconsistente já exposta, a qual também já sabemos ser correta, poderíamos nos perguntar se não seria possível associar as noções de validade e de modelo em **TP** às noções de validade e de modelo da semântica paraconsistente. Veremos que a resposta é afirmativa.

O que afirmamos é que dada uma função de tradução $*$ e uma valoração w em **TP**, podemos encontrar uma valoração paraconsistente v tal que, para toda fbf F em $\mathrm{FOR}(C_1)$,

$$v(F)=1 \iff w(F^*)\in\{\mathrm{V},\mathrm{V}^-\}.$$ [10]

Temos que construir portanto uma v para cada $*$ e w dadas. A proposta é imediata: consideremos exatamente a função v definida para cada fórmula F em $\mathrm{FOR}(C_1)$ de modo que $v(F)=1$ sse $w(F^*)\in\{\mathrm{V},\mathrm{V}^-\}$, e $v(F)=0$ sse $w(F^*)=\mathrm{F}$. Tudo que temos a fazer agora é verificar que tal v assim definida é uma valoração paraconsistente, isto é, ela atende às condições **val[i]-val[vii]** (vide **2.2**). Vejamos:

val[i] Seja $v(A\wedge B)=1$. Pela definição acima, $v(A\wedge B)=1$ sse $w((A\wedge B)^*)\in\{\mathrm{V},\mathrm{V}^-\}$. Por **Tr 2.**, sabemos que $w((A\wedge B)^*)=w(A^*\wedge_i B^*)$ Mas, pelas matrizes das conjunções, $w(A^*\wedge_i B^*)\in\{\mathrm{V},\mathrm{V}^-\}$ sse $w(A^*)\in\{\mathrm{V},\mathrm{V}^-\}$ e $w(B^*)\in\{\mathrm{V},\mathrm{V}^-\}$. Novamente pela definição acima, temos que $w(A^*)\in\{\mathrm{V},\mathrm{V}^-\}$ e $w(B^*)\in\{\mathrm{V},\mathrm{V}^-\}$ sse $v(A)=1$ e $v(B)=1$, que é justamente o que queríamos demonstrar.

---

[10] Note a semelhança do que está sendo feito aqui com o **Lema II.** das quase-matrizes. (vide **2.2.2**)

val[ii] $v(A \vee B) = 1 \Leftrightarrow$ (pela definição de *v*) $w((A \vee B)^*) \in \{\mathrm{V}, \mathrm{V}^-\} \Leftrightarrow$ (por **Tr 2.**) $w(A^* \vee_j B^*) \in \{\mathrm{V}, \mathrm{V}^-\} \Leftrightarrow$ (pelas matrizes das disjunções) $w(A^*) \in \{\mathrm{V}, \mathrm{V}^-\}$ ou $w(B^*) \in \{\mathrm{V}, \mathrm{V}^-\} \Leftrightarrow$ (def. de *v*) $v(A) = 1$ ou $v(B) = 1$.

val[iii] $v(A \to B) = 1 \Leftrightarrow$ (def. de *v*) $w((A \to B)^*) \in \{\mathrm{V}, \mathrm{V}^-\} \Leftrightarrow$ (por **Tr 2.**) $w(A^* \to_k B^*) \in \{\mathrm{V}, \mathrm{V}^-\} \Leftrightarrow$ (pelas matrizes das implicações) $w(A^*) = \mathrm{F}$ ou $w(B^*) \in \{\mathrm{V}, \mathrm{V}^-\} \Leftrightarrow$ (def. de *v*) $v(A) = 0$ ou $v(B) = 1$.

val[iv] $v(B^\circ) = v(A \to B) = v(A \to \neg B) = 1 \Leftrightarrow$ (def. de *v*) $w((B^\circ)^*) \in \{\mathrm{V}, \mathrm{V}^-\}$ e $w((A \to B)^*) \in \{\mathrm{V}, \mathrm{V}^-\}$ e $w((A \to \neg B)^*) \in \{\mathrm{V}, \mathrm{V}^-\} \Leftrightarrow$ (por **Tr 3.a** e a matriz de $\neg_L$, e por **Tr 2.**) **[**$w(B^* \wedge_3 (\neg B)^*) = \mathrm{F}$ e $w(A^*) = \mathrm{F}$**]** ou **[**$w(B^* \wedge_3 (\neg B)^*) = \mathrm{F}$ e $w(B^*) \in \{\mathrm{V}, \mathrm{V}^-\}$ e $w((\neg B)^*) \in \{\mathrm{V}, \mathrm{V}^-\}$**]** $\Rightarrow$ (def. de *v* e a matriz de $\wedge_3$) $v(A) = 0$.

val[v] $v(A^\circ) = v(B^\circ) = 1 \Leftrightarrow$ (pela definição de *v*) $w((A^\circ)^*) \in \{\mathrm{V}, \mathrm{V}^-\}$ e $w((B^\circ)^*) \in \{\mathrm{V}, \mathrm{V}^-\} \Leftrightarrow$ (pela consequência ***b.*** das novas restrições **Tr**, vide **2.3.3.2**) $[w(A^*) = \mathrm{F}$ ou $w((\neg A)^*) = \mathrm{F}]$ e $[w(B^*) = \mathrm{F}$ ou $w((\neg B)^*) = \mathrm{F}] \Rightarrow$ (pela consequência ***c.*** das novas restrições **Tr**, vide **2.3.3.2**) $w(((A \# B)^\circ)^*) = \mathrm{V}$, onde $\# \in \{\wedge, \vee, \to\} \Rightarrow$ (def. de *v*) $v((A \# B)^\circ) = 1$.

val[vi] $v(A) = 0 \Leftrightarrow$ (def. de *v*) $w(A^*) = \mathrm{F} \Rightarrow$ (pelas matrizes das negações) $w((\neg A)^*) = \mathrm{V} \Rightarrow$ (def. de *v*) $v(\neg A) = 1$.

val[vii] $v(\neg\neg A) = 1 \Leftrightarrow$ (def. de *v*) $w((\neg\neg A)^*) \in \{\mathrm{V}, \mathrm{V}^-\} \Rightarrow$ (pelas matrizes das negações) $w(A^*) \in \{\mathrm{V}, \mathrm{V}^-\} \Leftrightarrow$ (def. de *v*) $v(A) = 1$.

Podemos dizer que com isso demonstramos a *conveniência* da semântica de traduções possíveis às valorações paraconsistentes. Observe que foram necessárias na prova todas as segundas restrições que definimos ao longo da demonstração da corretude desta semântica (vide **2.3.3.1**) – mas as restrições adotadas em definitivo (vide **2.3.3.2**) já foram suficientes.

Afirmamos, contudo, que a conveniência é um resultado *mais forte* do que a corretude, pois daquele resulta este como um corolário. De fato, seja F um teorema de C_1. Como conhecemos a corretude da semântica paraconsistente, sabemos então que F é válido, isto é, que $v(F)=1$ para toda valoração paraconsistente v. Mas acabamos de mostrar que, dadas uma função de tradução $*$ e uma valoração w em **TP** tal que $w(F^*)\in\{V, V^-\}$ podemos definir uma valoração v_1 tal que $v_1(F)=1 \;\Leftrightarrow\; w(F^*)\in\{V, V^-\}$. Já sabemos que, neste caso, como F é teorema, $v(F)=1$, para todo v e em particular para v_1. Temos portanto $w(F^*)\in\{V, V^-\}$.

2.3.3.4 Representabilidade

Ainda mais interessante, e árdua tarefa, é mostrar a "recíproca" do teorema anterior. Propomos mais uma vez buscar um modo de associar a semântica paraconsistente à semântica de traduções possíveis, suas noções de validade e de modelo, desta vez porém no sentido inverso. O que afirmamos agora é que dada uma valoração paraconsistente v podemos encontrar uma função de tradução $*$ e uma valoração w em **TP** tais que, para toda fbf F de $L(C_1)$,

$$w(F^*)\in\{V, V^-\} \;\Leftrightarrow\; v(F)=1.$$ [11]

Temos que construir portanto uma $*$ e uma w para cada v dada. Em Carnielli & Marcos (199?a) aprendemos como fazê-lo.

Dada uma valoração paraconsistente v definimos, segundo **Tr 1.a**, $\boldsymbol{p^*=p}$ e definimos w, para cada variável atômica p de $L(\mathcal{W}_3)$, por

(i) $w(p^*)=V$ sse $v(\neg p)=0$;

(ii) $w(p^*)=V^-$ sse $v(p)=1$ e $v(\neg p)=1$;

(iii) $w(p^*)=F$ sse $v(p)=0$.

É claro que $w(p^*)\in\{V, V^-\} \;\Leftrightarrow\; v(p)=1$.

Definimos agora, segundo **Tr 1.b**, $(\neg p)^*=\neg_C p$. É imediato verificar que $w((\neg p)^*)\in\{V, V^-\} \;\Leftrightarrow\; v(\neg p)=1$.

Suponhamos, como hipótese de indução **(HI)**, que para todas as fórmulas F de comprimento menor ou igual a n valha $w(F^*)\in\{V, V^-\} \;\Leftrightarrow\; v(F)=1$, e

---

[11] Note a semelhança do que está sendo feito aqui com o **Lema I.** das quase-matrizes. (vide **2.2.2**)

mostremos como definir $*$ para as fórmulas de comprimento maior do que n de modo que esta propriedade ainda seja válida.

Tomando $\# \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, definamos, segundo **Tr 2.**, $(A \# B)^* = A^* \#_3 B^*$ se $B = \neg A$; $(A\#B)^* = A^* \#_1 B^*$, se $(\neg A)^* = \neg_C A^*$ e $(\neg B)^* = \neg_L B^*$; $(A\#B)^* = A^* \#_2 B^*$, se $(\neg A)^* = \neg_L A^*$ e $(\neg B)^* = \neg_C B^*$; $(A \# B)^* = A^* \#_3 B^*$, nos demais casos. Usando **(HI)**, é fácil ver que ainda temos $w((A \# B)^*) \in \{V, V^-\} \Leftrightarrow v(A \# B) = 1$.

Consideremos agora uma fórmula do tipo B°, e definamos, segundo **Tr 3.a**, $(\neg(B \wedge \neg B))^* = \neg_L (B \wedge \neg B)^*$. Ora, por **(HI)** temos $w((B \wedge \neg B)^*) \in \{V, V^-\} \Leftrightarrow v(B \wedge \neg B) = 1$. Mas as condições sobre as valorações de C_1 nos informam tanto que $v(B \wedge \neg B) = 1 \Leftrightarrow v(B) = 1$ e $v(\neg B) = 1$, quanto que $v(B) = 1$ e $v(\neg B) = 1 \Leftrightarrow v(B^\circ) = 0$. Logo, temos $w((B \wedge \neg B)^*) \in \{V, V^-\} \Leftrightarrow v(B^\circ) = 0$, e daí, pela definição acima, $w((B^\circ)^*) \in \{V, V^-\} \Leftrightarrow v(B^\circ) = 1$.

No próximo passo, tomamos uma fórmula do tipo $\neg(A \# B)$, mas não do tipo A°, onde $\# \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$. Temos que analisar vários subcasos, segundo os valores atribuídos por v a A e a B:

- $\boldsymbol{v(A) \neq v(\neg A)}$ **e** $\boldsymbol{v(B) \neq v(\neg B)}$. Como consequência imediata das valorações paraconsistentes para C_1, temos $v(A \# B) \neq v(\neg(A \# B))$. Notemos que, de **(HI)**, temos $v(A) \neq v(\neg A) \Leftrightarrow$ **[** $w(A^*) \in \{V, F\}$ **]** ou **[** $w(A^*) = V^-$ e $(\neg A)^* = \neg_L A^*$ **]** (e o mesmo vale para B). Logo, definimos neste caso $(\neg(A\#B))^* = \neg_L (A\#B)^*$, o que dá conta de **Tr 3.b** e de uma parte de **Tr 3.c**.
- $\boldsymbol{v(A) = v(\neg A)}$ **e** $\boldsymbol{v(B) \neq v(\neg B)}$. Por **(HI)**, de $v(A) = v(\neg A) = 1$ temos $w(A^*) \in \{V, V^-\}$ e $w((\neg A)^*) \in \{V, V^-\}$, logo $w(A^*) = V^-$ e $(\neg A)^* = \neg_C A^*$. Temos também, de $v(B) \neq v(\neg B)$, que **[** $w(B^*) = F$ ou $w((\neg B)^*) = F$ **]**.

  Subsubcasos:

  - se $\boldsymbol{(\neg B)^* = \neg_C B^*}$, então, $w(B^*) \in \{V, F\}$, e como neste caso, novamente por **(HI)**, $(A\#B)^* = A^* \#_3 B^*$, temos, pelas tabelas de $\mathcal{W}_3$, $w((A\#B)^*) \in \{V^-, F\}$.

- se $(\neg \boldsymbol{B})^* = \neg_L \boldsymbol{B}^*$, temos, por **(HI)**, $(A\#B)^* = A^* \#_1 B^*$. Logo, como $w(A^*) = V^-$ obtemos mais uma vez, pelas tabelas de $\mathcal{W}_3$, $w((A\#B)^*) \in \{V^-, F\}$.

Nos dois subsubcasos acima, definimos $(\neg(A\#B))^* = \neg_C(A\#B)^*$ caso $v(A\#B) = 1$ e $v(\neg(A\#B)) = 1$; caso contrário, definimos $(\neg(A\#B))^* = \neg_L(A\#B)^*$.

- Nos dois casos restantes, nos quais temos $\boldsymbol{v(A) \neq v(\neg A)}$, procedemos de maneira análoga ao subcaso acima, e com isso concluímos nossa definição deste caso, respeitando **Tr 3.c**.

Como consequência, temos $w((\neg(A\#B))^*) \in \{V, V^-\} \Leftrightarrow v(\neg(A\#B)) = 1$.

Finalmente, tomando uma fórmula do tipo $\neg\neg A$, definimos $(\neg\neg A)^* = \neg_L(\neg A)^*$ se $v(\neg A) \neq v(\neg\neg A)$, e $(\neg\neg A)^* = \neg_C(\neg A)^*$ em caso contrário, definições sancionadas por **Tr 4.** e que, como é fácil ver, garantem que $w((\neg\neg A)^*) \in \{V, V^-\} \Leftrightarrow v(\neg\neg A) = 1$.

Note que a definição de $*$ em nenhum momento entra em conflito com as restrições **Tr**, pois não as contraria, somente as restringe um pouco mais de modo a atender a este caso específico, de modo a acompanhar o comportamento desta v específica dada. Podemos dizer que o resultado acima nos mostra a *representabilidade* das valorações paraconsistentes por meio da semântica de traduções possíveis exposta.

2.3.3.5 Completude

Assim como a conveniência, a representabilidade é um resultado muito forte. A partir dele resulta como corolário, por exemplo, a completude da semântica de traduções possíveis.

De fato, já sabemos da completude da semântica paraconsistente, isto é, já sabemos que toda fórmula válida nesta semântica é um teorema de C_1. Seja então F uma fórmula válida em **TP**, isto é uma fórmula tal que $w(F^*) \in \{V, V^-\}$ para toda função de tradução $*$ e para toda valoração w em **TP**. Acabamos de mostrar que, dada uma valoração paraconsistente v podemos encontrar $*_1$ e w_1 em **TP** tais que $w_1(F^{*_1}) \in \{V, V^-\} \Leftrightarrow v(F)=1$. Como F é válida em **TP** temos $w(F^*) \in \{V, V^-\}$, para todo $*$ e todo w, e em particular para $*_1$ e w_1. Temos portanto $v(F)=1$, donde concluímos finalmente, pela completude da semântica paraconsistente, que F é teorema de C_1.

É claro que uma demonstração direta da completude da semântica de traduções possíveis, sem o passo intermediário da semântica paraconsistente, é possível, mas pode ser uma tarefa ingrata. Observe que não se trata de mostrar que C_1 "axiomatiza" as matrizes de $\mathcal{W}_3$, o que já poderia ser bem difícil: são os axiomas de J_3 que "axiomatizam" estas matrizes. Trata-se, isso sim, de mostrar que C_1 "axiomatiza **um certo fragmento**" de J_3, fragmento este definido exatamente pelo conjunto $\boldsymbol{T}$ de todas as funções de tradução.

2.3.3.6 Um novo procedimento de decisão

Para tratar de C_1 e decidir quais de suas fórmulas são teoremas, temos agora, finalmente, matrizes. Agora o procedimento mecânico, e verofuncional, de verificação é o seguinte: dada uma fórmula de C_1, fazemos todas as suas traduções possíveis, isto é, coletamos todas as diferentes imagens que podem ser produzidas desta fórmula segundo as funções de tradução do conjunto $\boldsymbol{T}$; em seguida as testamos usando as matrizes de $\mathcal{W}_3$. Nada mais fácil… Bem, lembremos que este conjunto de traduções possíveis pode ser gigantesco! Um bom trabalho para uma máquina.

Podemos eventualmente diminuir o trabalho se levarmos em conta a consequência ***e.*** das novas restrições **Tr** (vide **2.3.3.2**), segundo a qual ambas as negações ~ e $\neg_L$ produzem o mesmo efeito. Isso não surpreende, pois o esperado é justamente que ambas tenham comportamento clássico (vide **2.1.1** e **2.3.1**). Ocorre que a negação forte, ~, é uma abreviação para uma fórmula da linguagem, qual seja, $\sim A = \neg A \wedge \neg(A \wedge \neg A)$, a qual pelas restrições **Tr** pode vir a ser traduzida em até seis formas diferentes: $\{\neg_L A^* \wedge_1 \neg_L(A^* \wedge_3 \neg_L A^*),\ \neg_C A^* \wedge_1 \neg_L(A^* \wedge_3 \neg_C A^*),\ \neg_L A^* \wedge_2 \neg_L(A^* \wedge_3 \neg_L A^*),\ \neg_C A^* \wedge_2 \neg_L(A^* \wedge_3 \neg_C A^*),\ \neg_L A^* \wedge_3 \neg_L(A^* \wedge_3 \neg_L A^*),\ \neg_C A^* \wedge_3 \neg_L(A^* \wedge_3 \neg_C A^*)\}$. Por conseguinte, obteríamos uma boa vantagem computacional se acrescêssemos ao estoque de restrições **Tr** já disponíveis a seguinte restrição:

Tr ~. para fórmulas do tipo $\sim A$: $(\sim A)^* = \neg_L A^*$.

Uma outra economia de recursos computacionais sem maior significado teórico nos é sugerida imediatamente se reparamos que os conectivos de $\mathcal{W}_3$ *estendem* os conectivos clássicos, isto é, a restrição do domínio dos conectivos de $\mathcal{W}_3$ ao conjunto $\{\mathrm{V}, \mathrm{F}\}$ resulta nos conectivos clássicos.[12] Ora, caso desejemos interpretar uma fórmula *F* cujas subfórmulas sejam sempre do tipo $(A \wedge B)$, ou do tipo $(A \vee B)$, ou do tipo $(A \rightarrow B)$, ou do tipo $\sim A$, então podemos usar diretamente as matrizes do cálculo proposicional clássico.

Observamos ainda que, se uma dada subfórmula *G* da fórmula *F* que queremos testar é da forma $(A \# B)$, onde $\# \in \{\wedge, \ \vee, \ \rightarrow\}$, mas *G* não aparece simultaneamente no interior de uma subfórmula negada de *F*, então não há necessidade de avaliarmos a tradução da negação de *A* e de *B* para decidirmos a tradução de #, como nos ensina **Tr 2.**, já que $(A^* \#_1 B^*)$, $(A^* \#_2 B^*)$ e $(A^* \#_3 B^*)$ são todas fórmulas equivalentes em $\mathcal{W}_3$. Neste caso basta tomar qualquer uma delas como a tradução de *G* (estipulemos a terceira).

Exemplos.[13]

a) $\nvdash \boldsymbol{p \rightarrow \neg\neg p}$.

Segundo as restrições **Tr** e a última observação acima, são duas as traduções possíveis para esta fórmula:

➊ $p \rightarrow_3 \neg_L \neg_C p$;

➋ $p \rightarrow_3 \neg_C \neg_C p$.

$\boldsymbol{p}$	$\neg_C \boldsymbol{p}$	$\neg_L \neg_C \boldsymbol{p}$	$\neg_C \neg_C \boldsymbol{p}$	➊	➋
V	F	V	V	V	V
V^-	V^-	F	V^-	**F**	V^-
F	V	F	F	V	V

Tomando a tradução ➊ e $w(p)=\mathrm{V}^-$ vemos logo porque a fórmula acima não é válida em **TP**.

---

[12] Isso é verdade não apenas para as matrizes dos conectivos de $\mathcal{W}_3$ mas também, de modo geral, para *todas* as matrizes definíveis em $\mathcal{W}_3$. Vide o apêndice **ω+ω, Da capacidade de expressão de** $\boldsymbol{Ł_3}$**,** $\boldsymbol{J_3}$ **e** $\mathcal{W}_3$.

[13] É instrutivo comparar **a)** a **d)** com **2.2.2.1**.

b) $\nvdash \neg(\boldsymbol{p} \wedge \neg \boldsymbol{p})$;

$\vdash \boldsymbol{p}^{\circ} \rightarrow (\neg \boldsymbol{p})^{\circ}$.

A primeira fórmula possui somente uma tradução possível, qual seja:

1.1 $\neg_L(p \wedge_3 \neg_C p)$.

Podemos testar a sua validade:

Já a segunda fórmula possui duas traduções possíveis:

2.1 $\neg_L(p \wedge_3 \neg_C p) \rightarrow_3 \neg_L(\neg_C p \wedge_3 \neg_L \neg_C p)$;

2.2 $\neg_L(p \wedge_3 \neg_C p) \rightarrow_3 \neg_L(\neg_C p \wedge_3 \neg_C \neg_C p)$.

$\boldsymbol{p}$	**1.1**	**2.1**	**2.2**
V	V	**V**	**V**
V^-	**F**	**V**	**V**
F	V	**V**	**V**

c) $\vdash \boldsymbol{p}^{\circ} \rightarrow \boldsymbol{p}^{\square}$

$\nvdash \boldsymbol{p}^{\square} \rightarrow \boldsymbol{p}^{\circ}$

A única tradução possível de $\boldsymbol{p}^{\circ}$ é $\neg_L(p \wedge_3 \neg_C p)$, como já vimos acima. As traduções possíveis de $\boldsymbol{p}^{\square}$ são:

$$\neg_L(\neg_C p \wedge_1 p) \qquad \neg_C(\neg_C p \wedge_1 p)$$
$$\neg_L(\neg_C p \wedge_2 p) \qquad \neg_C(\neg_C p \wedge_2 p)$$
$$\neg_L(\neg_C p \wedge_3 p) \qquad \neg_C(\neg_C p \wedge_3 p)$$

Para obter as 6 traduções possíveis de cada uma das fórmulas acima o leitor saberá combinar as traduções de suas partes. A fórmula $p^{\square} \rightarrow p^{\circ}$ falha, por exemplo, quando a traduzimos por $\neg_C(\neg_C p \wedge_3 p) \rightarrow \neg_L(p \wedge_3 \neg_C p)$, e tomamos $w(p)=V^-$.

É notável que estas 6 traduções possíveis só produzam 2 matrizes diferentes. De fato, neste caso específico cada uma das três conjunções possíveis em $p^{\square}$ tem igual efeito sobre o resultado final. As traduções de $p^{\square}$ poderiam ter sido, portanto, apenas duas, tais como:

$$\neg_L(\neg_C p \wedge_3 p) \qquad \neg_C(\neg_C p \wedge_3 p)$$

A rigor, poderíamos sempre inserir novas “regras de economia” de modo a eliminar as matrizes repetidas, sem prejuízo ao procedimento de decisão.

d) $\nvDash \neg(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \equiv \neg(\boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{p})$

Com duas negações e três disjunções, temos 6 traduções possíveis para $\neg(p \vee q)$ e 6 também para $\neg(q \vee p)$. Notando que 3 delas (aquelas em que a negação é interpretada localmente) produzem matrizes idênticas, adotamos uma delas (estipulemos, a terceira disjunção) e abandonamos as outras duas.

Temos portanto $(4 \times 4 =) 16$ traduções possíveis para a sentença acima:

1 $\neg_L(p \vee_3 q) \equiv \neg_L(q \vee_3 p)$

2 $\neg_L(p \vee_3 q) \equiv \neg_C(q \vee_1 p)$

3 $\neg_L(p \vee_3 q) \equiv \neg_C(q \vee_2 p)$

4 $\neg_L(p \vee_3 q) \equiv \neg_C(q \vee_3 p)$

5 $\neg_C(p \vee_1 q) \equiv \neg_L(q \vee_3 p)$

6 $\neg_C(p \vee_1 q) \equiv \neg_C(q \vee_1 p)$

7 $\neg_C(p \vee_1 q) \equiv \neg_C(q \vee_2 p)$

8 $\neg_C(p \vee_1 q) \equiv \neg_C(q \vee_3 p)$

9 $\neg_C(p \vee_2 q) \equiv \neg_L(q \vee_3 p)$

10 $\neg_C(p \vee_2 q) \equiv \neg_C(q \vee_1 p)$

11 $\neg_C(p \vee_2 q) \equiv \neg_C(q \vee_2 p)$

12 $\neg_C(p \vee_2 q) \equiv \neg_C(q \vee_3 p)$

13 $\neg_C(p \vee_3 q) \equiv \neg_L(q \vee_3 p)$

14 $\neg_C(p \vee_3 q) \equiv \neg_C(q \vee_1 p)$

15 $\neg_C(p \vee_3 q) \equiv \neg_C(q \vee_2 p)$

16 $\neg_C(p \vee_3 q) \equiv \neg_C(q \vee_3 p)$

E o resultado será:

p	***q***	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V^-	V	V	**F**	**F**	V	V	**F**	**F**	**F**	**F**	V^-	V^-	**F**	**F**	V^-	V^-
V	F	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V^-	V	V	**F**	V	**F**	**F**	V^-	**F**	V^-	V	**F**	V	**F**	**F**	V^-	**F**	V^-
V^-	V^-	V	**F**	**F**	**F**	**F**	V^-	V^-	V^-	**F**	V^-	V^-	V^-	**F**	V^-	V^-	V^-
V^-	F	V	**F**	V	**F**	**F**	V^-	**F**	V^-	V	**F**	V	**F**	**F**	V^-	**F**	V^-
F	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V^-	V	V	**F**	**F**	V	V	**F**	**F**	**F**	**F**	V^-	V^-	**F**	**F**	V^-	V^-
F	F	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V

e) **(RA):** $(\boldsymbol{p}\rightarrow\boldsymbol{q})\rightarrow((\boldsymbol{p}\rightarrow\neg\boldsymbol{q})\rightarrow\neg\boldsymbol{p})$ *não é* teorema de C_1 (vide **2.1.1**). A única tradução possível, dadas as nossas simplificações anteriores, $(p\rightarrow_3 q)\rightarrow_3 ((p\rightarrow_3\neg_C q)\rightarrow_3\neg_C p)$, falha quando $w(p)$=V e $w(q)$=V$^-$.

f) $(\boldsymbol{p}\vee{\sim}\boldsymbol{p})$, $(\boldsymbol{p}\rightarrow{\sim}{\sim}\boldsymbol{p})$, ${\sim}(\boldsymbol{p}\rightarrow\boldsymbol{q})\rightarrow\boldsymbol{p}$, $(\boldsymbol{p}\rightarrow\boldsymbol{q})\rightarrow((\boldsymbol{p}\rightarrow{\sim}\boldsymbol{q})\rightarrow{\sim}\boldsymbol{p})$, ${\sim}(\boldsymbol{p}\wedge{\sim}\boldsymbol{p})$ e $(\boldsymbol{p}\wedge{\sim}\boldsymbol{p})\rightarrow\boldsymbol{q}$ *são* todos teoremas de C_1 (vide **2.1.1*c***). Usando a nova restrição, **Tr ~.**, temos em cada caso apenas 1 possibilidade a testar nas matrizes de $\mathcal{W}_3$. Para testar estas proposições podemos ainda usar diretamente as matrizes do cálculo proposicional clássico.

2.3.3.7 Novo?

Vimos que a semântica de traduções possíveis para C_1 já traz pegada a si um procedimento de decisão. Não se trata de algo à parte, como o procedimento de quase-matrizes para a semântica paraconsistente – vide os **Lemas I** e **II**, **2.2.2**. Já chamamos a atenção também à semelhança dos lemas das quase-matrizes com as provas da conveniência e da representabilidade da semântica de traduções possíveis. Recapitulamos. Dada uma fórmula *F* de FOR(C_1):

Lema I. Para cada valoração paraconsistente *v*, existe uma linha *k* da quase-matriz para *F*, $\boldsymbol{QM}_F$, que corresponde a esta valoração.

Lema II. Para cada linha *k* de $\boldsymbol{QM}_F$ existe uma valoração paraconsistente *v* que a ela corresponde.

Conveniência. Para cada valoração *w* em **TP** e cada função de tradução $*$ em ***T*** existe uma valoração paraconsistente *v* que "faz o mesmo trabalho", ou seja, tal que $w((.)*)$ e *v* atribuem valores distinguidos e não-distinguidos exatamente às mesmas subfórmulas de *F*.

Representabilidade. Para cada valoração paraconsistente *v*, existem uma valoração *w* em **TP** e uma função de tradução $*$ em ***T*** que "fazem o mesmo trabalho".

É importante ressaltar que todos os resultados acima são construtivos. Combinando estes resultados temos portanto, para cada fórmula de FOR(C_1), uma forma de mapear sua quase-matriz e a tabela que produzimos ao verificar suas traduções possíveis segundo as matrizes de $\mathcal{W}_3$. Claro, pois pela **conveniência** e pelo **Lema I**, podemos passar de uma função de tradução $*$ em ***T*** e uma valoração *w* em **TP** para uma linha *k* de $\boldsymbol{QM_F}$. Reciprocamente, pelo **Lema II** e pela **representabilidade**, podemos passar de uma linha *k* de $\boldsymbol{QM_F}$ a uma função de tradução $*$ em ***T*** e uma valoração *w* em **TP**.

Exemplos.

- Consideremos novamente a fórmula do exemplo **a)** em **2.2.2.1** e em **2.3.3.6**:

$$\nvdash \boldsymbol{p} \rightarrow \neg\neg \boldsymbol{p}\,.$$

Quase-matriz:

p	$\neg p$	$\neg\neg p$	$p \rightarrow \neg\neg p$	
0	1	0	1	*1*
1	0	1	1	*2*
	1	0	0	*3*
		1	1	*4*

Semântica de traduções possíveis:

p	$\neg_C p$	$\neg_L \neg_C p$	$\neg_C \neg_C p$	𝟙	𝟚	
V	F	V	V	V	V	❶
V^-	V^-	F	V^-	F	V^-	❷
F	V	F	F	V	V	❸

Podemos agora partir de cada linha da quase-matriz e encontrar a valoração e a tradução possível correspondentes na semântica de traduções possíveis:

k	*w*	$*$
1	❸	𝟙
2	❶	𝟙
3	❷	𝟙
4	❷	𝟚

Reciprocamente, a partir de uma valoração e uma tradução possível em **TP** podemos encontrar a linha correspondente na quase-matriz:

k		$*$: 𝟙	$*$: 𝟚
w	❶	*2*	*2*
	❷	*3*	*4*
	❸	*1*	*1*

- Consideremos agora a fórmula do exemplo **d)** em **2.2.2.1** e em **2.3.3.6**:

$$\nvdash \neg(p \vee q) \equiv \neg(q \vee p).$$

Quase-matriz:

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$	$\neg p$	$\neg q$	$\boxed{1}$ $\neg(p \vee q)$	$\boxed{2}$ $\neg(q \vee p)$	$1 \equiv 2$	
0	0	0	0	1	1	1	1	1	*1*
0	1	1	1	1	0	0	0	1	*2*
					1	0	0	1	*3*
							1	0	*4*
						1	0	0	*5*
							1	1	*6*
1	0	1	1	0	1	0	0	1	*7*
				1	1	0	0	1	*8*
							1	0	*9*
						1	0	0	*10*
							1	1	*11*
				0	0	0	0	1	*12*
					1	0	0	1	*13*
							1	0	*14*
						1	0	0	*15*
							1	1	*16*
1	1	1	1	1	0	0	0	1	*17*
							1	0	*18*
						1	0	0	*19*
							1	1	*20*
					1	0	0	1	*21*
							1	0	*22*
						1	0	0	*23*
							1	1	*24*

***w** e * correspondentes:*

k	*w*	*
1	❾	1
2	❼	1
3	❽	1
4	❽	3
5	❽	3
6	❽	11
7	❸	1
8	❻	1
9	❻	2
10	❻	2
11	❻	6
12	❶	1
13	❷	1
14	❷	3
15	❷	3
16	❷	11
17	❹	1
18	❹	2
19	❹	2
20	❹	6
21	❺	1
22	❺	4
23	❺	4
24	❺	16

Semântica de traduções possíveis:

(excluídas as colunas repetidas, para simplificar)

p	q	1	2	3	4	6	7	8	11	12	16	
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	❶
V	V^-	V	V	F	F	V	F	F	V^-	V^-	V^-	❷
V	F	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	❸
V^-	V	V	F	V	F	V^-	F	V^-	V	F	V^-	❹
V^-	V^-	V	F	F	F	V^-	V^-	V^-	V^-	V^-	V^-	❺
V^-	F	V	F	V	F	V^-	F	V^-	V	F	V^-	❻
F	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	❼
F	V^-	V	V	F	F	V	F	F	V^-	V^-	V^-	❽
F	F	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	❾

***k** correspondente:*

w \ *	1	2	3	4	6	7	8	11	12	16
❶	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
❷	13	13	14	14	13	15	15	16	16	16
❸	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
❹	17	18	17	18	20	19	20	17	18	20
❺	21	22	22	22	24	24	24	24	24	24
❻	8	9	8	9	11	10	11	8	9	11
❼	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
❽	3	3	4	4	3	5	5	6	6	6
❾	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

2.3.4 O que é uma semântica de traduções possíveis?

Acabamos de fornecer uma semântica de traduções possíveis correta e completa para C_1. Baseados nesta experiência proporemos a seguir uma primeira definição para as semânticas deste gênero.

Consideremos por um lado um cálculo lógico S, do qual conhecemos a sintaxe e buscamos uma semântica – denominaremos este cálculo S *interpretável*. Consideremos por outro lado um conjunto $\boldsymbol{T}$ de funções de tradução, funções $*$ indexadas pelos elementos de $|\boldsymbol{T}|$ e que têm como domínio comum as fbfs do cálculo S. Cada função $*_t$, $t \in |\boldsymbol{T}|$, terá como contradomínio as fbfs de um cálculo lógico $\mathcal{R}_t$, do qual conhecemos a interpretação, isto é, no qual já está definida, por exemplo, as noções de valoração, validade, modelo e consequência semântica – esta última a ser denotada por $\vDash_t$. Denominaremos cada cálculo $\mathcal{R}_t$, $t \in |\boldsymbol{T}|$, um *interpretante*. Uma *semântica de traduções possíveis para* S é o par $\mathbf{TP} = < \{\mathcal{R}_t\}_{t \in |\boldsymbol{T}|},\ \boldsymbol{T} >$. As noções semânticas serão como que "transferidas" dos cálculos interpretantes para **TP**; em particular, o que denominaremos uma valoração em **TP** não será nada mais do que uma valoração em algum $\mathcal{R}_t$.

Dados um conjunto de fórmulas $\Gamma \cup \{A\}$ em $\text{For}(S)$ e uma função de tradução $*_t$ em $\boldsymbol{T}$, definimos para S a relação de *forçamento local*, $\vDash^t_{\mathbf{TP}}$, por

$$\Gamma \vDash^t_{\mathbf{TP}} A \Leftrightarrow \Gamma^{*_t} \vDash_t A^{*_t}.$$

Lemos $\Gamma \vDash^t_{\mathbf{TP}} A$ como "Γ força A sob a tradução $*_t$". Definimos para S a relação de *forçamento global*, $\vDash_{\mathbf{TP}}$, por

$$\Gamma \vDash_{\mathbf{TP}} A \Leftrightarrow \Gamma \vDash^t_{\mathbf{TP}} A, \text{ para toda } *_t \text{ em } \boldsymbol{T}.$$

Lemos $\Gamma \vDash_{\mathbf{TP}} A$ como "Γ força A em **TP**". Caso o conjunto Γ de fórmulas seja vazio, lemos $\vDash^t_{\mathbf{TP}} A$ como "A é válido sob a tradução $*_t$", ou "A é *possivelmente válido*", e lemos $\vDash_{\mathbf{TP}} A$ como "A é válido em **TP**", ou "A é *necessariamente válido*".

Mostrar que uma semântica de traduções possíveis para S é fortemente correta e completa – podemos dizer, simplesmente, *característica* – é mostrar que

$$\Gamma \vdash A \Leftrightarrow \Gamma \vDash_{\mathbf{TP}} A.$$

Mais adiante (vide **...**: **Fatoração**) nos perguntaremos sobre como generalizar as definições introduzidas acima. Outros interessantes aspectos se destacam ao investigarmos a noção de *tradução entre sistemas lógicos*, e é sobre essa noção que discorreremos brevemente a seguir.

2.3.4.1 Uma tradução é uma tradução é uma tradução

Um conceito geral de traduções entre sistemas lógicos vem sendo estudado e apresentado nos últimos anos pelo Grupo de Lógica Teórica e Aplicada da Unicamp. Para os principais problemas e resultados, bem como um histórico desta noção, vide da Silva *et al.*, 1998, Carnielli & D'Ottaviano, 1997, e Feitosa, 1997.

Uma lógica L é definida aqui de uma maneira bastante geral, como um conjunto, $\boldsymbol{L}$, dotado de um operador de consequência (fecho), $\mathbf{C}$. Assim, L é o par $<\boldsymbol{L},\ \mathbf{C}>$, e $\mathbf{C}$: $\wp(\boldsymbol{L}) \rightarrow \wp(\boldsymbol{L})$ é uma função tal que, para quaisquer $A, B \subseteq \boldsymbol{L}$, vale:

(i) $A \subseteq \mathbf{C}(A)$;

(ii) se $A \subseteq B$, então $\mathbf{C}(A) \subseteq \mathbf{C}(B)$;

(iii) $\mathbf{C}(\mathbf{C}(A)) \subseteq \mathbf{C}(A)$.

Dadas duas lógicas $\mathsf{L}_1 = <\boldsymbol{L}_1,\ \mathbf{C}_1>$ e $\mathsf{L}_2 = <\boldsymbol{L}_2,\ \mathbf{C}_2>$, uma *tradução de* L_1 *em* L_2 é uma função $*$, dita *contínua*, de $\boldsymbol{L}_1$ em $\boldsymbol{L}_2$ tal que, para todo subconjunto $\Gamma \cup A$ de $\boldsymbol{L}_1$,

$$\textbf{(1)} \qquad A \in \mathbf{C}_1(\Gamma) \ \Rightarrow\ A^* \in \mathbf{C}_2(\Gamma^*).$$

No caso particular em que $\boldsymbol{L}_1$ e $\boldsymbol{L}_2$ representam, respectivamente, o conjunto das fórmulas dos cálculos lógicos S_1 e S_2, e além disso $\mathbf{C}_1$ e $\mathbf{C}_2$ representam, respectivamente, suas relações de consequência sintática, $\vdash_1$ e $\vdash_2$, então uma tradução $*$ é uma função tal que, para todo $\Gamma \cup A \subseteq \boldsymbol{L}_1$,

$$\Gamma \vdash_1 A \ \Rightarrow\ \Gamma^* \vdash_2 A^*.$$

Dizemos neste caso que se trata de uma *tradução sintática* entre estes dois cálculos. De modo semelhante, para as relações de consequência semântica podemos definir uma *tradução semântica*.

Algumas consequências triviais desta definição de tradução são: a composição de traduções é uma tradução e é uma operação associativa; a identidade entre lógicas é uma tradução e é uma unidade para a composição de traduções. É imediato constatar também que a demonstração de que um cálculo lógico possui uma semântica com relação à qual ele é fortemente correto, isto é,

$$\Gamma \vdash A \ \Rightarrow\ \Gamma \vDash A\,,$$

nada mais é do que um caso particular de tradução, em que tomamos a função que leva cada fórmula ao seu exato correspondente na estrutura, e de um lado a relação de consequência sintática e do outro a de consequência semântica. No sentido contrário, a demonstração da completude forte de uma dada semântica a um cálculo lógico também é um caso de tradução.

Uma tradução é dita *conservativa* se vale igualmente a recíproca da definição **(1)** acima, isto é,

$$\textbf{(2)} \qquad A \in \mathbf{C}_1(\Gamma) \ \Leftrightarrow\ A^* \in \mathbf{C}_2(\Gamma^*)\,,$$

ou ainda, no caso particular da *tradução conservativa sintática*,

$$\Gamma \vdash_1 A \ \Leftrightarrow\ \Gamma^* \vdash_2 A^*.$$

A demonstração de que uma dada semântica é característica a um dado cálculo, isto é, que ela é fortemente correta e completa com relação a este cálculo, faz uso, como é claro, de uma tradução conservativa bastante específica.

Dizemos que uma tradução $*$ de L_1 em L_2 é *gramatical* (cf. Epstein, cap.X, 1990), ou *esquemática*, se existem esquemas de fórmulas de $\boldsymbol{L}_2$ que definem o valor de $*$ para cada fórmula atômica de $\boldsymbol{L}_1$ e para cada conectivo # de $\boldsymbol{L}_1$, sendo $*$ definida indutivamente para fórmulas cujo símbolo principal é #. Assim, se a linguagem de $\boldsymbol{L}_1$ conta com as variáveis p_0, p_1, … e com os conectivos $\#_k$, $k \in K$, cuja aridade é denotada por $ar(k)$, há esquemas 🌢 e 💣$_k$, $k \in K$, em $\boldsymbol{L}_2$ tais que

$$p_i^* \ \overset{\text{def}}{=}\ \text{🌢}(p_i)\,;$$

$$(\#_k(A_1, \ldots, A_{ar(k)}))^* \ \overset{\text{def}}{=}\ \text{💣}_k(A_1^*, \ldots, A_{ar(k)}^*)\,.$$

Além disso, se $\boldsymbol{L}_1$ e $\boldsymbol{L}_2$ têm o mesmo conjunto de variáveis, e 🌢 é a função identidade, dizemos que a tradução $*$ é *literal relativamente a variáveis*. E se $*$ leva cada conectivo a ele próprio dizemos que $*$ é *homofônica*.

Duas lógicas L_1 e L_2 são ditas *duais* (cf. Queiroz, 1997) se existe uma tradução $*$ bijetora, conservativa, gramatical e literal relativamente a variáveis entre $\boldsymbol{L}_1$ e $\boldsymbol{L}_2$.

2.3.4.2 Traduções e a nova semântica para C_1

Retomemos agora a semântica de traduções possíveis que fornecemos para C_1. Aqui o cálculo interpretável é C_1 e há um único cálculo interpretante: $\mathcal{W}_3$ (vide **2.3.1** e **2.3.3.2**). Da demonstração da conveniência da semântica de traduções possíveis às valorações paraconsistentes (vide **2.3.3.3**), sabemos que, para toda fórmula A de C_1,

$$\Gamma \vDash A \Rightarrow \Gamma \vDash_{\mathbf{TP}} A.$$

Lembremos que, por definição, temos **(i)** $\Gamma \vDash_{\mathbf{TP}} A \iff \Gamma \vDash^{*}_{\mathbf{TP}} A$, para toda $*$ em $\boldsymbol{T}$, e **(ii)** para cada $*$ em $\boldsymbol{T}$, temos $\Gamma \vDash^{*}_{\mathbf{TP}} A \iff \Gamma^* \vDash_3 A^*$, onde $\vDash_3$ é a relação de consequência semântica em $\mathcal{W}_3$. Logo, para cada $*$ temos $\Gamma \vDash A \Rightarrow \Gamma^* \vDash_3 A^*$, isto é, cada função de tradução $*$ *é* uma tradução de C_1 em $\mathcal{W}_3$, no sentido em que acabamos de precisar em **2.3.4.1**. Além disso, das restrições **Tr** sabemos que cada $*$ é gramatical e literal relativamente a variáveis.

Ao usar $\mathcal{W}_3$, ao invés de $\mathcal{J}_3$, garantimos ainda uma certa homofonia a cada $*$: pelas restrições **Tr**, cada negação de C_1 é traduzida por uma das duas negações de $\mathcal{W}_3$, cada conjunção de C_1 por uma das três conjunções de $\mathcal{W}_3$, e assim por diante. É evidente que as traduções acima podem todas ser "transferidas", perdendo no entanto a homofonia, para $\mathcal{J}_3$: basta lembrar que os conectivos de $\mathcal{J}_3$ e $\mathcal{W}_3$ são interdefiníveis (vide **2.3.1.1**), havendo portanto traduções conservativas entre estes cálculos. Não há razão contudo para supor que uma dada tradução $*$ seja também conservativa.

A conveniência e a representabilidade da semântica de traduções possíveis para C_1 (vide **2.3.3.3** e **2.3.3.4**) juntas nos garantem que, para toda fórmula A de C_1,

$$\Gamma \vDash A \Leftrightarrow \Gamma \vDash_{\mathbf{TP}} A.$$

Temos aqui delineada, portanto, uma tradução conservativa semântica. Como sabemos também da corretude e da completude fortes da semântica paraconsistente (vide **2.2.1**), dispomos ainda de uma outra tradução conservativa: $\Gamma \vdash A \Leftrightarrow \Gamma \vDash_{\mathbf{TP}} A$. A relação de forçamento global, $\vDash_{\mathbf{TP}}$, nos ensina portanto como construir uma tradução conservativa não-gramatical a partir do conjunto ***T*** de traduções (vide **2.3.3**). Uma interessante questão no momento seria a seguinte: como explicitar esta tradução conservativa usando somente a linguagem de $\mathcal{W}_3$, isto é, como definir uma única função de tradução $\star$ tal que $\Gamma^\star \vDash_3 A^\star \Leftrightarrow \Gamma \vDash_{\mathbf{TP}} A$?

O leitor poderia imaginar equivocadamente o seguinte artifício: das restrições **Tr** sabemos que cada fórmula A de C_1 tem um número finito de diferentes traduções possíveis – de fato, ele é limitado por $2^u \times 3^b$, onde u é o número de negações presentes na fórmula A e b o número de conectivos binários nesta fórmula. Definamos agora uma função g que colete as traduções possíveis de cada fórmula de C_1 e as conjugue numa conjunção. Assim, se $\{A^1, A^2, \ldots, A^n\}$ denota o conjunto de todas as traduções possíveis da fórmula A, então $g(A) = (A^1) \wedge_3 (A^2) \wedge_3 \ldots \wedge_3 (A^n)$. Dado o significado de $\wedge_3$ em $\mathcal{W}_3$, o leitor poderia pensar que temos $\Gamma \vDash_{\mathbf{TP}} A \Leftrightarrow g(\Gamma) \vDash_3 g(A)$. Daí concluiríamos que $\Gamma \vdash A \Leftrightarrow g(\Gamma) \vDash_3 g(A)$, e a função g explicitaria portanto a desejada tradução conservativa $\star$ de C_1 em $\mathcal{W}_3$. Além disso, g seria ainda literal relativamente às variáveis, só que já não seria gramatical.

Ledo engano. Um contra-exemplo bastante elementar a esta proposta pode ser assim formulado: seja $A = \neg p$ uma fórmula de C_1, e considere a fórmula $\neg(A \wedge \neg A)$. Sabemos que as traduções possíveis de $\neg A$ são $\neg_C A^*$ e $\neg_L A^*$, e nestes casos as traduções possíveis de $\neg(A \wedge \neg A)$ são, respectivamente, $\neg_L(A^* \wedge_3 \neg_C A^*)$ e $\neg_L(A^* \wedge_3 \neg_L A^*)$. Ora, é fácil verificar, a partir das matrizes de $\mathcal{W}_3$, que $\neg_C A^* \wedge_3 \neg_L A^* \vDash_3 \neg_L(A^* \wedge_3 \neg_C A^*) \wedge \neg_L(A^* \wedge_3 \neg_L A^*)$. No entanto, $\neg A \nvDash_{\mathbf{TP}} \neg(A \wedge_3 \neg A)$, já que, embora de fato valha $\neg_L A \vDash_3 \neg_L(A \wedge_3 \neg_L A)$, por outro lado, $\neg_C A \nvDash_3 \neg_L(A \wedge_3 \neg_C A)$ – basta tomar $w(A) = \mathrm{V}^-$.

Na verdade, podemos afirmar no máximo que $\vdash A \Leftrightarrow \vDash_3 g(A)$, isto é, temos apenas a conveniência e a representabilidade *fracas*. De maneira geral, uma função com a característica de que $A \in \mathbf{C}_1(\varnothing) \Leftrightarrow g(A) \in \mathbf{C}_2(\varnothing)$, será denominada *versão*. Assim, a função g acima nos dá uma *versão conservativa* entre C_1 e $\mathcal{W}_3$.

É importante ressaltar a diferença entre versões e traduções: *versões sintáticas* (*semânticas*) preservam teoremas (tautologias) entre lógicas, mas apenas traduções (conservativas) preservam (fortemente) derivabilidade. Versões podem ser bastante úteis, como por exemplo na demonstração de equiconsistência entre sistemas lógicos, ou geométricos, (vide **1.5**) mas podem também ser absolutamente triviais: dadas duas lógicas $\mathbf{L}_1$ e $\mathbf{L}_2$ com um conjunto enumerável de teoremas, podemos sempre construir uma versão bijetiva entre elas enumerando o conjunto de teoremas de cada uma delas e mapeando os teoremas de $\mathbf{L}_1$ e $\mathbf{L}_2$ segundo a ordem da enumeração. Não afirmamos que traduções não possam ser igualmente triviais; ainda não se sabe, todavia, se qualquer lógica dada poderá ser traduzida em qualquer outra.[14]

Semânticas de traduções possíveis triviais para o cálculo proposicional clássico (**CP**) podem ser obtidas se adotamos como única restrição **Tr**: $(\neg A)^* = \neg_L A^*$. Se além disso nos restringimos apenas ao fragmento $\mathcal{W}_{3\ ijkL}$, então há uma única função de tradução, que é ela própria conservativa, gramatical e literal relativamente a variáveis. Sua imagem em $\mathcal{W}_3$ é, por conseguinte, uma lógica dual a **CP**.

[14] Este se constitui num mui interessante problema em aberto, cercado de certa controvérsia. É fácil construir, por exemplo, uma tradução conservativa do cálculo proposicional clássico (**CP**) no Cálculo Intuicionista de Heyting (**CIH**): Gentzen mostrou que a função * tal que $p^*=\neg\neg p$, $(A\vee B)^*=\neg(\neg A^*\wedge\neg B^*)$, $(A\vee B)^*=A^*\vee B^*$, $(A\rightarrow B)^*=A^*\rightarrow B^*$ e $(\neg A)^*=\neg A^*$ serve a este propósito. Alguns autores, dentre os quais Epstein (1990, cap.X.5), especularam ser impossível a existência da recíproca, isto é, de uma tradução conservativa de **CIH** em **CP**. Não obstante, Feitosa (1997, cap.6) demonstrou não-construtivamente a existência de uma tal tradução. Uma demonstração desta espécie abre cancha para novas questões, tais como: será possível construir uma tradução conservativa *recursiva* de **CIH** em **CP**?

3
Nos Países Vizinhos

Como solução ao problema da contradição, da Costa (1963) apresentou não apenas um cálculo paraconsistente, mas toda uma hierarquia de tais cálculos. Veremos aqui, seguindo Carnielli & Marcos, 199?a, como prover todos estes cálculos de semânticas de traduções possíveis.

3.1 A construção dos cálculos C_n, $1 \leq n \leq \omega$

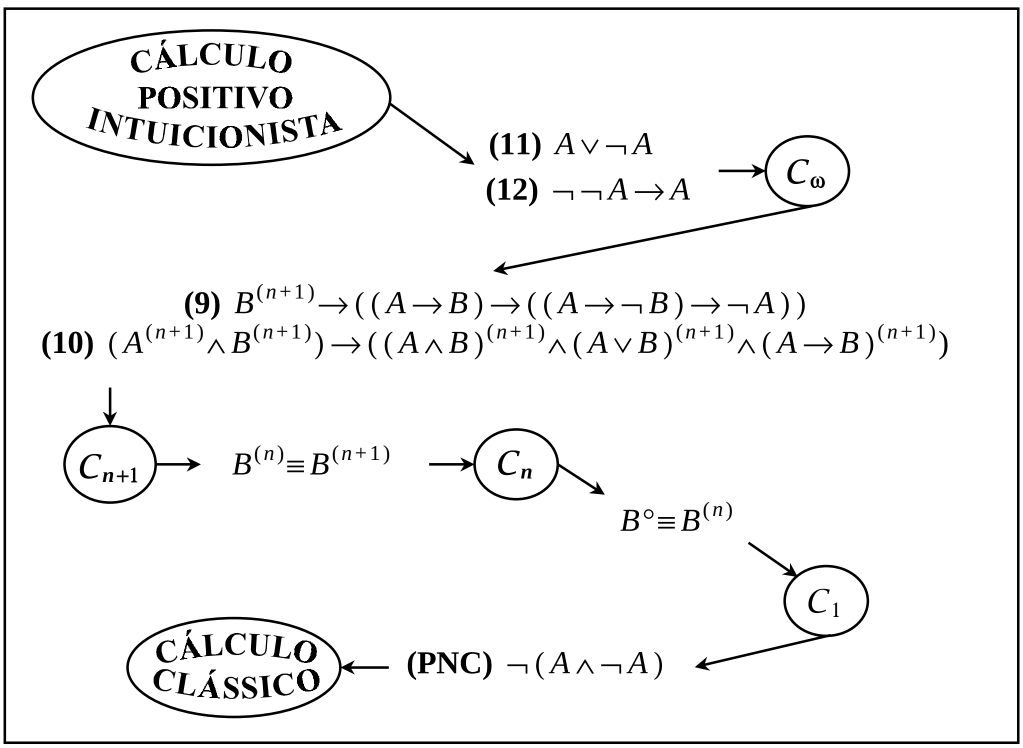

Figura 2

Observamos que os axiomas de C_n, $1 < n < \omega$, diferem dos axiomas de C_1 apenas na *forma paraconsistente da redução ao absurdo*, C_n**(9)**: $B^{(n)} \to ((A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A))$, e na *propagação do bom-comportamento*, C_n**(10)**: $(A^{(n)} \wedge B^{(n)}) \to ((A \wedge B)^{(n)} \wedge (A \vee B)^{(n)} \wedge (A \to B)^{(n)})$. Os outros axiomas, de $\boldsymbol{C_n}$**(1)** a $\boldsymbol{C_n}$**(8)**, $\boldsymbol{C_n}$**(11)** e $\boldsymbol{C_n}$**(12)**, são comuns a C_1; além disso, a única regra de inferência destes cálculos continua sendo Modus Ponens.

Usamos aqui X^n para abreviar a fórmula $X^{\circ\cdots\circ}$, onde o símbolo ° aparece *n* vezes, $n>0$, e usamos $X^{(n)}$ para abreviar a fórmula $X^\circ\wedge\ldots\wedge X^n$. Por convenção, para $n=0$ podemos estipular que X^n e $X^{(n)}$ abreviem a própria fórmula *X*. É claro que definições recursivas também podem ser apresentadas.[1] Para um dado C_n, denominamos agora *negação forte* à fórmula $\neg A\wedge A^{(n)}$, e a abreviamos por $\sim^{(n)}A$.

Todas as principais propriedades sintáticas de C_1 são também válidas em cada C_n (vide **2.1.1*a* - *j***) desde que substituamos apropriadamente F° por $F^{(n)}$ e $\sim F$ por $\sim^{(n)}F$. Já sabemos que o cálculo C_1 é estritamente mais fraco do que o cálculo clássico, e o cálculo C_ω é estritamente mais fraco do que todos os demais cálculos da hierarquia C_n (vide o apêndice $\omega\times\omega$, **Independência de Peirce e Dummett em** $\boldsymbol{C_\omega}$); ao apresentarmos uma semântica para os C_n's poderemos verificar ainda que, dados $m<n$, C_n é estritamente mais fraco do que C_m.[2]

Similarmente ao que acontecia com C_1, nenhum dos C_n's é caracterizável por matrizes finitas (vide apêndice $\omega\times\omega$, **Incaracterizabilidade por matrizes finitas**). Também estes cálculos pedem, portanto, por semânticas alternativas.

---

[1] Com efeito: considere $X^0 \overset{\text{def}}{=} X$ e $X^{n+1} \overset{\text{def}}{=} (X^n)^\circ$ para $1\leq n<\omega$; considere $X^{(0)} \overset{\text{def}}{=} X$, $X^{(1)} \overset{\text{def}}{=} X^1$ e $X^{(n+1)} \overset{\text{def}}{=} X^{(n)}\wedge X^{n+1}$. Curiosamente, a seguinte definição pode ser encontrada em da Costa, 1963, p.16: $X^{(1)} \overset{\text{def}}{=} X^\circ$ e $X^{(n+1)} \overset{\text{def}}{=} X^{(n)}\wedge(X^{(n)})^\circ$. Segundo esta definição de da Costa, teríamos, por exemplo, $X^{(3)} \overset{\text{def}}{=} X^\circ\wedge X^{\circ\circ}\wedge(X^\circ\wedge X^{\circ\circ})^\circ$, mas pela definição que adotamos acima (que é, de resto, a adotada em toda a literatura), temos $X^{(3)} \overset{\text{def}}{=} X^\circ\wedge X^{\circ\circ}\wedge X^{\circ\circ\circ}$. Ora, usando qualquer das duas semânticas apresentadas a seguir é fácil verificar que estas duas definições *não* produzem fórmulas $X^{(n)}$ equivalentes em cada C_n.

[2] Uma suposta prova geral para este fato via a independência do axioma $\boldsymbol{C_n}$**(9)** com relação aos axiomas de C_{n+1}, foi apresentada em da Costa, 1963, p.17-9, e Alves, 1976, p.17-9, e creditada a Arruda. Ocorre nesta prova, contudo, algum grave equívoco, já que o próprio axioma $\boldsymbol{C_m}$**(9)**, para todo *m*, assume valores não-distinguidos em todas as matrizes $\mathbf{T}_n$ apresentadas, bastando tomar o valor 1 em *A* e qualquer valor entre 1 e $n+2$ em *B*.

3.2 Semânticas de valorações para C_n, $n<\omega$

Tomando por base a semântica paraconsistente que oferecemos para C_1 em **2.2** poderíamos imaginar que uma semântica paraconsistente para cada C_n, $1<n<\omega$, seria obtida se simplesmente substituíssemos as fórmulas do tipo X° em **val[iv]** e em **val[v]** por fórmulas do tipo $X^{(n)}$. De fato, isto foi o que se sugeriu em da Costa & Alves, 1977. É muito fácil perceber, contudo, que esta formulação resulta incorreta, como bem apontaram Loparić & Alves (1980). De fato, em uma quase-matriz para a fórmula $B^{(n)}$ do cálculo C_n construída segundo as instruções apresentadas no primeiro artigo supramencionado, haveria uma linha k tal que $k(B)=k(\neg B)=k(B^{(n)})=1$. Mas uma valoração v_n para C_n tal que $v_n(B)=v_n(\neg B)=v_n(B^{(n)})=1$ não pode existir, pois neste caso, tomando por exemplo uma proposição A tal que $v_n(A)=1$ e $v_n(\neg A)=0$, o esquema $\boldsymbol{C_n}$ **(9)** não seria validado.

Loparić & Alves (1980) mostraram que uma semântica bivaluada não-verofuncional para cada C_n, $1\leq n<\omega$, pode ser definida como segue. Uma n-valoração para C_n é uma função v_n: $\text{FOR}(C_n)\to\{0, 1\}$ que respeita as seguintes condições:

val[i] $v_n(A\wedge B)=1 \iff v_n(A)=1$ e $v_n(B)=1$;

val[ii] $v_n(A\vee B)=1 \iff v_n(A)=1$ ou $v_n(B)=1$;

val[iii] $v_n(A\to B)=1 \iff v_n(A)=0$ ou $v_n(B)=1$;

val[iv] $v_n(A)=0 \Rightarrow v_n(\neg A)=1$;

val[v] $v_n(\neg\neg A)=1 \Rightarrow v_n(A)=1$;

val[vi] $v_n(A^{n-1})=v_n(\neg A^{n-1}) \iff v_n(A^n)=0$;

val[vii] $v_n(A)=v_n(\neg A) \iff v_n(\neg A^\circ)=1$;

val[viii] $v_n(A)\neq v_n(\neg A)$ e $v_n(B)\neq v_n(\neg B) \Rightarrow v_n(A\#B)\neq v_n(\neg(A\#B))$, onde $\#\in\{\wedge,\vee,\to\}$.

Antes de mais nada devemos observar que, para $n=1$, as condições **val[i]** - **val[viii]** acima são equivalentes às condições **val[i]** - **val[vii]** apresentadas em **2.2**, como é fácil verificar.

Podemos verificar agora que as principais consequências da definição de valoração para C_1 continuam válidas em cada C_n (vide **2.2*a* - *c***) desde que substituamos F° por $F^{(n)}$ e $\sim F$ por $\sim^{(n)}F$. Contudo, para provarmos por exemplo o resultado análogo a **2.2*b***, qual seja, $\boldsymbol{v_n(A^{(n)})=0 \Leftrightarrow v_n(A)=v_n(\neg A)=1}$, necessitamos antes alguns lemas auxiliares:

Lema I. $v_n(A^{(n)})=1 \Rightarrow v_n(\neg A^i)=0$, para todo $1\leq i<n$.

Com efeito, de $v_n(A^{(n)})=1$ temos, da própria definição de $A^{(n)}$ e de **val[i]**, $v_n(A^1)=\ldots=v_n(A^n)=1$. Mas, se $i<n$ então, para algum $m\geq 1$, temos $i=n-m$. Aplicamos a indução em *m*. Se $m=1$, temos $v_n(A^{(n)})=1$ e $v_n(A^{n-1})=1$, logo, de **val[vi]**, $v_n(\neg A^{n-1})=0$. Consideremos agora $m>1$, e suponhamos como hipótese de indução que $v_n(\neg A^{n-(m-1)})=0$. Mas $\neg A^{n-(m-1)}=\neg A^{n-m+1}=\neg(A^{n-m})^\circ$, logo estamos supondo $v_n(\neg(A^{n-m})^\circ)=0$. Como $v_n(A^{n-m})=1$, temos, de **val[vii]**, $v_n(\neg A^{n-m})=0$.

Lema II. $v_n(A)\neq v_n(\neg A) \Rightarrow v_n(A^\circ)=1$ e $v_n(\neg A^\circ)=0$.

Suponhamos $v_n(A)\neq v_n(\neg A)$. Daí, de **val[i]** temos $v_n(A\wedge\neg A)=0$, e de **val[iv]** $v_n(A^\circ)=v_n(\neg(A\wedge\neg A))=1$. Por outro lado, de **val[v]** temos $v_n(\neg A^\circ)=v_n(\neg\neg(A\wedge\neg A))=0$.

Lema III. $v_n(A)\neq v_n(\neg A) \Rightarrow v_n(A^i)=1$ e $v_n(\neg A^i)=0$, para todo $i\geq 1$.

Consequência do **Lema II**, por indução sobre *i*.

Teorema. $v_n(A^{(n)})=0 \Leftrightarrow v_n(A)=v_n(\neg A)=1$.

($\Rightarrow$) Suponhamos $v_n(A)\neq v_n(\neg A)$. Do **Lema III** temos $v_n(A^1)=\ldots=v_n(A^n)=1$, donde, por **val[i]**, $v_n(A^{(n)})=1$. ($\Leftarrow$) Suponhamos $v_n(A^{(n)})=1$. Do **Lema I** segue que $v_n(\neg A^\circ)=0$, donde, por **val[vii]**, $v_n(A)\neq v_n(\neg A)$.

A semântica dada por estas *n*-valorações é correta e completa para cada C_n, sendo a demonstração deste fato o resultado de óbvias modificações na demonstração que apresentamos no caso de C_1 (vide **2.2.1**).

Podemos também para cada C_n associar um procedimento de decisão por quase-matrizes, bastando introduzir as seguintes alterações ao algoritmo apresentado em **2.2.2**:

QM 4.2.1. se B é da forma $\neg C$, então

QM 4.2.1.1. se C é da forma $D\wedge\neg D$, escreva 1, senão

QM 4.2.1.2. verifique se C e $\neg C$ tomam valores diferentes – neste caso escreva 0, em caso contrário, bifurque a linha e escreva 0 numa parte e 1 na outra, senão

QM 4.2.2. se B é da forma $D^{n-1}\wedge\neg D^{n-1}$, escreva 0, senão[3] (…)

Podemos usar este novo procedimento para verificar que o esquema $(A^{m-1}\wedge\neg A^{m-1})^{(m)}$ é válido em C_m, mas não em C_n, $n>m$. Em particular, como mostram as quase-matrizes a seguir, $(p\wedge\neg p)^{\circ}$ é válido em C_1 mas não em C_2.

Em C_1:

		$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{(p\wedge\neg p)^{\circ}}$
p	$\neg p$	$p\wedge\neg p$	$\neg(p\wedge\neg p)$	$1\wedge 2$	$\neg 3$
0	1	0	1	0	**1**
1	0	0	1	0	**1**
	1	1	0	0	**1**

Em C_2:

		$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{(p\wedge\neg p)^{\circ}}$
p	$\neg p$	$p\wedge\neg p$	$\neg(p\wedge\neg p)$	$1\wedge 2$	$\neg 3$
0	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1
	1	1	0	0	1
			1	1	**0**
					1

3.3 Semânticas de traduções possíveis para C_n, $n<\omega$

Usando ainda as matrizes de $\mathcal{W}_3$, mas modificando convenientemente as restrições sobre as funções de tradução, podemos fornecer semânticas de traduções possíveis para cada cálculo paraconsistente C_n. As novas restrições sobre as traduções, $\mathbf{Tr}_n$, serão (compare com **2.3.3.2**, em especial **Tr 3.a** e **Tr 4.a**):

[3] Mais uma vez, em Alves, 1976, p.79, e da Costa & Alves, 1977, p.628, este passo foi apresentado de maneira incorreta (vide **2.2.2**, **Nota 5**). Loparić & Alves, 1980, p.167, foram mais cuidadosos: neste artigo finalmente pode ser encontrada a formulação correta.

Tr 1. para variáveis atômicas p:

a. $p^* = p$;

b. $(\neg p)^* = \neg_C p$.

Tr 2. para fórmulas do tipo $(A \# B)$, onde $\# \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$:

a. se $(A \# B)$ é $(A \wedge \neg A)$, então $(A \wedge \neg A)^* = (A^* \wedge_3 (\neg A)^*)$, senão

b. $(A \# B)^* = A^* \#_1 B^*$, se $(\neg A)^* = \neg_C A^*$ e $(\neg B)^* = \neg_L B^*$;

c. $(A \# B)^* = A^* \#_2 B^*$, se $(\neg A)^* = \neg_L A^*$ e $(\neg B)^* = \neg_C B^*$;

d. $(A \# B)^* = A^* \#_3 B^*$, nos demais casos.

Tr 3. para fórmulas do tipo $\neg(A \# B)$, onde $\# \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$:

a. se $(A \# B)$ é $(D^{(n-1)} \wedge \neg D^{(n-1)})$, para algum D, então $(\neg(D^{(n-1)} \wedge \neg D^{(n-1)}))^* = \neg_L (D^{(n-1)} \wedge \neg D^{(n-1)})^*$, senão

b. $(\neg(A \# B))^* = \neg_L (A \# B)^*$, se $(\neg A)^* = \neg_L A^*$ e $(\neg B)^* = \neg_L B^*$;

c. $(\neg(A \# B))^* \in \{\neg_L (A \# B)^*, \neg_C (A \# B)^*\}$, em caso contrário.

Tr 4. para fórmulas do tipo $\neg\neg A$:

a. se A é $(D \wedge \neg D)$, para algum D, e $(\neg A)^* = \neg_C (D \wedge \neg D)^*$, então $(\neg\neg A)^* = \neg_C (\neg A)^*$, senão

b. $\neg\neg A = \neg_L (\neg A)^*$, se $(\neg A)^* = \neg_L A^*$;

c. $\neg\neg A \in \{\neg_L (\neg A)^*, \neg_C (\neg A)^*\}$, em caso contrário.

Verificar a corretude desta semântica é um procedimento puramente mecânico. Com algumas óbvias adaptações nas provas podemos extrair ainda das matrizes de $\mathcal{W}_3$ e das restrições acima consequências análogas às extraídas no caso de C_1 (vide **2.3.3.2*a*-*e***). A verificação da conveniência desta semântica também procede por adaptações simples da prova para C_1 (vide **2.3.3.3**), levando em consideração agora as cláusulas **val[i]** a **val[viii]** que definem uma n-valoração. Na prova da representabilidade (vide **2.3.3.4**) basta modificar a análise feita da fórmula B° para uma análise da fórmula $B^{(n)}$. Como consequência, segue que a semântica de traduções possíveis acima proposta para cada C_n é correta e completa.

Desta semântica resulta também um novo procedimento de decisão para as fórmulas de cada C_n. Tomando mais uma vez a fórmula $(p \wedge \neg p)°$, por exemplo, encontramos em C_1 apenas uma tradução possível (já retiradas aquelas que produzem matrizes idênticas, como fizemos em **2.3.3.6**):

➊ $\neg_L((p \wedge_3 \neg_C p) \wedge_3 \neg_L(p \wedge_3 \neg_C p))$.

Já em C_2 encontramos também esta tradução possível, bem como outras duas:

➋ $\neg_L((p \wedge_3 \neg_C p) \wedge_3 \neg_C(p \wedge_3 \neg_C p))$;

➌ $\neg_C((p \wedge_3 \neg_C p) \wedge_3 \neg_C(p \wedge_3 \neg_C p))$.

E então podemos mais uma vez verificar que esta é uma fórmula válida em C_1 mas não em C_2:

		1	2	3	4	5			
p	$\neg_C p$	$p \wedge_3 \neg_C p$	$\neg_L(p \wedge_3 \neg_C p)$	$\neg_C(p \wedge_3 \neg_C p)$	$1 \wedge_3 2$	$1 \wedge_3 3$	➊	➋	➌
V	F	F	V	V	F	F	**V**	V	V
V^-	V^-	V^-	F	V^-	F	V^-	**V**	**F**	V^-
F	V	F	V	V	F	F	**V**	V	V
							$\neg_L 4$	$\neg_L 5$	$\neg_C 5$

O leitor já saberá mapear entre si os dois procedimentos de decisão acima exemplificados (como fizemos em **2.3.3.7**).

4
Nos Países Mais Distantes

Já vimos na **Figura 2** (vide **3.1)** como é construído o cálculo C_ω, simplesmente “apagando” de cada C_n os axiomas que tratam das proposições bem-comportadas. Seus axiomas são portanto exatamente aqueles comuns a toda a hierarquia, isto é, $\boldsymbol{C_n}$**(1) -** $\boldsymbol{C_n}$**(8)**, $\boldsymbol{C_n}$**(11)** e $\boldsymbol{C_n}$**(12)**, e nós os denominaremos aqui simplesmente $\boldsymbol{C_\omega}$**(1) -** $\boldsymbol{C_\omega}$**(8)**, $\boldsymbol{C_\omega}$**(11)** e $\boldsymbol{C_\omega}$**(12)**. Da Costa (1963) propôs este cálculo como um “limite” natural à hierarquia C_n, $n<\omega$.

4.1 C_ω não é o limite de C_n!

Cedo se verificou, contudo, que, embora valessem em cada C_n todas as regras e teoremas da lógica positiva clássica (vide **2.1.1** e **3.1**), tal não mais acontecia em C_ω. Alves (1976) sugeriu que para tanto, em um certo sentido, faltava a C_ω exatamente a Lei de Peirce **(LP)**, $((A\to B)\to A)\to A$ (vide o apêndice $\omega\times\omega$, **Independência de Peirce e Dummett em** $\boldsymbol{C_\omega}$). Isso certamente ajuda a explicar a singularidade de C_ω frente aos outros cálculos da hierarquia: já se apresentou para C_ω uma semântica de mundos possíveis, mas não para os demais cálculos; não é trivial estender os métodos de tableaux e de dedução natural disponíveis para os C_n para o caso de C_ω.

Além disso, a semântica paraconsistente de C_ω é muito complicada. Uma semi-valoração em C_ω foi definida como uma função $s\colon \mathrm{F{\small OR}}(C_\omega)\to\{0,1\}$ que respeita as seguintes cláusulas:

sval[i] $s(A\wedge B)=1 \iff s(A)=1$ e $s(B)=1$;

sval[ii] $s(A\vee B)=1 \iff s(A)=1$ ou $s(B)=1$;

sval[iii] $s(A)=0 \implies s(\neg A)=1$;

sval[iv] $s(\neg\neg A)=1 \implies s(A)=1$;

sval[v] $s(A \to B) = 1 \;\Rightarrow\; s(A) = 0$ ou $s(B) = 1$;

sval[vi] $s(B) = 1 \;\Rightarrow\; s(A \to B) = 1$.

E uma ω-valoração, v_ω, foi definida como uma semi-valoração que respeita ainda a seguinte cláusula adicional:

sval[vii] Para todo $A_1, \ldots, A_n$, e para todo B que não é da forma $C \to D$, $v_\omega(A_1 \to (A_2 \to \ldots \to (A_n \to B)\ldots)) = 0 \;\Rightarrow\;$ existe uma semi-valoração s tal que $s(A_i) = 1$ e $s(B) = 0$, para $1 \leq i \leq n$.

Note que as cláusulas sobre a conjunção, a disjunção e a negação (cf. **val[i]**, **val[ii]**, **val[iv]** e **val[v]** em **3.2**) são comuns a toda a hierarquia C_n; as cláusulas que tratavam das fórmulas bem-comportadas (cf. **val[vi]**, **val[vii]** e **val[viii]** em **3.2**) foram eliminadas; contudo, a cláusula sobre a implicação (cf. **val[iii]** em **3.2**), foi desmembrada em **sval[v]** e **sval[vi]** e, surpreendentemente, **sval[vii]**.

Loparić (1986) mostrou que esta semântica é correta e completa com relação ao cálculo C_ω, e apresentou um procedimento de decisão por quase-matrizes.

Com a perda da força total da cláusula sobre a implicação, deixamos de ser capazes, como éramos em cada C_n, por exemplo, de provar em C_ω todos os teoremas clássicos puramente positivos, isto é, todos os esquemas livres de negação válidos classicamente. A falha da Lei de Peirce é apenas a ponta do aisbergue.

Denotemos o conjunto de todos os teoremas de um cálculo S por $Teo(S)$. Ora, é razoável esperar que o *cálculo-limite*, C_{Lim}, da hierarquia C_n seja tal que contenha todos os teoremas comuns a todos os cálculos da hierarquia, e somente eles, isto é, que ele se constitua no limite dedutivo dos cálculos da hierarquia. Definimo-lo, portanto, como

$$Teo(C_{Lim}) \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{1 \leq n < \omega} Teo(C_n).$$

4.2 Uma boa proposta: C_{min}

Como um passo seguro em direção a C_{Lim}, Carnielli[1] propôs acrescentar a C_ω o axioma representado pela Lei de Dummett **(LD)**: $A \vee (A \rightarrow B)$, a qual também não é demonstrável em C_ω (vide o apêndice ω×ω, **Independência de Peirce e Dummett em C_ω**). As vantagens são imediatas. No novo sistema, $C_{min} \stackrel{\text{def}}{=} C_\omega \cup \{$**(LD)**$\}$, temos:

- **(LP)** é demonstrável. Acompanhe (aqui **(MP)** indica a regra de Modus Ponens e **(TD)** o Teorema da Dedução):

1. $(A \rightarrow B) \rightarrow A,\ A \vdash A$	óbvio
2. $(A \rightarrow B) \rightarrow A,\ A \rightarrow B \vdash A$	por **(MP)**
3. $(A \rightarrow B) \rightarrow A,\ A \vee (A \rightarrow B) \vdash A$	por **(TD)**, **C_ω(8)** e **(MP)**
4. $(A \rightarrow B) \rightarrow A \vdash A$	pois $A \vee (A \rightarrow B)$ é **(LD)**
5. $\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$	por **(TD)**

Como consequência, vale em C_{min} toda a lógica positiva clássica.

- A semântica paraconsistente correspondente[2] é dada exatamente por **val[i]** - **val[iii]**, **val[iv]** e **val[v]**, que são exatamente as cláusulas sobre as *n*-valorações que não tratam do bom-comportamento.

val[i] $v(A \wedge B) = 1 \Leftrightarrow v(A) = 1$ e $v(B) = 1$;

val[ii] $v(A \vee B) = 1 \Leftrightarrow v(A) = 1$ ou $v(B) = 1$;

val[iii] $v(A \rightarrow B) = 1 \Leftrightarrow v(A) = 0$ ou $v(B) = 1$;

val[iv] $v(A) = 0 \Rightarrow v(\neg A) = 1$;

val[v] $v(\neg\neg A) = 1 \Rightarrow v(A) = 1$.

Como consequência de **val[i]** - **val[iii]**, são válidos em C_{min} todos os teoremas clássicos puramente positivos.

---

[1] Comunicação pessoal. Observe ainda que **(LD)** é igualmente indemonstrável no Cálculo Intuicionista de Heyting: a partir da conhecida semântica de mundos possíveis para a lógica intuicionista (vide **…**: **Produto**), basta tomar mundos w e w' tais que wRw' e $w(A)=w(B)=w'(B)=$F e $w'(A)=$V.

[2] Note que, assim como cada um dos C_n, também C_{min} não é caracterizável por matrizes finitas (vide apêndice ω×ω, **Incaracterizabilidade por matrizes finitas**).

O que nos resta a fazer agora é mostrar que esta de fato constitui uma semântica correta e completa para C_{min}. Quanto à corretude, não há novidades: a demonstração é a usual. A completude, no entanto, exige alguns poucos passos intermediários.

Seja $\Delta \cup \{F\}$ um conjunto de fórmulas de FOR(C_{min}). Dizemos que Δ é *F-saturado* se $\Delta \nvdash F$ e para toda fórmula A em FOR(C_{min}) tal que $A \notin \Delta$ temos $\Delta \cup \{A\} \vdash F$. Note primeiramente que, em C_{min}, todo conjunto Γ consistente de fórmulas tal que, para uma dada fórmula F, $\Gamma \nvdash F$, pode ser estendido a um conjunto F-saturado Δ. Isto se mostra via a construção de Lindenbaum usual.

Lema. *Sejam dados uma fórmula F e um conjunto F-saturado* Δ, *com* $\Delta \cup \{F\} \subset$ FOR(C_{min}). *Então*:

L1. para toda fórmula A temos $\Delta \vdash A \Leftrightarrow A \in \Delta$. ($\Rightarrow$) Com efeito, sejam $A \notin \Delta$ e $\Delta \vdash A$. Como Δ é F-saturado, $\Delta \cup \{A\} \vdash F$. Daí, por **(TD)**, $\Delta \vdash A \to F$, mas como por hipótese $\Delta \vdash A$, então, por **(MP)**, $\Delta \vdash F$, o que é absurdo, pois Δ é F-saturado. ($\Leftarrow$) Imediato.

L2. $A \wedge B \in \Delta \Leftrightarrow A \in \Delta$ e $B \in \Delta$. ($\Rightarrow$) Se $A \wedge B \in \Delta$, pelos axiomas C_ω**(4)** e C_ω**(5)** temos que $\Delta \vdash A$ e $\Delta \vdash B$, logo, por **L1.** temos $A \in \Delta$ e $B \in \Delta$. ($\Leftarrow$) Reciprocamente, se $A \in \Delta$ e $B \in \Delta$, por C_ω**(3)** temos $\Delta \vdash A \wedge B$, e, por **L1.**, $A \wedge B \in \Delta$.

L3. $A \vee B \in \Delta \Leftrightarrow A \in \Delta$ ou $B \in \Delta$. ($\Rightarrow$) Seja $A \notin \Delta$ e $B \notin \Delta$. Temos, como Δ é F-saturado, $\Delta \cup \{A\} \vdash F$ e $\Delta \cup \{B\} \vdash F$, logo $\Delta \vdash A \to F$ e $\Delta \vdash B \to F$, e por C_ω**(8)** temos $\Delta \vdash (A \vee B) \to F$, donde $\Delta \cup \{A \vee B\} \vdash F$. Por **L1.**, $A \vee B \notin \Delta$. ($\Leftarrow$) Reciprocamente, se $A \in \Delta$ ou $B \in \Delta$, por C_ω**(6)** ou C_ω**(7)** temos $\Delta \vdash A \vee B$, e, por **L1.**, $A \vee B \in \Delta$.

L4. $A \to B \in \Delta \Leftrightarrow A \notin \Delta$ ou $B \in \Delta$. ($\Rightarrow$) Com efeito, se $A \to B \in \Delta$ e $A \in \Delta$, então, por **L1.** e **(MP)**, $B \in \Delta$. ($\Leftarrow$) Por outro lado, caso $B \in \Delta$, então, por **L1.** e C_ω**(1)**, $A \to B \in \Delta$. Já no caso em que $A \notin \Delta$, como pelo axioma novo, **(LD)**, e **L1.**, $A \vee (A \to B) \in \Delta$, por **L3.** temos que $A \to B \in \Delta$.

L5. $\boldsymbol{A \notin \Delta \Rightarrow \neg A \in \Delta}$**.** Se $A \notin \Delta$, por C_ω**(11)**, **L3.** e **L1.**, $\neg A \in \Delta$.

L6. $\boldsymbol{\neg\neg A \in \Delta \Rightarrow A \in \Delta}$**.** Se $\neg\neg A \in \Delta$, por C_ω**(12)** e **L1.**, $A \in \Delta$.

Este lema nos informa que a função característica de um conjunto F-saturado nos dá uma valoração para C_{min}. Com efeito, se definimos uma função v tal que

$$v(X) = \begin{cases} 1, \text{se } X \in \Delta \\ 0, \text{em caso contrário,} \end{cases}$$

então **L2.** satisfaz **val[i]**, **L3.** satisfaz **val[ii]**, **L4.** satisfaz **val[iii]**, **L5.** satisfaz **val[vi]** e **L6.** satisfaz **val[vii]**.

Completude. $\Gamma \vDash A \Rightarrow \Gamma \vdash A$.

Se A é uma fórmula tal que $\Gamma \nvdash A$, então, pela construção de Lindenbaum, podemos estender Γ a um conjunto A-saturado Δ. Como $\Delta \nvdash A$, por **L1.** temos $A \notin \Delta$ e já sabemos que a função característica de Δ nos dá uma valoração v para C_{min}. Ora, esta valoração nos dá um modelo de Δ tal que $v(A) = 0$. Portanto, $\Delta \nvDash A$, e em particular $\Gamma \nvDash A$.

4.3 O que se ganha com isso?

É hora de mencionar algumas das propriedades mais interessantes de C_ω e C_{min}. Não há nestes cálculos proposições bem-comportadas, nem negações fortes. Isso os torna muito fracos. Sobre este fenômeno afirmou da Costa (1963) que "de um modo impreciso, poderíamos afirmar que a razão humana parece atingir o ápice de sua potência quanto mais se aproxima do perigo da trivialização".

Diferentemente de cada C_n, $n<\omega$, os cálculos C_ω e C_{min} não são finitamente trivializáveis (vide o apêndice $\omega\times\omega$, **Nem C_ω nem C_{min} são finitamente trivializáveis**). Além disso, Sette e Loparić, em duas provas independentes, mostraram (para o resultado segundo apresentado por Loparić, cf. Alves, 1976) que nenhuma fórmula da forma $\neg G$ é teorema de C_ω. Estas provas algo complexas podem ser facilmente adaptadas a fim de mostrar que também em C_{min} não há teoremas desta forma. Todavia, veremos logo a seguir que a partir da semântica de traduções possíveis que proporemos para C_{min} uma prova muito mais simples é possível.

Mostramos acima que o cálculo C_{min} é estritamente mais forte do que o cálculo C_ω pois em C_{min} se demonstram todos os teoremas do cálculo positivo intuicionista e, mais ainda, todos os teoremas positivos do cálculo clássico. Por outro lado, se a axiomatização de C_ω surge naturalmente a partir dos axiomas dos C_n's, a semântica de valorações de C_{min} surge naturalmente a partir das semânticas de valorações dos C_n's – basta apagar **val[vi]**, **val[vii]** e **val[viii]** (vide **3.2**). Temos agora:

$$Teo(C_\omega) \subset Teo(C_{min}) \subseteq Teo(C_{Lim}) = \bigcap_{1 \leq n < \omega} Teo(C_n).$$

Valerá a recíproca? Isto é, será que temos também $Teo(C_{Lim}) \subseteq Teo(C_{min})$? Responderemos a esta questão de maneira definitiva logo adiante.

4.4 Uma semântica de traduções possíveis para C_{min}

A semântica de traduções possíveis para C_{min} é também bastante natural. Está ausente o axioma de propagação do bom-comportamento – já não há pois necessidade de três conectivos binários de cada tipo; está ausente o axioma que dá a versão paraconsistente da redução ao absurdo – já não há pois restrições sobre as próprias fórmulas bem-comportadas. Carecemos na verdade de outros conectivos binários, que "estraguem" sempre o resultado da operação, bem como das mesmas duas negações anteriores.

Usaremos destarte as matrizes da seguinte lógica $\mathcal{W}_3^{\odot}$ (cujo conjunto de matrizes expressáveis, notará o leitor, não contém nem está contido no conjunto de matrizes expressáveis em $\mathcal{W}_3$):

$\wedge_\odot$	**V**	**V⁻**	**F**
V	V⁻	V⁻	F
V⁻	V⁻	V⁻	F
F	F	F	F

$\vee_\odot$	**V**	**V⁻**	**F**
V	V⁻	V⁻	V⁻
V⁻	V⁻	V⁻	V⁻
F	V⁻	V⁻	F

$\to_\odot$	**V**	**V⁻**	**F**
V	V⁻	V⁻	F
V⁻	V⁻	V⁻	F
F	V⁻	V⁻	V⁻

	$\neg_L$	$\neg_C$
V	F	F
V⁻	F	V⁻
F	V	V

onde {V, V⁻} são os valores distinguidos.

A semântica de traduções possíveis, **TP**, para C_{min} se completa quando expomos o conjunto de restrições para as funções de tradução em ***T***. Este conjunto já funciona se o deixamos tão amplo quanto possível. Assim:

Tr 1. para variáveis atômicas *p*: $p{*}=p$.

Tr 2. para fórmulas do tipo $\neg A$: $(\neg A)^{*} \in \{\neg_{L} A^{*}, \neg_{C} A^{*}\}$.

Tr 3. para fórmulas do tipo $(A \# B)$, onde $\# \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$: $(A \# B)^{*} = A^{*} \#_{\odot} B^{*}$.

Já se pode demonstrar a corretude e a completude desta semântica, primeiro testando todas as traduções possíveis de cada axioma de C_{min} e verificando que a regra **(MP)** preserva validade, e em seguida mostrando como construir uma valoração em **TP** e uma função de tradução em ***T*** para toda valoração paraconsistente dada.

Usando esta semântica de traduções possíveis para C_{min}, podemos agora fornecer uma prova simples e direta do fato de que em C_{ω} e em C_{min} não há teoremas da forma $\neg G$. Confira:

Lema I. *Dada uma fórmula não-negada G, podemos encontrar uma valoração w em* **TP** *e uma função de tradução* $*$ *em* **T** *tais que* $w(G^{*}) = \mathrm{V}^{-}$.

Basta tomar $w(p) = \mathrm{V}^{-}$ para toda variável atômica *p*, e fazer $(\neg A)^{*} = \neg_{C} A^{*}$ para toda subfórmula $\neg A$ de *G*. Esta tradução é permitida por **Tr 2.** e o resultado esperado é uma consequência imediata das tabelas de $\mathcal{W}_{3}^{\odot}$.

Lema II. *Dada uma fórmula negada* $\neg G$*, podemos encontrar uma valoração w em* **TP** *e uma função de tradução* $*$ *em* **T** *tais que* $w((\neg G)^{*}) = \mathrm{F}$.

Tome a mesma valoração do **Lema I** acima e estenda a função de tradução descrita naquele lema fazendo $(\neg G)^{*} = \neg_{L} G^{*}$.

Teorema. *Em C_{min} não há teoremas da forma $\neg G$.*

Consequência imediata dos **Lemas I** e **II**.

Corolário. *Em C_ω não há teoremas da forma $\neg G$.*

É evidente, já que $Teo(C_\omega) \subset Teo(C_{min})$.

Uma outra demonstração alternativa deste **Teorema**, também bastante simples e direta, pode ser obtida se pudermos apresentar um modelo para C_{min} tal que não valide nenhuma fórmula negada. Um tal modelo existe: basta tomar as mesmas matrizes infinitárias que usamos no **Lema III** da seção **Nem C_ω nem C_{min} são finitamente trivializáveis**, no apêndice $\omega\times\omega$.

Podemos afirmar que a inexistência de fórmulas bem-comportadas em C_ω e em C_{min} constitui uma das causas deste fenômeno. Com efeito, pode-se provar para os cálculos C_n, $1 \leq n < \omega$, seguindo um raciocínio similar ao acima, que todo teorema da forma $\neg G$ deve necessariamente possuir uma subfórmula bem-comportada (cf. Carnielli & Marcos, 199?a).

Aqui, mais uma vez, como fizemos em **2.3.3.2** com o fim de aumentar a eficiência computacional, podemos diminuir o número de traduções de cada fórmula mais complexa, forçando novas restrições, eliminando redundâncias. Assim, ficamos com:

Tr 1. para variáveis atômicas p:

a. $p^* = p$;

b. $(\neg p)^* = \neg_C p$.

Tr 2. para fórmulas do tipo $A \# B$, onde $\# \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$: $(A \# B)^* = A^* \#_\odot B^*$.

Tr 3. para fórmulas do tipo $\neg(A \# B)$, onde $\# \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$:

$$(\neg(A \# B))^* \in \{\neg_L (A \# B)^*, \neg_C (A \# B)^*\}.$$

Tr 4. para fórmulas do tipo $\neg\neg A$:

a. $(\neg\neg A)^* = \neg_L (\neg A)^*$, se $(\neg A)^* = \neg_L A^*$;

b. $(\neg\neg A)^* \in \{\neg_L (\neg A)^*, \neg_C (\neg A)^*\}$, em caso contrário.

As demonstrações da corretude, da conveniência, da representabilidade e da completude desta semântica com relação ao cálculo C_{min} consistem em fáceis adaptações do caso de cada C_n (vide **2.3** e **3.3**).

4.5 Uma má notícia

Estragaríamos a conjetura de que C_{min} é o limite dos C_n's se pudéssemos encontrar, por exemplo, um teorema clássico não puramente positivo que fosse demonstrável em todo C_n, $n<\omega$, mas não em C_{min}. Tais teoremas existem, e podemos colher um exemplar entre as Leis de De Morgan. Mais especificamente, mostraremos a seguir que (**DM)**: $\neg(\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B})\rightarrow(\neg\boldsymbol{A}\vee\neg\boldsymbol{B})$ é uma fórmula com a propriedade acima.

Podemos tomar três diferentes sendas para verificar que a fórmula acima é demonstrável em cada C_n, $n<\omega$. A primeira é, claro, demonstrando-a; a segunda é por meio de sua quase-matriz, a terceira por meio de suas traduções possíveis. Experimentaremos cada uma destas alternativas.

4.5.1 A Via Láctea, *ou* O Estranho Caminho de Sintaxe

Para enfrentar a longa vereda sintática, é bom que nos armemos antes de alguns teoremas preliminares, e uma boa dose de paciência. Usaremos livremente o Teorema da Dedução e Modus Ponens sem necessariamente mencioná-los.

Teo I. $\neg A^p \vdash A^i\wedge\neg A^i$, *com* $0\leq i<p<\omega$, *em todo* C_n, $n\leq\omega$, *e em* C_{min}.

Lembremo-nos que A^p abrevia $\neg(A^{p-1}\wedge\neg A^{p-1})$. Se $i=p-1$, fazemos:

1. $\neg\neg(A^{p-1}\wedge\neg A^{p-1}) \vdash A^{p-1}\wedge\neg A^{p-1}$ por C_ω**(12)**.

Se $i<p-1$, fazemos:

2. $A^{p-1}\wedge\neg A^{p-1} \vdash \neg A^{p-1}$ por C_ω**(5)**,

e repetimos **1.**, desta vez para $\neg A^{p-1}$. Agora só temos que iterar este procedimento (**1.** e **2.**) por $(p-i-1)$ vezes.

PPC. $(\Gamma, A \vdash B), (\Gamma, \neg A \vdash B) \Rightarrow (\Gamma \vdash B)$, *em todo* C_n, $n \leq \omega$, *e em* C_{min}.

Para provar esta versão da prova por casos, basta usar $\boldsymbol{C_\omega}$**(8)** e $\boldsymbol{C_\omega}$**(11)**.

Teo II. $(A \vee B), (A \vee C) \vdash A \vee (B \wedge C)$, *em todo* C_n, $n < \omega$, *e em* C_{min}. Trivial.

Teo III. $\vdash \neg A \vee A^p$, *com* $0 \leq p < \omega$, *em todo* C_n, $n \leq \omega$, *e em* C_{min}.

Se $p = 1$, fazemos:

1. $A \wedge \neg A \vdash \neg A$	por $\boldsymbol{C_\omega}$**(5)**;
2. $A \wedge \neg A \vdash \neg A \vee A^\circ$	de **1.** por $\boldsymbol{C_\omega}$**(6)**;
3. $\neg(A \wedge \neg A) \vdash A^\circ$	pela definição de $^\circ$;
4. $\neg(A \wedge \neg A) \vdash \neg A \vee A^\circ$	de **3.** por $\boldsymbol{C_\omega}$**(7)**;
5. $\vdash \neg A \vee A^\circ$	de **2.** e **4.** por **PPC**.

Se $p > 1$, fazemos:

1. $A^{p-1} \wedge \neg A^{p-1} \vdash \neg A^{p-1}$	por $\boldsymbol{C_\omega}$**(5)**;
2. $\neg A^{p-1} \vdash A \wedge \neg A$	por **Teo I**, para $i = 0$;
3. $A \wedge \neg A \vdash \neg A \vee A^p$	por $\boldsymbol{C_\omega}$**(5)** e $\boldsymbol{C_\omega}$**(6)**;
4. $A^{p-1} \wedge \neg A^{p-1} \vdash \neg A \vee A^p$	de **1.** a **4.**;
5. $\neg(A^{p-1} \wedge \neg A^{p-1}) \vdash A^p$	pela definição de $^\circ$;
6. $\neg(A^{p-1} \wedge \neg A^{p-1}) \vdash \neg A \vee A^p$	de **5.** por $\boldsymbol{C_\omega}$**(7)**;
7. $\vdash \neg A \vee A^p$	de **4.** e **6.** por **PPC**.

Teo IV. $\vdash \neg A \vee A^{(q)}$, *com* $0 \leq q < \omega$, *em todo* C_n, $n < \omega$.

Basta repetir **Teo III** para todo *p* entre 1 e *q*, e usar **Teo II** *q* vezes.

RED. $(\Gamma \vdash_n B^{(n)}), (\Gamma \vdash_n A \to B), (\Gamma \vdash_n A \to \neg B) \Rightarrow (\Gamma \vdash_n \neg A)$, *em cada* C_n, *com* $n < \omega$. Consequência imediata do axioma $\boldsymbol{C_n}$**(9)**.

E, finalmente:

Teo V. $\vdash \neg(\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}) \to (\neg \boldsymbol{A} \vee \neg \boldsymbol{B})$, *em todo* C_n, $n < \omega$.

1. $(A\wedge B)^{(n)},\ \neg(A\wedge B),\ B\ \vdash\ (A\wedge B)^{(n)}$ óbvio;

2. $(A\wedge B)^{(n)},\ \neg(A\wedge B),\ B,\ A\ \vdash\ \neg(A\wedge B)$ óbvio;

3. $(A\wedge B)^{(n)},\ \neg(A\wedge B),\ B,\ A\ \vdash\ A\wedge B$ por C_ω**(3)**;

4. $(A\wedge B)^{(n)},\ \neg(A\wedge B),\ B\ \vdash\ \neg A$ de **1.** a **3.** por **RED**;

5. $(A\wedge B)^{(n)},\ \neg(A\wedge B),\ B\ \vdash\ \neg A\vee\neg B$ de **4.** por C_ω**(6)**;

6. $(A\wedge B)^{(n)},\ \neg(A\wedge B),\ \neg B\ \vdash\ \neg B$ óbvio;

7. $(A\wedge B)^{(n)},\ \neg(A\wedge B),\ \neg B\ \vdash\ \neg A\vee\neg B$ de **6.** por C_ω**(7)**;

8. $(A\wedge B)^{(n)},\ \neg(A\wedge B)\ \vdash\ \neg A\vee\neg B$ de **5.** e **7.** por **PPC**;

9. $(A\wedge B)^{(n)}\ \vdash\ \neg(A\wedge B)\rightarrow(\neg A\vee\neg B)$ de **8.** por **(TD)**;

10. $A^{(n)},\ B^{(n)}\ \vdash\ (A\wedge B)^{(n)}$ de C_n**(10)** e C_ω**(4)**, C_ω**(5)**;

11. $A^{(n)},\ B^{(n)}\ \vdash\ \neg(A\wedge B)\rightarrow(\neg A\vee\neg B)$ de **9.** e **10.**;

12. $\neg A,\ B^{(n)}\ \vdash\ \neg A$ óbvio;

13. $\neg A,\ B^{(n)}\ \vdash\ \neg A\vee\neg B$ de **12.** por C_ω**(6)**;

14. $\neg A,\ B^{(n)}\ \vdash\ \neg(A\wedge B)\rightarrow(\neg A\vee\neg B)$ de **6.** por C_ω**(1)**;

15. $B^{(n)}\ \vdash\ \neg(A\wedge B)\rightarrow(\neg A\vee\neg B)$ de **14.** e **11.** por **Teo IV** e C_ω**(8)**;

16. $\neg B\vdash\ \neg A\vee\neg B$ por C_ω**(7)**;

17. $\neg B\ \vdash\ \neg(A\wedge B)\rightarrow(\neg A\vee\neg B)$ de **16.** por C_ω**(1)**;

18. $\vdash\ \boldsymbol{\neg(A\wedge B)\rightarrow(\neg A\vee\neg B)}$ de **17.** e **15.** por **Teo IV** e C_ω**(8)**.

4.5.2 Um caminho, muitas vias

As quase-matrizes para a fórmula **(DM)**, em todo C_n, $n<\omega$, coincidem, pois esta fórmula não possui subfórmulas bem-comportadas (e, portanto, **QM 4.2.1.1** e **QM 4.2.2**, as únicas fontes de possível diferença – vide **3.2** – não se aplicam).

Ainda não apresentamos um procedimento de quase-matrizes para C_{min}. O leitor já suspeitará contudo que este pode ser obtido se fizermos uma simplificação do algoritmo dos C_n's. Com efeito, basta trocar o passo **QM 4.2** e os passos subsequentes simplesmente por:

QM 4.2. se A é da forma $\neg B$, então se B toma o valor 0, escreva 1; em caso contrário bifurque a linha e escreva 0 numa parte e 1 na outra.

Isso reflete o fato de que em C_{min} não há fórmulas bem-comportadas, e os conectivos binários sempre “estragam” o resultado da operação.

Por conseguinte, em C_{min} obteríamos a quase-matriz ao lado para a fórmula **(DM)**:

p	q	$p\wedge q$	$\neg p$	$\neg q$	$\boxed{1}$ $\neg(p\wedge q)$	$\boxed{2}$ $\neg p\vee\neg q$	$1\to 2$	
0	0	0	1	1	1	1	1	*1*
0	1	0	1	0	1	1	1	*2*
				1	1	1	1	*3*
1	0	0	0	1	1	1	1	*4*
			1	1	1	1	1	*5*
1	1	1	0	0	0	0	1	*6*
					1	0	**0**	*7*
				1	0	1	1	*8*
					1	1	1	*9*
			1	0	0	1	1	*10*
					1	1	1	*11*
				1	0	1	1	*12*
					1	1	1	*13*

Como única diferença, na quase-matriz de cada C_n, $n<\omega$, a linha ***7*** não existiria, pois não ocorreria a bifurcação entre ***6*** e ***7*** – e esta fórmula seria, portanto, válida.

Já as traduções possíveis para a fórmula **(DM)** são, em todo C_n, $n<\omega$, as seguintes:

1 $\neg_L(p\wedge_3 q)\to_3(\neg_C p\vee_3\neg_C q)$;

2 $\neg_C(p\wedge_3 q)\to_3(\neg_C p\vee_3\neg_C q)$;

o que resulta, como o leitor pode conferir (para as matrizes de $\mathcal{W}_3$, vide **2.3.1**), na tabela à direita.

p	q	**1**	**2**
V	V	**V**	**V**
V	V^-	**V^-**	**V^-**
V	F	**V**	**V**
V^-	V	**V^-**	**V^-**
V^-	V^-	**V^-**	**V^-**
V^-	F	**V^-**	**V^-**
F	V	**V**	**V**
F	V^-	**V^-**	**V^-**
F	F	**V**	**V**

Em C_{min}, as traduções possíveis para a fórmula **(DM)** são as seguintes:

1 $\neg_L(p\wedge_\odot q)\to_\odot(\neg_C p\vee_\odot\neg_C q)$;

2 $\neg_C(p\wedge_\odot q)\to_\odot(\neg_C p\vee_\odot\neg_C q)$;

o que resulta, como o leitor pode conferir, na tabela à esquerda.

p	q	**1**	**2**
V	V	V^-	**F**
V	V^-	V^-	V^-
V	F	V^-	V^-
V^-	V	V^-	V^-
V^-	V^-	V^-	V^-
V^-	F	V^-	V^-
F	V	V^-	V^-
F	V^-	V^-	V^-
F	F	V^-	V^-

4.5.3 O caminho do meio

As mesmas matrizes que usamos em **Da independência dos axiomas de C_n**, no apêndice ω×ω, a fim de demonstrar a independência do axioma que garante a propagação do bom-comportamento, C_n**(10)**, com relação aos demais axiomas de C_n, $n<\omega$, (e também de $C_n^{\neg\neg}$, $n<\omega$), servem também para demonstrar que a fórmula **(DM)** é independente dos axiomas de C_{min}. Basta notar que a Lei de Dummett assume por estas matrizes apenas valores distinguidos, e tomar como contra-exemplo para **(DM)** o valor ♈ em A e em B.

Daí concluímos também que **(DM)** também é independente dos axiomas de $C_n\backslash\{$ C_n**(10)** $\}$. Mas um resultado mais geral pode aqui ser enunciado. Considere todas as Leis de De Morgan:

(DM 1) $\neg(A\wedge B)\rightarrow(\neg A\vee\neg B)$

(DM 2) $\neg(A\wedge\neg B)\rightarrow(\neg A\vee B)$

(DM 3) $\neg(\neg A\wedge B)\rightarrow(A\vee\neg B)$

(DM 4) $\neg(\neg A\wedge\neg B)\rightarrow(A\vee B)$

(DM 5) $\neg(A\vee B)\rightarrow(\neg A\wedge\neg B)$

(DM 6) $\neg(A\vee\neg B)\rightarrow(\neg A\wedge B)$

(DM 7) $\neg(\neg A\vee B)\rightarrow(A\wedge\neg B)$

(DM 8) $\neg(\neg A\vee\neg B)\rightarrow(A\wedge B)$

(DM 9) $(\neg A\vee\neg B)\rightarrow\neg(A\wedge B)$

(DM 10) $(\neg A\vee B)\rightarrow\neg(A\wedge\neg B)$

(DM 11) $(A\vee\neg B)\rightarrow\neg(\neg A\wedge B)$

(DM 12) $(A\vee B)\rightarrow\neg(\neg A\wedge\neg B)$

(DM 13) $(\neg A\wedge\neg B)\rightarrow\neg(A\vee B)$

(DM 14) $(\neg A\wedge B)\rightarrow\neg(A\vee\neg B)$

(DM 15) $(A\wedge\neg B)\rightarrow\neg(\neg A\vee B)$

(DM 16) $(A\wedge B)\rightarrow\neg(\neg A\vee\neg B)$

Observe que a fórmula **(DM)** que vínhamos usando se trata de **(DM 1)**. Não é difícil verificar que **(DM 1)** a **(DM 4)** são as únicas fórmulas válidas em todo C_n, $n<\omega$, mas nenhuma delas é válida em C_{min}. As demais fórmulas não são válidas em nenhum C_n. Mais ainda, usando novamente as mesmas matrizes que mostram a independência de C_n**(10)** com relação aos demais axiomas de C_n verificamos que *nenhuma* das Leis de De Morgan é demonstrável em $C_n\backslash\{$ C_n**(10)** $\}$. Além disso, mantendo estas mesmas matrizes, com a única exceção da conjunção, que cambiamos para a tabela ao lado, C_n**(10)** passa a tomar sempre valores distinguidos, porém C_n**(9)** falha se A toma o

$\wedge$	♈	♉	♊
♈	♉	♉	♊
♉	♉	♉	♊
♊	♊	♊	♊

valor ♈ e B o valor ♉. Com estas novas matrizes podemos verificar que nenhuma das fórmulas **(DM 1)** a **(DM 4)** é demonstrável em $C_n \setminus \{\, \boldsymbol{C_n}\,\mathbf{(9)} \,\}$. (Em ambos os conjuntos de matrizes, **(DM 1)** falha se tanto A quanto B tomam o valor ♈ ; **(DM 2)** falha com os valores ♈ em A e ♊ em B; **(DM 3)** falha com os valores ♊ em A e ♈ em B; **(DM 4)** falha se tanto A quanto B tomam o valor ♊).

Para saber mais sobre os teoremas de C_n e de C_{min}, consulte o apêndice **ω**, **Quem é quem**.

4.5.4 Um pequeno passo para um homem…

Façamos um pequeno balanço do que obtivemos até aqui.

- C_ω não é o limite dos C_n’s, pois é incapaz de demonstrar uma parte do cálculo positivo clássico, como a Lei de Peirce, ou a Lei de Dummett. Por construção, C_ω seria no máximo uma espécie de “limite sintático”, a interseção das axiomáticas dos C_n’s – tal como expostas por da Costa (1963) ou na **Figura 1** (vide **2.1**) do presente trabalho.
- C_{min} não é o limite dos C_n’s, pois embora aquele cálculo torne possível demonstrar todos os esquemas do cálculo positivo clássico e, mais ainda, todos os esquemas livres de negação do cálculo clássico, ele não contém esquemas com negação tais como **(DM)**. Dada a semântica de valorações para C_{min}, poderíamos dizer no máximo que este cálculo é quase uma espécie de “limite semântico” para os C_n’s, ou uma espécie de cálculo paraconsistente minimal. Já sabemos até o momento que:

$$Teo\,(C_\omega) \subset Teo\,(C_{min}) \subset Teo\,(C_{Lim}) = \bigcap_{1\leq n<\omega} Teo\,(C_n)\,.$$

- Nenhuma das Leis de De Morgan é demonstrável em C_ω, em C_{min}, ou na hierarquia de sistemas resultante da retirada de quaisquer dos dois axiomas que tratam do bom-comportamento (isto é, $\{\boldsymbol{C_n}\,\mathbf{(9)}\}$ ou $\{\boldsymbol{C_n}\,\mathbf{(10)}\}$).

É claro que há muitos outros teoremas demonstráveis em todos os C_n, $n<\omega$. Um interessante exemplar destes teoremas é, como o leitor já saberá verificar por conta própria, $(\boldsymbol{A}\wedge\neg\boldsymbol{A})\rightarrow\neg\neg(\boldsymbol{A}\wedge\neg\boldsymbol{A})$, que, como é fácil ver, também não é demonstrável em C_{min}. Que outros teoremas serão comuns a toda a hierarquia C_n? A seguir mostraremos como responder a esta questão de forma definitiva.

Se o cálculo C_{min} perdeu para nós o interesse como um candidato ao limite dedutivo da hierarquia C_n, seu estudo pode ser motivado por seu próprio interesse, já que ele herda as propriedades interessantes de C_ω e ainda apresenta mais algumas, além de duas semânticas adequadas, simples e elegantes. Vale a pena investigar ainda a possibilidade de oferecermos para C_{min} uma semântica de mundos possíveis: sua negação aparenta um forte “sabor” modal.

Por outro lado, será C_{min} o limite de alguma outra hierarquia de cálculos paraconsistentes, tal como $C_n \backslash \{\boldsymbol{C_n}\,\mathbf{(10)}\}$, $n<\omega$?

A perguntas desta sorte só o tempo sabe a resposta.

4.6 O céu é o limite!

Em Carnielli & Marcos, 199?b, os resultados acerca de C_{min} que acima demos a conhecer são apresentados e discutidos. Além disso, neste artigo também se discute com mais profundidade o problema de se caracterizar C_{Lim}, o verdadeiro cálculo-limite da hierarquia C_n. Ora, veremos logo a seguir que, uma vez que já apresentamos semânticas de traduções possíveis para cada C_n, não é difícil num próximo passo apresentar uma semântica de traduções possíveis para C_{Lim}, e até mesmo um procedimento de decisão para este cálculo.

Dado um cálculo C_m, $1 \leq m < \omega$, já sabemos como atribuir-lhe uma semântica de traduções possíveis $\mathbf{PT}_m = < \mathcal{W}_3,\ \boldsymbol{T}_m >$ (foi o que fizemos nos capítulos **2.** e **3.**). Denotemos por $\vDash_m$ a relação de consequência semântica definida em $\mathbf{PT}_m$. Dada uma fórmula A, teríamos teoricamente um máximo de $2^n.3^{c+d+i}$ traduções possíveis, onde n é o número de negações presentes em A, c é o número de conjunções, d o de disjunções, i o de implicações. Coletemos tais traduções em um conjunto $TP(A)$. Recordemos que para cada C_m este conjunto pode ser restringido e diminuído pelas condições sobre as traduções em $\boldsymbol{T}_m$ (vide **2.3.3.2** e **3.3**). Portanto, se denotamos por $Tp(A, m)$ o conjunto de todas as traduções possíveis de uma fórmula A na semântica de traduções possíveis para o cálculo C_m, podemos garantir que, para cada $m<\omega$, vale

$$\textbf{(1)} \qquad Tp(A,\ m) \subseteq TP(A).$$

Fazendo uso das semânticas de traduções possíveis para C_n podemos agora explicitar $\mathbf{TP}_{Lim}$, uma semântica de traduções possíveis para C_{Lim}. Trata-se do par $<\{C_n\}_{1\leq n<\omega}, \{*_n\}_{1\leq n<\omega}>$, onde cada $*_n$ é uma função identidade das fórmulas de C_{Lim} nas fórmulas de C_n. A relação de consequência semântica em $\mathbf{TP}_{Lim}$ é evidentemente definida como

$$\Gamma \vDash_{\boldsymbol{Lim}} A \overset{def}{\Leftrightarrow} \text{ para toda } *_n\text{, temos } \Gamma^{*_n} \vDash_n A^{*_n}\text{, isto é, } \Gamma \vDash_n A.$$

Podemos assim nos referir ao cálculo C_{Lim} e às fórmulas nele validadas. Podemos mesmo apresentar um procedimento de decisão para as fórmulas de C_{Lim}. Sim, pois como consequência de **(1)**, o conjunto definido como

$$Tp(A,\ Lim) \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{1\leq n<\omega} Tp(A,\ n)$$

é finito. Daí, podemos efetivamente testar todas as suas fórmulas usando as matrizes de $\mathcal{W}_3$ (vide **2.3.1**).

A despeito da semântica de traduções possíveis acima apresentada para C_{Lim}, neste ponto diversas questões ainda são cabíveis:

- Como fornecer uma semântica paraconsistente para C_{Lim}? Será que devemos tomar emprestado das n-valorações (vide **3.2**) as condições **val[i] - val[v]**, **val[vii]** e **val[viii]**, excluindo apenas **val[vi]**? Note que se acrescentarmos a C_{min} a fórmula $(A\wedge\neg A)\rightarrow\neg\neg(A\wedge\neg A)$ como um novo esquema de axiomas, isto equivale a acrescentar **val[vii]** a sua semântica paraconsistente. Que esquema de axiomas poderíamos acrescentar de modo a ter também **val[viii]**?
- Se atentarmos às restrições $\mathbf{Tr}_n$ (vide **3.3**) notaremos que a única delas que depende do cálculo C_n em questão é **Tr 3.a**. Será que uma semântica de traduções possíveis alternativa para C_{Lim} pode ser obtida a partir das matrizes de $\mathcal{W}_3$ se tomarmos como restrições $\mathbf{Tr}_{Lim}$ exatamente as mesmas restrições $\mathbf{Tr}_n$ excluindo apenas **Tr 3.a**?
- Será possível definir uma negação forte em C_{Lim}? E como afinal caracterizar axiomaticamente este cálculo-limite?

5
Mais

Até agora não fomos muito além da primeira hierarquia de cálculos proposicionais paraconsistentes proposta por da Costa em 1963, os cálculos C_n, $1 \leq n < \omega$. Apresentamos, nos capítulos **2.** e **3.**, semânticas de traduções possíveis para estes cálculos, e abordamos, no capítulo **4.**, o problema de se definir um limite dedutivo para os cálculos desta hierarquia.

Mas por que justo *esta* hierarquia de cálculos paraconsistentes, e não alguma outra? Neste capítulo exploraremos alternativas simples aos cálculos C_n, e mostraremos como provê-las de semânticas de traduções possíveis. Em boa parte dos exemplos a seguir estaremos explorando *extensões*, versões mais fortes – isto é, que permitem demonstrar mais teoremas – dos cálculos C_n construídas de modo a melhor atender à exigência **dC[iv]** de da Costa (vide **2.**), segundo a qual os cálculos paraconsistentes propostos deveriam se aproximar ao máximo do cálculo proposicional clássico.

As axiomatizações dos cálculos apresentados a seguir, suas inter-relações, e os principais teoremas que os caracterizam e diferenciam são o assunto do apêndice ω, **Quem é quem**. Para a construção destes cálculos, confira em especial a **Figura 3** do referido apêndice.

5.1 Levo, dextro, bi

De início, discutamos brevemente a exigência **dC[i]** de da Costa (vide **2.**), segundo a qual seria desejável que nos cálculos paraconsistentes apresentados não fosse válido o esquema $\neg(A \wedge \neg A)$, o qual representaria o princípio da não-contradição.

Devemos notar antes de mais nada que este não deve ser um requisito essencial à definição de um cálculo paraconsistente. A não-validade deste esquema em um determinado cálculo lógico significaria, intuitivamente, que este cálculo poderia comportar contradições, ou proposições da forma $A\wedge\neg A$, que o tornariam inconsistente. Mas, como já discutimos no capítulo **1.**, a grande contribuição da paraconsistência é menos admitir a inconsistência do que manter a não-trivialidade. Posto de outra forma, indesejável mesmo em um cálculo paraconsistente seria a validade de um esquema tal como $A\rightarrow(\neg A\rightarrow B)$, a partir do qual, por Modus Ponens, qualquer proposição resultaria como consequência de duas fórmulas contraditórias. Porém, segundo a exigência **dC[ii]** de da Costa (vide **2.**) um tal esquema não deveria ser válido. É assim que podemos encontrar cálculos tais como J_3 (vide **2.3.1.1**) de caráter indiscutivelmente paraconsistente, mas nos quais o esquema $\neg(A\wedge\neg A)$ é válido, e o esquema $A\rightarrow(\neg A\rightarrow B)$ não o é.

Suponhamos contudo que desejemos atender a **dC[i]**, isto é, queremos definir cálculos em que não valham em geral fórmulas do tipo $\neg(X\wedge\neg X)$, as quais aqui abreviamos, como de costume, por X°, e as entendemos como afirmando que "a proposição X é bem-comportada". No cálculo C_1, esta exigência se materializa na forma de uma condição para a validade de certos métodos de inferência. O axioma C_1**(9)**, por exemplo, nos informa as circunstâncias sob as quais vale a *redução ao absurdo*: quando a assunção de certas premissas nos leva a concluir uma contradição como $A\wedge\neg A$ e, simultaneamente, a proposição A é bem-comportada. Como consequência, o esquema $A^{\circ}\wedge A\wedge\neg A$ é capaz de trivializar o cálculo C_1.

Denotemos agora por $X^{\square}$ as fórmulas do tipo $\neg(\neg X\wedge X)$. À primeira vista, X° e $X^{\square}$ parecem duas formas equivalentes de se formular o princípio da não-contradição. Daí, o esquema $A^{\square}\wedge A\wedge\neg A$ também deveria ser capaz de trivializar C_1, certo? Errado. Em **2.1.1.*j*** já chamamos a atenção para o fato de que A° e $A^{\square}$ *não são* fórmulas equivalentes em C_1 (cf. ainda o ex. **c** em **2.2.2.1.** e o ex. **c** em **2.3.3.6**), um fato que surge apenas como uma faceta de outro muito mais geral, qual seja, a falha em C_1 do Teorema da Substitutividade de Equivalentes (vide **2.1.1.*i***). Daí, podemos afirmar que o cálculo C_1 original considera como bem-comportadas apenas as fórmulas do tipo A°, mas não as fórmulas do tipo $A^{\square}$. Uma vez que em fórmulas do tipo A° a subfórmula A à esquerda aparece não-negada, estipularemos doravante denominar a hierarquia C_n *levoparaconsistente*, e renomearemos seus cálculos $\boldsymbol{C_n^\ell}$, $1 \leq n < \omega$.

É imediato propor, analogamente, uma hierarquia *dextroparaconsistente*, $\boldsymbol{C_n^d}$, $1 \leq n < \omega$, construída de forma tal que, por exemplo, no cálculo C_1^d desta nova hierarquia apenas as fórmulas do tipo $A^\square$, mas não as fórmulas do tipo A°, sejam bem-comportadas. Podemos apresentar os cálculos desta hierarquia simplesmente substituindo os esquemas $\boldsymbol{C_n}$**(9)** e $\boldsymbol{C_n}$**(10)** por

$\boldsymbol{C_n}$**(9$^{[n]}$)** $B^{[n]} \to ((A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A))$;

$\boldsymbol{C_n}$**(10$_{[\wedge]}$)** $(A^{[n]} \wedge B^{[n]}) \to ((A \wedge B)^{[n]} \wedge (A \vee B)^{[n]} \wedge (A \to B)^{[n]})$.

Em cada cálculo C_n^d, inversamente ao que acontecia no cálculo C_n^ℓ, $B^{[n]} \to B^{(n)}$ será um teorema, mas $B^{(n)} \to B^{[n]}$ não o será.

Aqui usaremos $X^{\underline{n}}$ para abreviar a fórmula $X^{\square\cdots\square}$, onde o símbolo $\square$ aparece n vezes, $n > 0$, e usaremos $X^{[n]}$ para abreviar a fórmula $X^\square \wedge \ldots \wedge X^{\underline{n}}$. Por convenção, para $n = 0$ podemos estipular que $X^{\underline{n}}$ e $X^{[n]}$ abreviem a própria fórmula X. Assim como na **Nota 1**, em **3.1**, definições recursivas poderiam ser aqui apresentadas (cf. o apêndice **ω**, **Axiomas**). Em um dado cálculo C_n^d, denominamos agora *negação forte* à fórmula $\neg A \wedge A^{[n]}$, e a abreviamos por $\sim^{[n]} A$.

É evidente que todos os resultados importantes acerca dos cálculos C_n^ℓ ainda valem em C_n^d, *mutatis mutandis*. Em particular, semânticas de valorações para C_n^d podem ser obtidas substituindo as condições **val[vi]** e **val[vii]** sobre uma n-valoração (vide **3.2**) por

val[vi]^d $v_n(A^{\underline{n-1}}) = v_n(\neg A^{\underline{n-1}}) \Leftrightarrow v_n(A^{\underline{n}}) = 0$;

val[vii]^d $v_n(A) = v_n(\neg A) \Leftrightarrow v_n(\neg A^\square) = 1$.

O procedimento de quase-matrizes correspondente (vide **3.2**) também deve ser modificado de forma conveniente. Dois passos serão alterados:

QM 4.2.1.1. se C é da forma $\neg D \wedge D$, escreva 1, senão (…)

QM 4.2.2. se B é da forma $\neg D^{n-1} \wedge D^{n-1}$, escreva 0, senão (…)

Por outro lado, semânticas de traduções possíveis para C_n^d podem ser obtidas a partir das mesmas matrizes de $\mathcal{W}_3$ (vide **2.3.1**) e modificando as seguintes restrições **Tr** apresentadas em **3.3**:

Tr 2.a se $(A\#B)$ é $(\neg A \wedge A)$, então $(\neg A \wedge A)^* = ((\neg A)^* \wedge_3 A^*)$, senão $(\ldots)$

Tr 3.a se $(A\#B)$ é $(\neg D^{(n-1)} \wedge D^{(n-1)})$, para algum D, então

$(\neg(\neg D^{(n-1)} \wedge D^{(n-1)}))^* = \neg_L (\neg D^{(n-1)} \wedge D^{(n-1)})^*$, senão $(\ldots)$

Tr 4.a se A é $(\neg D \wedge D)$, para algum D, e $(\neg A)^* = \neg_C (\neg D \wedge D)^*$, então

$(\neg\neg A)^* = \neg_C (\neg A)^*$, senão $(\ldots)$

Os cálculos da hierarquia C_n^d não são mais fortes do que os cálculos da hierarquia C_n^ℓ, mas podem ser vistos como alternativos a estes.

Podemos logo cogitar em uma outra hierarquia de cálculos, possuindo simultaneamente as propriedades de C_n^ℓ e de C_n^d. Denominemo-la *biparaconsistente*, e denotemos seus cálculos por C_n^b. Podemos axiomatizá-los simplesmente pelo acréscimo do esquema $\boldsymbol{C_n}$**(9$^{[n]}$)** aos axiomas de C_n^ℓ. Neste caso, vale $B^{(n)} \equiv B^{[n]}$, e o esquema $\boldsymbol{C_n}$**(10$_{[\wedge]}$)** é demonstrável.

As semânticas de valorações para os cálculos C_n^b, os procedimentos de quase-matrizes correspondentes e suas semânticas de traduções possíveis seguem trivialmente pela combinação das cláusulas e restrições que caracterizam C_n^ℓ e C_n^d.

É evidente que os cálculos da hierarquia C_n^b estendem os cálculos da hierarquia C_n^ℓ. No entanto, a biparaconsistência apresenta uma solução apenas parcial ao problema de se reconhecer uma fórmula bem-comportada, isto é, que respeite o princípio da não-contradição. Introduzimos decerto alguma simetria: em C_1^b, por exemplo, podemos substituir fórmulas do tipo B° por fórmulas do tipo $B^\square$ em todos os esquemas válidos em C_1^ℓ. Consideremos agora uma fórmula do tipo $(B \wedge (B \wedge \neg B))$. Esta fórmula é equivalente a $(B \wedge \neg B)$. Seria de se esperar portanto que o cálculo C_1^ℓ "reconhecesse" este fato e permitisse substituir fórmulas do tipo B° também por fórmulas do tipo $\neg(B \wedge (B \wedge \neg B))$. Isto porém não acontece, como o leitor pode facilmente verificar[1]: as fórmulas $(B \wedge (B \wedge \neg B))$ e $\neg(B \wedge (B \wedge \neg B))$ não são sequer equivalentes em C_1^ℓ. Esta é mais uma consequência desastrosa da falha em C_n^ℓ, bem como em C_n^d e C_n^b, $1 \leq n < \omega$, do Teorema da Substitutividade de Equivalentes (vide **2.1.1.*i***).

---

[1] Béziau, em comunicação pessoal, nos chamou a atenção para este fato.

5.2 Com acréscimo de negações

Recordemos agora a exigência **dC[iv]** de da Costa (vide **2.**). Ora, se nosso objetivo é aproximar ao máximo os cálculos da hierarquia C_n^ℓ ao cálculo clássico, não há porque deixar de acrescentar a eles como um novo esquema o axioma

(AN) $A \to \neg\neg A$,

que é a recíproca a $\boldsymbol{C_n}$**(12)**, permitindo o *acréscimo de negações*. De fato, na nova hierarquia assim gerada, cujos cálculos denominaremos por $\boldsymbol{C_n^{\neg\neg\ell}}$ e diremos ser *levoparaconsistentes com acréscimo de negações*, todos os axiomas são independentes entre si e o esquema $\neg(A \wedge \neg A)$ continua indemonstrável (vide o apêndice ω×ω, **Da independência dos axiomas de** $\boldsymbol{C_n^{\neg\neg}}$). Além disso, Carnielli demonstrou que nenhum cálculo desta hierarquia é caracterizável por matrizes finitas (vide o apêndice ω×ω, **Incaracterizabilidade por matrizes finitas**).

Já sabíamos que em cada cálculo C_n^ℓ o bom-comportamento se propaga na negação de fórmulas bem-comportadas (vide **2.1.1.*h***), isto é, que o esquema $A^{(n)} \to (\neg A)^{(n)}$ é demonstrável em C_n^ℓ (cf. ainda o ex. **b** em **2.2.2.1.** e o ex. **b** em **2.3.3.6**). Usando **(AN)**, não é difícil demonstrar agora a recíproca deste esquema em cada cálculo $C_n^{\neg\neg\ell}$, isto é, que

$$\boldsymbol{(\neg A)^{(n)} \to A^{(n)}}$$

é um teorema de $C_n^{\neg\neg\ell}$, embora não seja teorema de C_n^ℓ. Daí, se proposições negadas forem bem-comportadas neste cálculo, então elas já eram bem-comportadas mesmo "antes" da negação.

Pode-se facilmente verificar que uma semântica de valorações adequada a $C_n^{\neg\neg\ell}$ é obtida pela substituição da condição **val[v]** sobre uma *n*-valoração (vide **3.2**) por

val[v]$^{\neg\neg}$ $v_n(\neg\neg A) = 1 \iff v_n(A) = 1$.

Como consequência, a condição **val[vii]**: $v_n(A) = v_n(\neg A) \iff v_n(\neg A^\circ) = 1$ torna-se dispensável, pois deriva de **val[i]** e **val[v]**$^{\neg\neg}$.

Resulta daí que o procedimento de quase-matrizes correspondente é definido a partir daquele adequado a C_n^{ℓ} (vide **3.2**), substituindo **QM 4.2.1**, **QM 4.2.1.1** e **QM 4.2.1.2** simplesmente por

> **QM 4.2.1.** se B é da forma $\neg C$, então escreva 0 se C toma o valor 0, e escreva 1 em caso contrário (…)

Assim, por exemplo, se por um lado a quase-matriz para C_1^{ℓ} mostra que a fórmula $(\neg p)^\circ \to p^\circ$

			$\boxed{p^\circ}$			$\boxed{(\neg p)^\circ}$	
p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$	$\neg(p \wedge \neg p)$	$\neg\neg p$	$\neg p \wedge \neg\neg p$	$\neg(\neg p \wedge \neg\neg p)$	$(\neg p)^\circ \to p^\circ$
0	1	0	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1
	1	1	0	0	0	1	**0**
				1	1	0	1

é inválida neste cálculo, por outro lado a quase-matriz para $C_1^{\neg\neg\ell}$ mostra que esta mesma fórmula é válida neste outro cálculo:

			$\boxed{p^\circ}$			$\boxed{(\neg p)^\circ}$	
p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$	$\neg(p \wedge \neg p)$	$\neg\neg p$	$\neg p \wedge \neg\neg p$	$\neg(\neg p \wedge \neg\neg p)$	$(\neg p)^\circ \to p^\circ$
0	1	0	1	0	0	1	**1**
1	0	0	1	1	0	1	**1**
	1	1	0	1	1	0	**1**

Já a semântica de traduções possíveis adequada a $C_n^{\neg\neg\ell}$ pode ser obtida simplesmente substituindo as restrições **Tr 4.a**, **Tr 4.b** e **Tr 4.c** por

Tr 4. para fórmulas do tipo $\neg\neg A$: $(\neg\neg A)^* = \neg_C(\neg A)^*$.

De fato, esta restrição é requisito essencial para a demonstração da corretude desta semântica, uma vez que o novo axioma, **(AN)**: $A \to \neg\neg A$, falha se tomarmos w e $*$ tais que $w(A)=V^-$, $(\neg A)^* = \neg_C A^*$ e $(\neg\neg A)^* = \neg_L(\neg A)^*$. A prova da conveniência, como em **2.3.3.3**, é imediata, e a prova da representabilidade sofre apenas uma pequena e óbvia modificação em seu *grand finale* (vide **2.3.3.4**), que fica:

"Finalmente, tomando uma fórmula do tipo $\neg\neg A$, definimos $(\neg\neg A)^* = \neg_C(\neg A)^*$, definição compulsória devido a **Tr 4** e que, como é fácil ver, garante que $w((\neg\neg A)^*)\in\{\mathrm{V},\mathrm{V}^-\} \Leftrightarrow v(\neg\neg A)=1$."

Retomando a fórmula $(\neg p)^\circ \to p^\circ$, notamos que suas traduções possíveis em C_1^ℓ seriam duas (vide **2.3.3.2** e **2.3.3.6**):

➊ $\neg_L(\neg_C p \wedge_3 \neg_L \neg_C p) \to_3 \neg_L(p \wedge_3 \neg_C p)$;

➋ $\neg_L(\neg_C p \wedge_3 \neg_C \neg_C p) \to_3 \neg_L(p \wedge_3 \neg_C p)$.

p	**➊**	**➋**
V	V	**V**
V⁻	**F**	**V**
F	V	**V**

Ao testar sua validade obtemos a tabela à direita.

Notamos que ➊ falha quando tomamos $w(p)=\mathrm{V}^-$. Mas, segundo a nova formulação de **Tr 4.**, logo acima, a única tradução possível para a fórmula $(\neg p)^\circ \to p^\circ$ em $C_1^{\neg\neg\ell}$ é ➋. Assim, verificamos mais uma vez que esta fórmula é um teorema de $C_1^{\neg\neg\ell}$ mas não de C_1^ℓ.

Tal como fizemos em **5.1**, podemos agora facilmente definir a hierarquia $C_n^{\neg\neg d}$ de cálculos *dextroparaconsistentes com acréscimo de negações*, e também a hierarquia $C_n^{\neg\neg b}$ de cálculos *biparaconsistentes com acréscimo de negações*. Em ambos os casos, as modificações em ordem nos resultados acima são imediatas. Esta última hierarquia, $C_n^{\neg\neg b}$, foi estudada em detalhes em Carnielli, 1999.

5.3 Mais força

Em um artigo publicado em 1990, Béziau introduziu uma extensão ao cálculo C_1, a qual viria a ser denominada C_1^+ e seria estudada em detalhes em da Costa *et al.*, 1995b. Sua axiomática pode ser obtida a partir daquela para o cálculo C_1 apenas substituindo o axioma de propagação do bom-comportamento, C_1**(10)** (vide a **Figura 1**, em **3.1**) por outro "mais forte":

C_1**(10(∨))** $\quad (A^\circ \vee B^\circ) \to ((A\wedge B)^\circ \wedge (A\vee B)^\circ \wedge (A\to B)^\circ)$.

Desta feita, o bom-comportamento de fórmulas complexas do tipo $A\#B$, onde $\#\in\{\wedge,\vee,\to\}$, é garantido não a partir do bom-comportamento de *ambas* as suas partes, mas a partir do bom-comportamento de *pelo menos uma* delas. É evidente que o axioma C_1**(10)** é consequência de C_1**(10**(∨)**)**, C_1**(4)** e C_1**(6)**, usando **(TD)**.

De maneira análoga à construção da hierarquia C_n^ℓ (vide a **Figura 2**, em **3.1**), podemos construir agora a hierarquia $C_n^{+\ell}$, $1 \leq n < \omega$, bastando substituir C_n**(10)** por

C_n**(10**(∨)**)** $(A^{(n)} \vee B^{(n)}) \to ((A \wedge B)^{(n)} \wedge (A \vee B)^{(n)} \wedge (A \to B)^{(n)})$.

Como seria de se esperar, semânticas de valorações adequadas aos cálculos desta hierarquia podem facilmente ser obtidas pela substituição da condição **val[viii]** em **3.2** por

val[viii]$^+$ $v_n(A) \neq v_n(\neg A)$ **ou** $v_n(B) \neq v_n(\neg B) \Rightarrow v_n(A\#B) \neq v_n(\neg(A\#B))$, onde $\# \in \{\wedge, \vee, \to\}$.

O fato seguinte é uma consequência imediata de **val[i]** - **val[vii]** e **val[viii]**$^+$:

Lema. *Em cada cálculo* $C_n^{+\ell}$, *se alguma das subfórmulas de uma dada fórmula A é bem-comportada, então a fórmula A é ela própria bem-comportada.*

Segue trivialmente por indução sobre a complexidade da fórmula *A*.

Mais do que estender C_n^ℓ, os cálculos $C_n^{+\ell}$ se distinguem por uma propriedade realmente notável: é possível definir nestes últimos uma relação de equivalência distinta da identidade, o que não é o caso nos primeiros (vide **2.1.1.*i***). Assim, mesmo que ainda não valha em nenhum $C_n^{+\ell}$ o Teorema da Substitutividade de Equivalentes (valerá em algum cálculo paraconsistente que estenda C_n^ℓ?), já é possível definir nestes cálculos uma relação de congruência não-trivial, o que pode simplificar enormemente a sua algebrização.

Dizemos que duas fórmulas *A* e *B* são *logicamente equivalentes*, e denotamos por $A \equiv B$, se para toda valoração *v* temos $v(A)=v(B)$; dizemos que elas são *bem-equivalentes*, e denotamos por $A \simeq B$, se elas são ambas bem-comportadas e também são logicamente equivalentes.

Teorema. *A relação de boa-equivalência é uma relação de congruência em $C_n^{+\ell}$.*

Sejam dadas uma fórmula F e duas fórmulas A e B tais que $A \simeq B$ e tal que B seja uma subfórmula estrita de F. Provaremos por indução sobre a complexidade de F que: $F[A] \equiv F[B/A]$, onde $F[B/A]$ é a proposição que obtemos ao substituir A por B em F. No passo base de indução, supomos F uma fórmula atômica. Tal fórmula não tem subfórmulas estrita, e a propriedade acima é portanto vacuamente satisfeita.

Suponhamos agora, como hipótese de indução, **(HI)**, que para toda fórmula G de menor complexidade do que F valha $G[A] \equiv G[B/A]$. Suponhamos inicialmente que F é da forma $\neg D$, para alguma fórmula D. Pelo **Lema** anterior, sabemos que ambas $D[A]$ e $D[B/A]$, e também $F[A]$ e $F[B/A]$, devem ser bem-comportadas. Resta mostrar apenas que $F[A]$ e $F[B/A]$ são logicamente equivalentes. Suponhamos que não fossem: existiria então uma valoração v tal que $v(\neg D[A]) \neq v(\neg D[B/A])$. Assim, podemos ter, por exemplo, $v(\neg D[A])=0$ e $v(\neg D[B/A])=1$ – o outro caso é similar. Neste caso, por **val[iv]**, $v(D[A])=1$, e como $D[B/A]$ é bem-comportada, $v(D[B/A])=0$. Mas isto é absurdo, pois por **(HI)** temos que $D[A] \equiv D[B/A]$.

Os casos em que F é da forma $D\#E$, para alguma fórmula D e alguma fórmula E, com $\# \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, são tratados de maneira similar.

O **Teorema** anterior nos garante que o Teorema da Substitutividade de Equivalentes vale em $C_n^{+\ell}$ para fórmulas bem-equivalentes.

O procedimento de quase-matrizes correspondente aos cálculos $C_n^{+\ell}$ é obtido a partir daquele adequado a C_n^{ℓ} (vide **3.2** e **2.2.2**), substituindo **QM 4.2.3** por

QM 4.2.3. B deve ser da forma $D\#E$, onde $\# \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \equiv\}$ – a menos que D, $\neg D$, E e (E tomem todos o valor 1, escreva 0, em caso contrário bifurque a linha e escreva 0 numa parte e 1 na outra.

Graças ao axioma $\boldsymbol{C_n}$**(10**$(\vee)$**)**, são demonstráveis em cada $C_n^{+\ell}$ várias fórmulas não-demonstráveis em C_n^{ℓ}. Assim, por exemplo, enquanto em C_n^{ℓ} são válidas apenas 4 das 16 formas de De Morgan (vide **4.5.3**), em $C_n^{+\ell}$ são válidas ainda outras 4 (confira o apêndice ω, **Leis de De Morgan**, e seg.). Tomemos o seguinte exemplar de De Morgan: **(DM*)** $\neg(p\vee q)\rightarrow(\neg p\wedge\neg q)$; e calculemos suas quase-matrizes:

p	q	$p\vee q$	$\neg p$	$\neg q$	$\boxed{1}$ $\neg(p\vee q)$	$\boxed{2}$ $\neg p\wedge\neg q$	$1\rightarrow 2$	C_n^{ℓ}	$C_n^{+\ell}$
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	1	2	2
				1	0	1	1	3	3
					1	1	1	4	
1	0	1	0	1	0	0	1	5	4
			1	1	0	1	1	6	5
					1	1	1	7	
1	1	1	0	0	0	0	1	8	6
				1	0	0	1	9	7
					1	0	**0**	10	
			1	0	0	0	1	11	8
					1	0	**0**	12	
				1	0	1	1	13	9
					1	1	1	14	10

Note que, graças ao novo passo **QM 4.2.3**, a quase-matriz para **(DM*)** em $C_n^{+\ell}$ tem menos linhas do que a quase-matriz para esta mesma fórmula em C_n^{ℓ}.

Apresentaremos agora uma semântica de traduções possíveis para $C_n^{+\ell}$ que é, sob vários aspectos, mais simples do que todas as semânticas de traduções possíveis que vimos apresentando até o momento. Isto não deve surpreender o leitor, pois à medida que nos aproximamos mais da lógica clássica é de se esperar que o conjunto de diferentes matrizes necessárias para interpretar as fórmulas de um dado cálculo vá diminuindo, ao mesmo tempo em que as restrições sobre as funções de tradução vão se tornando mais estritas.

Consideremos portanto as matrizes da lógica $\mathcal{W}_3^{\oplus}$ a seguir (cujo conjunto de matrizes expressáveis, notará prontamente o leitor, está contido propriamente no conjunto de matrizes expressáveis em $\mathcal{W}_3$):

$\wedge_\oplus$	V	V⁻	F
V	V	V	F
V⁻	V	V⁻	F
F	F	F	F

$\vee_\oplus$	V	V⁻	F
V	V	V	V
V⁻	V	V⁻	V
F	V	V	F

$\to_\oplus$	V	V⁻	F
V	V	V	F
V⁻	V	V⁻	F
F	V	V	V

	$\neg_L$	$\neg_C$
V	F	F
V⁻	F	V⁻
F	V	V

onde {V, V⁻} são os valores distinguidos. Os conectivos binários acima refletem o fato de que a operação por eles realizada só "estraga" o resultado quando ambos os componentes são "mal-comportados".

Consideremos ainda o seguinte conjunto de restrições para as funções de tradução em ***T***:

Tr 1. para variáveis atômicas p:

a. $p^* = p$;

b. $(\neg p)^* = \neg_C p$.

Tr 2. para fórmulas do tipo $A \# B$, onde $\# \in \{\wedge, \vee, \to\}$: $(A \# B)^* = A^* \#_\oplus B^*$.

Tr 3. para fórmulas do tipo $\neg(A \# B)$, onde $\# \in \{\wedge, \vee, \to\}$:

a. se $(A \# B)$ é $(D^{(n-1)} \wedge \neg D^{(n-1)})$, para algum D, então $(\neg(D^{(n-1)} \wedge \neg D^{(n-1)}))^* = \neg_L (D^{(n-1)} \wedge \neg D^{(n-1)})^*$, senão

b. $(\neg(A \# B))^* = \neg_L (A \# B)^*$, se $(\neg A)^* = \neg_L A^*$ ou $(\neg B)^* = \neg_L B^*$;

c. $(\neg(A \# B))^* \in \{\neg_L (A \# B)^*, \neg_C (A \# B)^*\}$, em caso contrário.

Tr 4. para fórmulas do tipo $\neg\neg A$:

a. se A é $(D \wedge \neg D)$, para algum D, e $(\neg A)^* = \neg_C (D \wedge \neg D)^*$, então $(\neg\neg A)^* = \neg_C (\neg A)^*$, senão

b. $(\neg\neg A)^* = \neg_L (\neg A)^*$, se $(\neg A)^* = \neg_L A^*$;

c. $(\neg\neg A)^* \in \{\neg_L (\neg A)^*, \neg_C (\neg A)^*\}$, em caso contrário.

Não é difícil verificar agora a conveniência e a representabilidade desta semântica de traduções possíveis proposta para $C_n^{+\ell}$, $1 \le n < \omega$.

Retomando o exemplo anterior, a fórmula **(DM*)**: $\neg(p\vee q)\to(\neg p\wedge\neg q)$, notamos que em C_n^{ℓ} suas traduções possíveis, eliminadas as redundâncias, seriam as seguintes (vide **2.3.3.2**, **2.3.3.6** e **3.3**):

① $\neg_L(p\vee_3 q)\to_3(\neg_C p\wedge_1\neg_C q)$

② $\neg_L(p\vee_3 q)\to_3(\neg_C p\wedge_2\neg_C q)$

③ $\neg_L(p\vee_3 q)\to_3(\neg_C p\wedge_3\neg_C q)$

④ $\neg_C(p\vee_1 q)\to_3(\neg_C p\wedge_1\neg_C q)$

⑤ $\neg_C(p\vee_1 q)\to_3(\neg_C p\wedge_2\neg_C q)$

⑥ $\neg_C(p\vee_2 q)\to_3(\neg_C p\wedge_1\neg_C q)$

⑦ $\neg_C(p\vee_2 q)\to_3(\neg_C p\wedge_2\neg_C q)$

⑧ $\neg_C(p\vee_3 q)\to_3(\neg_C p\wedge_3\neg_C q)$

E o resultado será o seguinte:

p	***q***	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V$^-$	V	V	V	V	V	**F**	**F**	**F**
V	F	V	V	V	V	V	V	V	V
V$^-$	V	V	V	V	**F**	**F**	V	V	**F**
V$^-$	V$^-$	V$^-$	V$^-$	V$^-$	V$^-$	V$^-$	V$^-$	V$^-$	V$^-$
V$^-$	F	V$^-$	V	V$^-$	V$^-$	V$^-$	V$^-$	V	V$^-$
F	V	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V$^-$	V	V$^-$	V$^-$	V	V$^-$	V$^-$	V$^-$	V$^-$
F	F	V	V	V	V	V	V	V	V

Já em $C_n^{+\ell}$ esta mesma fórmula terá apenas duas traduções possíveis:

❶ $\neg_L(p\vee_\oplus q)\to_\oplus(\neg_C p\wedge_\oplus\neg_C q)$

❷ $\neg_C(p\vee_\oplus q)\to_\oplus(\neg_C p\wedge_\oplus\neg_C q)$

E o resultado será este à direita:

p	***q***	❶	❷
V	V	**V**	**V**
V	V$^-$	**V**	**V**
V	F	**V**	**V**
V$^-$	V	**V**	**V**
V$^-$	V$^-$	**V**	**V$^-$**
V$^-$	F	**V**	**V**
F	V	**V**	**V**
F	V$^-$	**V**	**V**
F	F	**V**	**V**

Confirmamos assim o fato de que **(DM*)** é um teorema de cada $C_n^{+\ell}$, mas não é teorema de nenhum C_n^{ℓ}.

Analogamente ao que fizemos em **5.1** e em **5.2**, podemos definir, além da hierarquia $C_n^{+\ell}$ tratada acima, as hierarquias C_n^{+d} e C_n^{+b}, bem como as hierarquias $C_n^{+\neg\neg\ell}$, $C_n^{+\neg\neg d}$ e $C_n^{+\neg\neg b}$, para $1\leq n<\omega$. As modificações em ordem para fornecer semânticas de valorações e de traduções possíveis para todos estes cálculos já devem ser evidentes ao leitor.

Usando as mesmas matrizes apresentadas no apêndice $\omega\times\omega$, **A um passo da lógica clássica**, podemos facilmente verificar que o esquema $\neg(A\wedge\neg A)$ não é demonstrável em nenhum cálculo de qualquer destas hierarquias. Além disso, nenhum destes cálculos é caracterizável por matrizes finitas (vide o apêndice $\omega\times\omega$, **Incaracterizabilidade por matrizes finitas**).

5.4 Limites

Tendo caracterizado acima doze hierarquias distintas de cálculos paraconsistentes atendendo às exigências **dC[i]**, **dC[ii]** e **dC[iv]** de da Costa, vale a pena agora nos perguntarmos acerca de cálculos "minimais" e "maximais" possuindo ainda esta propriedade. É o que faremos brevemente a seguir.

5.4.1 Inferiores

No capítulo anterior apresentamos C_{min}, que funciona como uma espécie de limite dedutivo inferior para todas as hierarquias até aqui estudadas. Mas já que metade destas hierarquias – quais sejam, os cálculos $C_n^{\neg\neg\ell}$, $C_n^{\neg\neg d}$, $C_n^{\neg\neg b}$, $C_n^{+\neg\neg\ell}$, $C_n^{+\neg\neg d}$ e $C_n^{+\neg\neg b}$ – conta também com o axioma **(AN)**: $A\to\neg\neg A$, podemos caracterizar para os seus cálculos um outro limite dedutivo inferior, $C_{min}^{\neg\neg}$, obtido a partir de C_{min} pelo simples acréscimo do axioma **(AN)**.

Neste caso, é muito fácil ver que uma semântica de valorações adequada a $C_{min}^{\neg\neg}$ pode ser obtida simplesmente substituindo a condição **val[v]** sobre uma valoração para C_{min} (vide **4.2**) por

val[v]$^{\neg\neg}$ $\quad v(\neg\neg A)=1 \;\Leftrightarrow\; v(A)=1\,,$

e uma semântica de traduções possíveis adequada a $C_{min}^{\neg\neg}$ pode ser obtida usando ainda as matrizes de $\mathcal{W}_3^{\odot}$ (vide **4.4**) mas substituindo a restrição **Tr 5.** sobre as traduções por

Tr 5. para fórmulas do tipo $\neg\neg A$: $(\neg\neg A)^*=\neg_C(\neg A)^*$.

Podemos ainda, exatamente como fizemos em **4.6**, atacar diretamente o problema de caracterizar os verdadeiros cálculos-limites das hierarquias supra-expostas. Para cada hierarquia estudada, podemos usar as semânticas de traduções possíveis de seus cálculos para compor uma semântica de traduções possíveis para seu cálculo-limite, e fornecer como consequência um procedimento de decisão para as suas fórmulas.

5.4.2 Superiores

Em 1973, Sette introduziu o cálculo paraconsistente $\mathcal{P}^1$, o qual funciona como um limite dedutivo superior para metade das hierarquias até aqui estudadas – quais sejam, os cálculos C_n^ℓ, C_n^d, C_n^b, $C_n^{+\ell}$, C_n^{+d}, C_n^{+b}. De fato, no cálculo $\mathcal{P}^1$ não vale o esquema **(AN)**: $\boldsymbol{A \rightarrow \neg\neg A}$, mas valem todos os esquemas das hierarquias mencionadas – e, portanto, $\mathcal{P}^1$ estende todos os seus cálculos – e valem ainda todos os esquemas clássicos desde que aplicados a fórmulas não-atômicas. Pode-se mostrar ainda que $\mathcal{P}^1$ é *maximal* (vide o apêndice $\omega+\omega$, **A segunda via**), isto é, se à sua axiomática acrescentarmos qualquer teorema do cálculo proposicional clássico, **CP**, que não seja um teorema de $\mathcal{P}^1$, então o sistema resultante é o próprio **CP**.

$\mathcal{P}^1$ atende às exigências **dC[i]** e **dC[ii]** de da Costa (vide **2.**): este cálculo é paraconsistente e a fórmula $\neg(A \wedge \neg A)$ não é nele válida. Além disso, a exigência **dC[iv]** é levada, de certa forma, às últimas consequências: por ser maximal, o cálculo $\mathcal{P}^1$ não pode ser mais aproximado de **CP**.

Note que em **2.3.1.1** já havíamos apresentado as matrizes do cálculo paraconsistente $\mathcal{J}_3$, sobre cujas capacidade de expressão e maximalidade discorremos nos primeiros dois terços do apêndice $\omega+\omega$, **Algumas lógicas trivalentes**. No entanto, como bem apontamos no apêndice ω, **Quem é quem**, $\mathcal{J}_3$ não estende os cálculos das hierarquias acima apresentadas – em particular, $\boldsymbol{C_n}$**(9)** e $\boldsymbol{C_n(9^{[n]})}$ não são teoremas de $\mathcal{J}_3$.

5.4.2.1 O cálculo $\mathcal{P}^1$

Ao apresentar o cálculo $\mathcal{P}^1$, Sette (1973) partiu da seguinte axiomatização:

$\mathcal{P}^1$(1) $A\to(B\to A)$

$\mathcal{P}^1$(2) $(A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))$

$\mathcal{P}^1$(3) $(\neg A\to\neg B)\to((\neg A\to\neg\neg B)\to A)$

$\mathcal{P}^1$(4) $\neg(A\to\neg\neg A)\to A$

$\mathcal{P}^1$(5) $(A\to B)\to\neg\neg(A\to B)$

e tomou como única regra de inferência Modus Ponens **(MP)**: $A,\ A\to B\ /\ B$. Fazemos notar, contudo, que é possível demonstrar o axioma **$\mathcal{P}^1$(4)** a partir dos demais (vide o apêndice $\omega+\omega$, **Um axioma a menos**).

Sette mostrou que $\mathcal{P}^1$ pode ser caracterizado pelo seguinte conjunto de matrizes:

$\to$	**V**	**V***	**F**
V	V	V	F
V*	V	V	F
F	V	V	V

	$\neg$
V	F
V*	V
F	V

onde {V, V*} são os valores distinguidos.

Dadas fórmulas A e B na linguagem de $\mathcal{P}^1$, podemos definir a *negação forte*, a *conjunção* e a *disjunção* em $\mathcal{P}^1$ respectivamente como

$$\sim A \overset{\text{def}}{=} \neg(\neg A\to A);$$

$$A\wedge B \overset{\text{def}}{=} \neg(A\to\sim B);$$

$$A\vee B \overset{\text{def}}{=} \sim A\to B,$$

suas tabelas sendo portanto as seguintes:

	~
V	F
V*	F
F	V

$\wedge$	**V**	**V***	**F**
V	V	V	F
V*	V	V	F
F	F	F	F

$\vee$	**V**	**V***	**F**
V	V	V	V
V*	V	V	V
F	V	V	F

Ora, é muito fácil ver que uma axiomatização alternativa para $\mathcal{P}^1$ é obtida, por exemplo, ao adicionarmos aos axiomas de $C_1^{\flat}$ os esquemas $(\neg A)^{\circ}$ e $(A\#B)^{\circ}$, com $\# \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, os quais nos dizem, intuitivamente, que *fórmulas complexas são bem-comportadas* (vide o apêndice $\omega+\omega$, **A segunda via**). Nesta alternativa não apenas a implicação e a negação mas também a conjunção e a disjunção são tomadas como conectivos primitivos. Uma prova direta da completude de $\mathcal{P}^1$ com relação a esta nova axiomatização é possível (vide mais uma vez o apêndice $\omega+\omega$, **A segunda via**).

Carnielli & Lima-Marques (1999), propuseram uma nova semântica para $\mathcal{P}^1$, dita *semântica de sociedade*. Em computação e inteligência artificial, podemos pensar em um agente inteligente como um aplicativo capaz de executar um procedimento complexo, geralmente em um ambiente distribuído, usando informação armazenada e mecanismos de inferência. O que acontecerá quando pusermos vários destes agentes a colaborar entre si, isto é, quando os tomarmos em sociedade? A idéia subjacente às semânticas de sociedade é de que embora um dado conjunto de agentes possa utilizar uma lógica comum **L**, a lógica interna de sua sociedade pode ser distinta, digamos **L'**. Podemos imaginar que o germe destas idéias já era manifesto por Jaśkowski (1969) quando este propusera justificar sua busca de sistemas dedutivos contraditórios em termos da combinação de diferentes opiniões em um único sistema. Mostraremos a seguir como o cálculo $\mathcal{P}^1$ pode ser visto como a lógica subjacente a um certo tipo de sociedade entre agentes clássicos.

Pensaremos aqui uma *sociedade* como um conjunto enumerável mas não necessariamente finito de agentes $\{Ag_1, Ag_2, \ldots\}$, onde cada *agente* Ag_i compõe-se de uma coleção de variáveis proposicionais Var_i, e uma lógica subjacente $\mathbf{L}_i$. Dizemos que um agente Ag_i *aceita* uma fórmula A, e denotamos por $Ag_i \vDash A$, se toda valoração em $\mathbf{L}_i$ que satisfaz as variáveis em Var_i satisfaz também A.

Consideraremos aqui o caso em que todos os agentes estão submetidos às leis do cálculo proposicional clássico, **CP**. Uma sociedade é dita *biassertiva* se a sua negação não for um conectivo verofuncional, isto é, se o valor de verdade de $\neg A$ não depender funcionalmente do valor de verdade de A, donde certas fórmulas podem ocorrer como primitivas tanto quanto suas negações. Uma sociedade S é dita *aberta*, e denotada por S^+, se aceita uma fórmula no caso em que qualquer de seus agentes a aceita. Daí, dada uma proposição atômica p e dados dois agentes Ag_1 e Ag_2 tais que $Ag_1 \vDash p$ e $Ag_2 \vDash \neg p$, então qualquer sociedade aberta que contenha estes dois agentes aceita ambas as proposições p e $\neg p$. A *relação de satisfatibilidade* em uma sociedade biassertiva aberta (**SBA**), denotada por $S^+ \vDash$, é definida como:

(S1.1)	$S^+ \vDash p$	se existe um agente Ag_i em S tal que $Ag_i \vDash p$;
(S1.2)	$S^+ \vDash \neg p$	se existe um agente Ag_i em S tal que $Ag_i \nvDash p$;
(S2.1)	$S^+ \vDash \neg A$	se $S^+ \nvDash A$, para A não-atômica;
(S2.2)	$S^+ \vDash A \wedge B$	se $S^+ \vDash A$ e $S^+ \vDash B$;
(S2.3)	$S^+ \vDash A \vee B$	se $S^+ \vDash A$ ou $S^+ \vDash B$;
(S2.4)	$S^+ \vDash A \rightarrow B$	se $S^+ \nvDash A$ ou $S^+ \vDash B$.

Um interessante resultado sobre a cardinalidade de **SBA**s pode ser facilmente demonstrado. Dada uma **SBA** qualquer S^+ é sempre possível construir uma **SBA** S_2^+ com no máximo dois agentes tal que $S_2^+ \vDash A$ sse $S^+ \vDash A$ para toda fórmula A. Basta definir o agente Ag_1 tal que $Var_1 = \{p \colon S^+ \vDash p\}$, e o agente Ag_2 tal que $Var_2 = \{p \colon S^+ \nvDash \neg p\}$, e verificar que $S_2 = \{Ag_1, \ Ag_2\}$ é uma **SBA** com a propriedade desejada.

Dizemos que a fórmula F é uma *tautologia aberta* se para toda **SBA** S^+ vale $S^+ \vDash F$. Agora é fácil ver por exemplo que as fórmulas $\neg(p \wedge \neg p)$ e $p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$ não são tautologias abertas: basta tomar Ag_1 e Ag_2 tais que $Var_1 = \{p\}$ e $Var_2 = \varnothing$, e tomar $S^+ = \{Ag_1, \ Ag_2\}$. Neste caso, de **(S1.1)** e de **(S1.2)** temos $S^+ \vDash p$, $S^+ \vDash \neg p$ e $S^+ \vDash \neg q$, de **(S2.2)** e de **(S2.4)** temos $S^+ \vDash p \wedge \neg p$ e $S^+ \nvDash \neg p \rightarrow q$, e de **(S2.1)** e **(S2.4)** temos $S^+ \nvDash \neg(p \wedge \neg p)$ e $S^+ \nvDash p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$.

Podemos mostrar agora que as tautologias abertas coincidem com os teoremas de $\mathcal{P}^1$:

Caracterização I. (Carnielli & Lima-Marques) *A lógica das* **SBA***s é* $\mathcal{P}^1$.

(Conveniência) Dada uma **SBA** S^+ já aprendemos como construir uma **SBA** $S_2=\{Ag_1,\ Ag_2\}$ com exatamente dois agentes tal que $S_2^+ \vDash A$ sse $S^+ \vDash A$ para toda fórmula A. Definimos agora a função $v\colon \mathrm{F{\scriptsize OR}}(\mathcal{P}^1) \to \{\mathrm{V},\ \mathrm{V}^*,\ \mathrm{F}\}$ tal que, para toda fórmula A de $\mathcal{P}^1$:

- $v(A)=\mathrm{V}$ se $S_2^+ \vDash A$ e $S_2^+ \nvDash \neg A$;
- $v(A)=\mathrm{V}^*$ se $S_2^+ \vDash A$ e $S_2^+ \vDash \neg A$;
- $v(A)=\mathrm{F}$ se $S_2^+ \nvDash A$ e $S_2^+ \vDash \neg A$.

Das restrições acima é evidente que, para toda fórmula A, $v(A)\in\{\mathrm{V},\ \mathrm{V}^*\}$ sse $S_2^+ \vDash A$. Basta verificar agora, por indução sobre a complexidade das fórmulas, que v define uma valoração em $\mathcal{P}^1$ segundo as matrizes trivalentes que apresentamos.

(Representabilidade) Reciprocamente, dada uma valoração v em $\mathcal{P}^1$, mostramos como definir uma **SBA** S^+ tal que $S^+ \vDash A$ sse $v(A)\in\{\mathrm{V},\ \mathrm{V}^*\}$ para toda fórmula A em $\mathcal{P}^1$. Definamos inicialmente os conjuntos:

$$X=\{p\colon\ v(p)=\mathrm{V}\},\qquad Y=\{p\colon\ v(p)=\mathrm{V}^*\},\qquad Z=\{p\colon\ v(p)=\mathrm{F}\},$$

e definamos a sociedade $S=\{Ag_1,\ Ag_2\}$, onde $Var_1=X\cup Y$ e $Var_2=X$. Como v é um morfismo, basta verificar agora, para variáveis atômicas p, que

- $v(p)=\mathrm{V}$ sse $S^+ \vDash p$ e $S^+ \nvDash \neg p$;
- $v(p)=\mathrm{V}^*$ sse $S^+ \vDash p$ e $S^+ \vDash \neg p$;
- $v(p)=\mathrm{F}$ sse $S^+ \nvDash p$ e $S^+ \vDash \neg p$.

Não é difícil ver contudo que as semânticas de sociedade não são mais do que casos muito particulares de semânticas de traduções possíveis. Considere neste caso a estrutura de traduções possíveis **TP** dada por $<$**CP**, ***T***$>$, onde as funções de tradução $*\colon \mathrm{F{\scriptsize OR}}(\mathcal{P}^1)\to\mathrm{F{\scriptsize OR}}(\mathbf{CP})$ em ***T*** estão sujeitas às seguintes restrições:

Tr 1. para variáveis atômicas, $p^*=\top$ ou $p^*=\bot$;

Tr 2. $(\neg A)^*=\neg A^*$;

Tr 3. $(A\#B)^*=A^*\#B^*$, onde $\#\in\{\wedge,\vee,\to\}$.

Os símbolos *verum*, $\top$, e *falsum*, $\bot$, podem ser tomados como primitivos em **CP**, mas também podem ser definidos, respectivamente, como uma abreviação para fórmulas quaisquer do tipo $A \to A$ e $\neg(A \to A)$.

Dadas duas funções de tradução, $*_i$ e $*_j$, definimos agora a *relação de forçamento bilocal*, denotada por $\vDash^{*_i *_j}$, como:

(B1.1) $\vDash^{*_i *_j} p$ se $\vDash_{\mathbf{CP}} p^{*_i}$ ou $\vDash_{\mathbf{CP}} p^{*_j}$, isto é, se $p^{*_i} = \top$ ou $p^{*_j} = \top$;

(B1.2) $\vDash^{*_i *_j} \neg p$ se $\nvDash_{\mathbf{CP}} p^{*_i}$ ou $\nvDash_{\mathbf{CP}} p^{*_j}$, isto é, se $p^{*_i} = \bot$ ou $p^{*_j} = \bot$;

(B2.1) $\vDash^{*_i *_j} \neg A$ se $\nvDash^{*_i *_j} A$, para A não-atômica;

(B2.2) $\vDash^{*_i *_j} A \wedge B$ se $\vDash^{*_i *_j} A$ e $\vDash^{*_i *_j} B$;

(B2.3) $\vDash^{*_i *_j} A \vee B$ se $\vDash^{*_i *_j} A$ ou $\vDash^{*_i *_j} B$;

(B2.4) $\vDash^{*_i *_j} A \to B$ se $\nvDash^{*_i *_j} A$ ou $\vDash^{*_i *_j} B$.

Para toda fórmula F em $\mathcal{P}^1$, definimos a *relação de forçamento global*, denotada por $\vDash_{\mathbf{TP}}$, como:

$$\vDash_{\mathbf{TP}} F \Leftrightarrow \text{para quaisquer } *_i \text{ e } *_j \text{ vale } \vDash^{*_i *_j} F.$$

Caso $\vDash_{\mathbf{TP}} F$ dizemos que F é uma **TP**-*tautologia*. É fácil ver, por exemplo, que as fórmulas $\neg(p \wedge \neg p)$ e $p \to (\neg p \to q)$ não são **TP**-tautologias: basta tomar $*_i$ e $*_j$ tais que $p^{*_i} = \top$, $p^{*_j} = \bot$, $q^{*_i} = \bot$ e $q^{*_j} = \bot$. Neste caso, de **(B1.1)** e de **(B1.2)** temos $\vDash^{*_i *_j} p$, $\vDash^{*_i *_j} \neg p$ e $\vDash^{*_i *_j} \neg q$, de **(B2.2)** e de **(B2.4)** temos $\vDash^{*_i *_j} p \wedge \neg p$ e $\nvDash^{*_i *_j} \neg p \to q$, e de **(B2.1)** e **(B2.4)** temos $\nvDash^{*_i *_j} \neg(p \wedge \neg p)$ e $\nvDash^{*_i *_j} p \to (\neg p \to q)$.

É fácil ver daí que as **TP**-tautologias coincidem com as tautologias abertas:

Caracterização II. **TP** *fornece uma semântica de traduções possíveis para* $\mathcal{P}^1$.

(Conveniência) Sejam dadas duas funções de tradução $*_i$ e $*_j$ em $\boldsymbol{T}$. Definimos uma sociedade $S = \{Ag_1, Ag_2\}$ tal que, para toda variável atômica p, $p \in Var_1 \Leftrightarrow p^{*_i} = \top$, e $p \in Var_2 \Leftrightarrow p^{*_j} = \top$. Basta verificar agora que S^+ é uma **SBA**.

(Representabilidade) Reciprocamente, seja dada uma **SBA** S^+. Sabemos como construir a partir dela uma **SBA** $S_2^+ = \{Ag_1, Ag_2\}$ com exatamente dois agentes tal que $S_2^+ \vDash A$ sse $S^+ \vDash A$ para toda fórmula A. Definimos duas funções $*_i$ e $*_j$ tais que para toda variável atômica p, $p^{*_i} = \top \Leftrightarrow p \in Var_1$, e $p^{*_j} = \top \Leftrightarrow p \in Var_2$. Basta verificar agora que $*_i$ e $*_j$ respeitam às restrições **Tr 1** a **Tr 3**.

É interessante observar que podemos oferecer também uma semântica de mundos possíveis para $\mathcal{P}^1$. Definimos um *modelo* **MP** como a tripla $<\boldsymbol{M}, R, P>$, onde o conjunto $\boldsymbol{M}$ de mundos é não-vazio, R é uma relação reflexiva binária em $\boldsymbol{M}$, e P uma função que leva as variáveis atômicas da linguagem de $\mathcal{P}^1$ a subconjuntos de $\boldsymbol{M}$. Dado um modelo **MP** definimos a noção de *verdade no mundo possível m em* **MP**, denotada por $m \vDash_{\mathbf{MP}}$, como:

(P1.1)	$m \vDash_{\mathbf{MP}} p$	se $m \in P(p)$;
(P1.2)	$m \vDash_{\mathbf{MP}} \neg p$	se existe $m' \in \boldsymbol{M}$ tal que mRm' e $m' \notin P(p)$;
(P2.1)	$m \vDash_{\mathbf{MP}} \neg A$	se $m \nvDash_{\mathbf{MP}} A$, para A não-atômica;
(P2.2)	$m \vDash_{\mathbf{MP}} A \wedge B$	se $m \vDash_{\mathbf{MP}} A$ e $m \vDash_{\mathbf{MP}} B$;
(P2.3)	$m \vDash_{\mathbf{MP}} A \vee B$	se $m \vDash_{\mathbf{MP}} A$ ou $m \vDash_{\mathbf{MP}} B$;
(P2.4)	$m \vDash_{\mathbf{MP}} A \to B$	se $m \nvDash_{\mathbf{MP}} A$ ou $m \vDash_{\mathbf{MP}} B$.

De Araújo *et al.* (1987) mostraram que esta semântica de mundos possíveis é adequada para $\mathcal{P}^1$. A partir da intuição dada pela semântica de sociedade apresentada para $\mathcal{P}^1$, Carnielli & Lima-Marques (1999) sugeriram que os modelos acima considerados poderiam ser restringidos a *modelos binários*, isto é, modelos contendo no máximo dois mundos. Neste caso, a cláusula **(P1.1)** pode ser substituída por:

(P1.1$_2$)	$m \vDash_{\mathbf{MP}} p$	se existe $m' \in \boldsymbol{M}$ tal que mRm' e $m' \in P(p)$.

Uma fórmula F é dita *verdadeira em* **MP**, noção denotada por $\vDash_{\mathbf{MP}} F$, se $m \vDash_{\mathbf{MP}} F$ para todo mundo m em $\boldsymbol{M}$. Uma tal fórmula é dita simplesmente **MP**-*válida* se $\vDash_{\mathbf{MP}} F$ para todo modelo binário **MP**. É fácil ver agora, por exemplo, que as fórmulas $\neg(p \wedge \neg p)$ e $p \to (\neg p \to q)$ não são **MP**-válidas: basta tomar um modelo binário **MP** tal que $\boldsymbol{M} = \{m_1, m_2\}$, R é uma relação reflexiva tal que $m_1 R m_2$, $P(p) = \{m_1\}$ e $P(q) = \varnothing$. Neste caso, de **(P1.1)** (ou **(P1.1$_2$)**) e de **(P1.2)** temos $m_1 \vDash_{\mathbf{MP}} p$, $m_1 \vDash_{\mathbf{MP}} \neg p$ e $m_1 \nvDash_{\mathbf{MP}} q$, de **(P2.2)** e de **(P2.4)** temos $m_1 \vDash_{\mathbf{MP}} p \wedge \neg p$ e $m_1 \nvDash_{\mathbf{MP}} \neg p \to q$, e de **(P2.1)** e **(P2.4)** temos finalmente $m_1 \nvDash_{\mathbf{MP}} \neg(p \wedge \neg p)$ e $m_1 \nvDash_{\mathbf{MP}} p \to (\neg p \to q)$.

Nosso próximo passo é mostrar que as fórmulas **MP**-válidas coincidem com os teoremas de $\mathcal{P}^1$. Dado um conjunto Γ de fórmulas de $\mathcal{P}^1$, definimos Γ_0 como o conjunto de todas as fórmulas de Γ que não sejam a negação de proposições atômicas, isto é, $\Gamma_0 = \{A \in \Gamma$: A não é da forma $\neg p$ para p atômica$\}$. A fim de demonstrar a adequação desta semântica de mundos possíveis baseada em modelos binários para $\mathcal{P}^1$, definimos um *modelo binário canônico* para Γ como um modelo binário tal que:

- $\boldsymbol{M} = \{\Gamma, \Gamma_0\}$;
- dados m e m' em $\boldsymbol{M}$, mRm' sse $m' \subseteq m$, donde, pela definição de Γ_0, $\Gamma R \Gamma_0$;
- para cada variável atômica p, $P(p) = \{m \in \boldsymbol{M}: p \in m\}$.

Lema. *Sejam dados uma fórmula F e um conjunto F-saturado* Γ, *com* $\Gamma \cup \{F\} \subset$ $\text{For}(\mathcal{P}^1)$. *Então, se* **MP** *é o modelo binário canônico para* Γ, *temos, para toda fórmula A de* $\mathcal{P}^1$, $\Gamma \vDash_{\mathbf{MP}} A \iff A \in \Gamma$.

Prova-se facilmente por indução sobre a complexidade da fórmula *A*.

Caracterização III. *Os modelos binários acima considerados fornecem uma semântica de mundos possíveis para* $\mathcal{P}^1$.

(Corretude) Basta verificar que os axiomas de $\mathcal{P}^1$ são **MP**-válidos, e a regra de Modus Ponens preserva **MP**-validade.

(Completude) A prova é a usual (cf. p.ex. Hughes & Cresswell, 1996, cap. 6), usando o **Lema** acima para modelos binários canônicos.

Qual o nosso propósito em fornecer todas estas semânticas para um só cálculo? Em primeiro lugar quisemos ilustrar a idéia das semânticas de sociedade, com aplicações diretas em computação e inteligência artificial, mostrando logo que elas são casos especiais das semânticas de traduções possíveis, as quais neste trabalho estudamos em profundidade. Mas se $\mathcal{P}^1$ já dispõe de uma semântica trivalente verofuncional, para quê afinal apresentar-lhe uma semântica de traduções possíveis? Ora, neste caso obtivemos o resultado muito interessante de reformular as matrizes trivalentes de $\mathcal{P}^1$ em termos das matrizes bivalentes clássicas e da interpretação das fórmulas de $\mathcal{P}^1$ dada pela interpretação clássica do conjunto de suas traduções possíveis tomadas duas a duas. Em outras palavras, acabamos assim por oferecer uma perspectiva inteiramente nova de uma lógica polivalente. Será sempre possível reformular as matrizes de uma lógica *n*-valente em termos de semânticas de traduções possíveis baseadas em matrizes *m*-valentes, com $m < n$? Por outro lado, a semântica de mundos possíveis acima apresentada lança alguma luz sobre a relação entre este tipo de semântica e a semântica de traduções possíveis. Será que toda lógica que disponha de uma semântica de mundos possíveis dispõe também de uma semântica de traduções possíveis, e vice-versa?

Abre-se aqui um novo e amplo campo de investigações.

5.4.2.2 Um outro: $\mathcal{P}^2$

Será possível encontrar um cálculo paraconsistente que atenda a **dC[i]**, **dC[ii]** e **dC[iv]** (vide **2.**) e que ao mesmo tempo estenda *todas* as hierarquias até aqui apresentadas? A resposta é afirmativa. Para ver como, basta tomar novamente as matrizes de $\mathcal{P}^1$, em **5.4.2.1**, modificando apenas a negação para

	$\neg$
V	F
V*	V*
F	V

Denominemos $\mathcal{P}^2$ o cálculo caracterizado por estas matrizes. Ora, é fácil verificar que as matrizes de $\mathcal{P}^2$ validam todos os esquemas de todas as hierarquias até aqui estudadas, porém ainda não validam a fórmula $\neg(A \wedge \neg A)$.[2]

No entanto, o axioma $\mathcal{P}^1$**(3)** não é válido em $\mathcal{P}^2$. Que axiomática caracterizará este cálculo? Será $\mathcal{P}^2$ maximal? As respostas a estas questões são apresentadas no apêndice $\omega + \omega$, **A Terceira Margem**. Lá aprendemos que o cálculo $\mathcal{P}^2$ pode ser axiomatizado, por exemplo, pela adição aos axiomas de $C_1^{\neg\neg b}$ do esquema $(A \wedge B)^\circ \wedge (A \vee B)^\circ \wedge (A \rightarrow B)^\circ$. Além disso, aprendemos ainda que $\mathcal{P}^2$ *é*, por seu lado, também maximal.

---

[2] Note que foram exatamente as matrizes de $\mathcal{P}^2$ as matrizes que usamos em **A um passo da lógica clássica**, no apêndice $\omega \times \omega$, para demonstrar a indemonstrabilidade de $\neg(A \wedge \neg A)$ em todos os cálculos paraconsistentes abordados neste trabalho.

Falando de uma maneira imprecisa, poderíamos afirmar que a negação de $\mathcal{P}^2$ é “mais” verofuncional do que a negação de $\mathcal{P}^1$. Com efeito, dada uma valoração v em $\mathcal{P}^1$, e uma fórmula A qualquer, temos:

- $v(A)$=F $\Rightarrow v(\neg A)$=V;
- $v(A)$=F $\Rightarrow v(\neg\neg A)$=F.

Todavia, em $\mathcal{P}^2$ temos ainda:

- $v(A)$=F $\Leftarrow v(\neg\neg A)$=F.

Daí falarmos em uma *sociedade quase-biassertiva aberta*, **SQA**, que é tal que sua relação de satisfatibilidade é definida como a relação de **SBA**, trocando apenas a cláusula **(S2.1)** por

(S2.1.1) $S^+ \vDash \neg\neg A$ se $S^+ \vDash A$;

(S2.1.2) $S^+ \vDash \neg(A\#B)$ se $S^+ \nvDash A\#B$, com $\# \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$.

É fácil verificar agora que a lógica das **SQA**s é $\mathcal{P}^2$.

Para definir a semântica de traduções possíveis para $\mathcal{P}^2$ basta igualmente trocar a cláusula **(B2.1)** da relação de forçamento bilocal de $\mathcal{P}^1$ por

(B2.1.1) $\vDash^{*_i *_j} \neg\neg A$ se $\vDash^{*_i *_j} A$;

(B2.1.2) $\vDash^{*_i *_j} \neg(A\#B)$ se $\nvDash^{*_i *_j} A\#B$, com $\# \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$.

Todas as outras definições permanecem inalteradas.

A semântica de mundos possíveis para $\mathcal{P}^2$ é também imediata. Basta neste caso trocar a cláusula **(P2.1)** da noção de verdade em um mundo possível m em **MP** por

(P2.1.1) $m \vDash_{\mathbf{MP}} \neg\neg A$ se $m \vDash_{\mathbf{MP}} A$;

(P2.1.2) $m \vDash_{\mathbf{MP}} \neg(A\#B)$ se $m \nvDash_{\mathbf{MP}} A\#B$, com $\# \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$.

Dadas todas estas semânticas para $\mathcal{P}^2$ e as propriedades específicas deste cálculo, poderíamos pensar em $\mathcal{P}^2$ como um cidadão lógico com o mesmo *status* de $\mathcal{P}^1$. Vale ressaltar contudo o fato de que $\mathcal{P}^2$ é um limite dedutivo superior para todas as doze hierarquias estudadas no presente capítulo, o que não acontece com $\mathcal{P}^1$. Por esta via e este ponto de vista tão-somente poderíamos afirmar que $\mathcal{P}^2$ se encontra “mais próximo” do cálculo clássico. Ambos $\mathcal{P}^1$ e $\mathcal{P}^2$ são maximais, porém $\mathcal{P}^2$ é maximal “no sentido certo” para estender todos os cálculos aqui abordados (cf. Marcos, 199?a).

• • •
O Que Há De Vir

O trabalho não acaba por aqui. Ao contrário, este é apenas o começo: acreditamos que ele poderia se estender *ad infinitum* – ou *ad nauseam*, o que vier primeiro.

Neste capítulo nos reservamos comentar sobre o que apresentamos nos capítulos que antecedem e nos apêndices que seguem, mas nos preocupa principalmente o que *ainda não* está em parte alguma. Mostramos inicialmente como as semânticas de traduções possíveis podem ser inseridas em um contexto mais amplo, o das *combinações entre lógicas*, e em seguida propomos outros exemplos de lógicas que disporiam de um tal gênero de semânticas. Ao fim, retomamos as diversas questões levantadas ao longo desta dissertação.

Combinações entre lógicas

As semânticas de traduções possíveis podem ser inseridas no contexto de um campo de investigações muito mais geral, o das *combinações entre lógicas*. À medida que a lógica é usada mais e mais na formalização de problemas oriundos de diversas áreas, tais como filosofia, linguística, inteligência artificial, programação lógica e ciências da computação, torna-se necessário dispor de linguagens formais e cálculos cada vez mais complexos. Tanto na lógica pura quanto na aplicada é cada vez mais comum encontrarmos ontologias híbridas, que exigem o desenvolvimento de novas técnicas e estratégias. Mas para sermos capazes de lidar com esta riqueza ontológica, e modelar sistemas de dedução na medida para atender a necessidades específicas, não há que partir do zero: podemos muito bem cozer uma lógica *complexa* a partir de uma combinação de suas lógicas *ingredientes*, mais simples e com estruturas conhecidas. Podemos, por exemplo, projetar cada uma das lógicas ingredientes de modo a lidar com apenas um dentre os vários aspectos do problema em foco. Esta foi a motivação para que diversos grupos de pes quisa viessem a se debruçar, principalmente nos últimos dez anos, sobre o tema "combinação entre lógicas". Uma clara e agradável introdução a este tema pode ser encontrada em Blackburn & De Rijke, 1997a.

As combinações entre lógicas evoluíram e cresceram rapidamente em importância, a tal ponto que pelo menos duas grandes revistas já lhes votaram toda uma edição – *Notre Dame Journal of Formal Logic*, v.37, n.2, 1996 e *Studia Logica*, v.59, n.1, 1997 – e pelo menos dois congressos lhes foram exclusivamente dedicados – FRONTIERS OF COMBINING SYSTEMS (FroCoS) 96, em Munique, em março de 1996, e FroCos'98, em Amsterdã, em outubro de 1998.

Ao combinar lógicas, podemos distinguir entre dois caminhos possíveis: partir da lógica complexa, pelo menos parcialmente conhecida, e "fatorá-la" em seus ingredientes mais simples, ou partir das lógicas ingredientes e "multiplicá-las" para obter a mais complexa. É claro que esta divisão é bastante arbitrária – veremos que nem sempre é fácil decidir se estamos "multiplicando" ou "fatorando". Não obstante, apenas por razões metodológicas, faremos a seguir a separação entre *fatoração* e *produto* de lógicas.

Fatoração

Todos os exemplos de semânticas de traduções possíveis oferecidos nesta dissertação, pelo menos até aqui, podem ser vistos como uma forma de fatorar lógicas. O leitor se recordará (vide **2.3.4**) que uma semântica de traduções possíveis para um cálculo interpretável $\mathcal{S}$ foi definida como o par $\mathbf{TP}_{\mathcal{S}} = \langle \{\mathcal{R}_t\}_{t \in |\boldsymbol{T}|},\ \boldsymbol{T} \rangle$, onde $\boldsymbol{T}$ representa um conjunto de funções de tradução $*_t$: $\mathrm{F{\small OR}}(\mathcal{S}) \to \mathrm{F{\small OR}}(\mathcal{R}_t)$. A relação de consequência semântica de cada cálculo interpretante $\mathcal{R}_t$, $\vDash_t$, foi suposta conhecida. Tudo que nos restava a fazer, em cada caso apresentado, era definir uma relação de forçamento local conveniente, e uma relação de forçamento global tal que funcionasse como uma tradução conservativa.

No caso de cada um dos cálculos das hierarquias C_n^{ℓ}, C_n^{d}, C_n^{b}, $C_n^{\neg\neg\ell}$, $C_n^{\neg\neg d}$, $C_n^{\neg\neg b}$, $1 \leq n < \omega$, (vide o apêndice **ω**, **Cálculos**) mantivemos constante $\mathcal{R}_t$, dado pelas matrizes de $\mathcal{W}_3$ (vide **2.3.1**), e variamos somente o conjunto $\boldsymbol{T}$ das traduções. No caso dos cálculos das hierarquias $C_n^{+\ell}$, C_n^{+d}, C_n^{+b}, $C_n^{+\neg\neg\ell}$, $C_n^{+\neg\neg d}$, $C_n^{+\neg\neg b}$,

$1 \leq n < \omega$, $\mathcal{R}_t$ era dado pelas matrizes de $\mathcal{W}_3^{\oplus}$ (vide **5.3**), e no caso de C_{min} e $C_{min}^{\neg\neg}$, pelas matrizes de $\mathcal{W}_3^{\odot}$ (vide **4.4**). Para o cálculo-limite de cada hierarquia C_t^x, $1 \leq t < \omega$, permitíamos que cada $\mathcal{R}_t$ fosse o cálculo C_t^x, cuja relação de consequência semântica por meio de uma semântica de traduções possíveis já era portanto conhecida, e tomamos cada tradução como a função identidade $*_t$: $\mathrm{FOR}(C_{Lim}) \rightarrow \mathrm{FOR}(C_t^x)$. Em todos os casos, a relação de forçamento local foi definida para cada função de tradução, e cada tradução envolvida era literal relativamente a variáveis e homofônica.

Nos casos de $\mathcal{P}^1$ e $\mathcal{P}^2$, a lógica clássica era o único cálculo interpretante, e as traduções ainda eram homofônicas, mas já não eram literais relativamente a variáveis – com efeito, as proposições atômicas foram traduzidas em *verum* ou em *falsum* (vide subseções de **5.4.2**). Além disso, a relação de forçamento local era definida para cada duas traduções (e por essa razão a denominamos “bilocal”).

Em todos os casos, a relação de forçamento global foi definida da mesma maneira: Γ força globalmente F sse para toda relação de forçamento local, Γ força localmente F. Mostramos em cada caso que assim ficava definida uma relação de consequência característica, isto é, fortemente correta e completa, para o cálculo em questão. Como os cálculos interpretantes que usamos eram sempre polivalentes finitários, e o conjunto de traduções possíveis para cada fórmula dada era sempre finito, dispúnhamos imediatamente de um procedimento de decisão: bastava testar cada tradução possível desta fórmula nas matrizes correspondentes.

Concentramo-nos aqui nas lógicas paraconsistentes derivadas da abordagem de da Costa, mas vale lembrar que, antes dele, Jaśkowski já propusera suas *lógicas discussivas* (vide **1.4** e **2.**), e, depois dele, a *lógica relevante* também se propôs a aceitar inconsistências sem permitir que a trivialidade daí decorresse (cf. Priest & Routley, 1989). Não entraremos nos detalhes destas duas outras propostas, mas discutiremos apenas, brevemente, a principal crítica feita pelos *relevantistas* à maior parte das lógicas paraconsistentes *dacostianas*. Segundo Priest e Routley, as semânticas paraconsistentes destas lógicas são “indesejáveis filosoficamente” por não serem *recursivas*, isto é, não permitirem que o significado de uma sentença seja determinado tão-somente a partir do significado de suas partes componentes. É claro que esta crítica não se aplica aos cálculos $\mathcal{P}^1$ e $\mathcal{P}^2$, os quais são caracterizáveis por matrizes finitas; ela se aplica, contudo, ao Cálculo Intuicionista de Heyting e aos cálculos modais normais – será que Priest e Routley estariam igualmente insatisfeitos com estes últimos? Parece haver alguma confusão com relação ao que se pretende "recursivo" aqui. De fato, as semânticas de valoração não-verofuncionais não são recursivas. Em nenhum dos cálculos aqui tratados, contudo, perde-se por isso a decidibilidade, que é alcançada por meio das quase-matrizes adequadas. Isto fica ainda mais claro ao tomarmos as semânticas de traduções possíveis destas lógicas. Cada fórmula agora perde a sua individualidade, tornando-se um bando de traduções possíveis, mas observe que tanto o procedimento de tradução quanto as semânticas polivalentes oferecidas são claramente recursivos!

De passagem, vale enfatizar aqui um ponto: Béziau (1990) já mostrara como fornecer semânticas trivalentes para as lógicas paraconsistentes de da Costa, codificando alguma informação sobre a negação de cada fórmula em questão. Seria possível, desta forma, simplificar seu procedimento de decisão por quase-matrizes (vide **2.2.2**), avaliando apenas as subfórmulas de uma fórmula dada, e dispensando a negação destas subfórmulas. Observe contudo que, embora estas semânticas trivalentes poupem eventualmente colunas às quase-matrizes, elas não devolvem a verofuncionalidade ao procedimento: as bifurcações continuam ocorrendo. Foi somente através das semânticas de traduções possíveis que pudemos obter a verofuncionalidade – à custa, é verdade, de uma possível perda da individualidade das fórmulas.

Ainda segundo Priest & Routley (1989), a "falta de uma semântica recursiva" para o cálculo C_1 seria consequência do fato de que não é possível fornecer para este cálculo uma algebrização não-trivial (vide **2.2.1.*i***), o que para estes autores já ofereceria um inconveniente insuperável. Béziau (1997) respondeu a esta crítica retomando o conceito bourbakista de *estrutura* (cf. Bourbaki, 1950), e argumentando primeiramente que não temos por que pensar que toda estrutura matemática seja uma álgebra, e muito menos que toda lógica seja uma álgebra.

Mas, segundo Bourbaki, todas as estruturas matemáticas são construídas a partir de três estruturas-mães distintas e fundamentais: as estruturas de ordem, as estruturas algébricas e as estruturas topológicas. Onde entrariam então as *estruturas lógicas*? A proposta de Béziau é de que poderíamos pensar numa estrutura lógica como uma quarta estrutura-mãe, de mesmo direito que as outras – proposta que o levou, consecutivamente, à lógica abstrata, e à *lógica universal* (cf. Béziau, 1995). Mas se consentirmos às lógicas o *status* de estruturas fundamentais, então não haveria necessidade de impor que uma lógica qualquer deva apresentar uma relação de congruência não-trivial – não, uma lógica pode muito bem ser *simples*.

Que outras *lógicas* podem ser fatoradas? É claro que gostaríamos que esta mesma tecnologia fosse aplicável a muitas outras lógicas não-clássicas. Ao invés de explorar aqui esta vertente, nos perguntaremos apenas pelo seguinte: que outras lógicas *paraconsistentes* podem ser fatoradas? Apenas para mostrar o alcance e a generalidade do método, mencionaremos apenas mais um exemplo.

Denominamos *lógicas dialéticas* àquelas lógicas que se prestam à formalização de teorias baseadas nas idéias e princípios introduzidas por Hegel, Marx e seus sucessores – supondo que estas teorias sejam formalizáveis. Para formalizar princípios tais como o da *Unidade dos Opostos*, que implicam na consideração de uma ou outra forma de contradição, parece de fato bastante conveniente fazer uso de uma lógica paraconsistente. Notando este fato, e tomando por base a análise deste princípio feita por McGill & Parry (1948), da Costa & Wolf (1980) propuseram a lógica $\mathcal{DL}$ como uma possível formalização de certos aspectos das lógicas dialéticas. Não nos parece que seja difícil fornecer, também para $\mathcal{DL}$, uma semântica de traduções possíveis adequada.

E assim por diante. Passemos logo a uma classe mais geral de questões. O leitor atento terá observado que todas as lógicas que tratamos neste trabalho são proposicionais. Como seriam as semânticas de traduções possíveis para cálculos de primeira ordem? Como, e em que direção, generalizar a própria definição deste gênero de semânticas? Coniglio e Carnielli se encontram atualmente trabalhando sobre este tema. As abordagens topológicas e categoriais parecem de fato bem adequadas a esta generalização. Considerando que a teoria de *feixes* é uma ferramenta matemática desenvolvida especificamente para o estudo das relações entre fenômenos locais e globais, Coniglio & Carnielli (1999) se basearam no trabalho de Goguen (1992) em semântica categórica na busca de uma semântica de feixes que generalize o conceito de semânticas de traduções possíveis. Os quatro princípios que fundamentam a sua abordagem são:

- as lógicas – conjuntos de observações, objetos – são feixes;
- as traduções entre lógicas – relações de hereditariedade – são morfismos entre feixes;
- combinações entre lógicas são diagramas de feixes;
- a lógica resultante da combinação é o limite (categórico) do seu diagrama.

Isto não parece estar longe do que vimos fazendo: as lógicas ingredientes seriam assim a trama que devemos urdir de modo a obter um belo resultado final – uma nova lógica.

Produto

Mui diversas são as técnicas e os problemas que motivam os trabalhos sobre combinações entre lógicas que encontramos na literatura. De fato, pelo menos em seus primeiros anos, pouco coordenados foram os esforços nesta área: dificilmente poderíamos dizer que houve uniformidade de tratamento, ou mesmo comunidade de interesses. Notamos, por um lado, que a abordagem categorial foi também a eleita por Sernadas *et al.*, 1997, em seus trabalhos sobre "sincronização" das fórmulas ou dos modelos das lógicas ingredientes. Por outro lado, já em 1988, Pfalzgraf partia de problemas em robótica e engenharia industrial e se propunha a buscar semânticas baseadas na noção topológica de fibrados – derivada da teoria de feixes (para alguns de seus últimos resultados, cf. Pfalzgraf, 1997, Pfalzgraf *et al.*, 1996). Os *fibrados lógicos* são particularmente adequados à modelagem da comunicação e da interação entre agentes em cooperação, já que nos permitem uma mudança de cenário: de um contexto local para um global e vice-versa. As lógicas resultantes são denominadas policontextuais.

Numa perspectiva mais recente e mais geral, Gabbay (1996a) mostrou como "fibrar" a semântica de lógicas ingredientes e "tecer" sua teoria da prova a fim de produzir a semântica e a teoria da prova de uma lógica mais complexa (cf. ainda Gabbay, 1996b). Como mostraram Blackburn & De Rijke (1997b), a noção de combinação entre lógicas não está tão distante assim das situações às quais estamos acostumados: lógicas multimodais, lógicas modais intuicionistas, lógica dinâmicas proposicionais e lógicas difusas, entre outras, podem ser facilmente entendidas como exemplos muito naturais de lógicas combinadas. Caso desejemos, é possível adicionar facilmente, por exemplo, uma dimensão temporal – ou deôntica, ou epistêmica – a uma lógica já conhecida (cf. p.ex. Finger & Gabbay, 1996). Com efeito, a combinação de modalidades talvez seja a maneira mais fácil e natural de enriquecer uma lógica dada. As principais questões que preocupam aqueles que trabalham nesta área envolvem os chamados *teoremas de transferência*: interessa mostrar que a lógica combinada goza de algumas propriedades de suas lógicas ingredientes, tais como a axiomatizabilidade recursiva, a corretude, a completude, a decidibilidade e a propriedade dos modelos finitos. É claro que a coisa se complica bastante quando temos axiomas de interação das modalidades: nestes casos é fácil perder, por exemplo, a completude e a propriedade dos modelos finitos.

Como acabamos de ver, todos os outros exemplos de combinações entre lógicas que encontramos na literatura parecem se tratar de produto de lógicas, e não sua fatoração. Lembramos mais uma vez que esta distinção é algo arbitrária: o leitor poderia argumentar que os exemplos que demos de $\mathcal{P}^1$ e de $\mathcal{P}^2$ poderiam ser vistos como produto e não fatoração de lógicas, produto este que só por acaso se verificou tratar de lógicas já conhecidas. Não discutiremos esta questão; ao contrário, apresentaremos a seguir mais um exemplo de semântica de traduções possíveis, e deixaremos o leitor julgar por si.

O exemplo é de Carnielli (1999), e mostra como definir uma lógica paraconsistente a partir da combinação de dois modelos da semântica de mundos possíveis para o Cálculo Intuicionista de Heyting, (**CIH**) (cf. Kripke, 1963) – o qual não define uma lógica polivalente, como nos outros casos anteriormente apresentados. Consideremos o conjunto de fórmulas dado pela álgebra gerada por $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \neg\}$ sobre um conjunto enumerável de variáveis atômicas. Lembremos que um modelo **MP** para **CIH** pode ser definido como a tripla $<\boldsymbol{M}, R, P>$, onde o conjunto $\boldsymbol{M}$ de mundos é não-vazio, R é uma relação de ordem parcial em $\boldsymbol{M}$, a qual denotaremos por $\leq$, e P uma função que leva as variáveis atômicas a subconjuntos de $\boldsymbol{M}$, tal que para cada variável atômica p vale $m \in P(p) \wedge m \leq n \Rightarrow n \in P(p)$.

Se interpretarmos as fórmulas associadas a um dado mundo $m \in \boldsymbol{M}$ como unidades de informação, a condição que impomos sobre P garante a propriedade de *persistência* ou *conservação da informação para o futuro*, no sentido de que a informação não pode ser descartada no futuro. A mesma propriedade pode ser demonstrada para as fórmulas não-atômicas por meio das definições abaixo, o que também garante o caráter de *independência do passado* – apenas a informação futura pode mudar o *status* de uma fórmula.

Dado um modelo **MP** para **CIH**, definimos a noção de *verdade no mundo possível m em* **MP**, denotada por $m \vDash_{\mathbf{MP}}$, como:

(CIH1) $m \vDash_{\mathbf{MP}} p$ se $m \in P(p)$, para p atômico;

(CIH2) $m \vDash_{\mathbf{MP}} \neg A$ se para todo n tal que $m \leq n$ vale $n \nvDash_{\mathbf{MP}} A$;

(CIH3) $m \vDash_{\mathbf{MP}} A \wedge B$ se $m \vDash_{\mathbf{MP}} A$ e $m \vDash_{\mathbf{MP}} B$;

(CIH4) $m \vDash_{\mathbf{MP}} A \vee B$ se $m \vDash_{\mathbf{MP}} A$ ou $m \vDash_{\mathbf{MP}} B$;

(CIH5) $m \vDash_{\mathbf{MP}} A \rightarrow B$ se para todo n tal que $m \leq n$ vale $n \vDash_{\mathbf{MP}} A \Rightarrow n \vDash_{\mathbf{MP}} B$.

Uma fórmula F é dita *verdadeira em* **MP**, noção denotada por $\vDash_{\mathbf{MP}} F$, se $m \vDash_{\mathbf{MP}} F$ para todo mundo m em $\boldsymbol{M}$. Dados um mundo m em $\boldsymbol{M}$ e dois modelos para **CIH**, $\mathbf{MP}_1$ e $\mathbf{MP}_2$, definimos agora a *relação de forçamento local em m baseada em* $\mathbf{MP}_1$ *e* $\mathbf{MP}_2$, a ser denotada por $m \vDash^{1,2}$, como:

(TP1) $m \vDash^{1,2} A$ se $m \vDash_{\mathbf{MP}_1} A$ ou $m \nvDash_{\mathbf{MP}_2} A$, se A é positivo;

(TP2) $m \vDash^{1,2} \neg A$ se $m \vDash_{\mathbf{MP}_1} \neg A$ ou $m \vDash_{\mathbf{MP}_2} A$.

Se interpretarmos estes dois modelos para **CIH** como: $m \vDash_{\mathbf{MP}_1} A$ caso haja informação positiva acerca da sentença A, e $m \vDash_{\mathbf{MP}_2} A$ caso haja informação negativa acerca de A, a relação de forçamento local acima significa:

- no caso de **(TP1)**, temos que A é aceita caso haja informação positiva a seu respeito – donde A fica fixado para sempre graças à persistência da informação – ou no caso em que não haja informação negativa a seu respeito – o que pode mudar no futuro;
- no caso de **(TP2)**, temos que $\neg A$ é aceita caso haja informação positiva a seu respeito – donde $\neg A$ fica para sempre fixado – ou haja informação negativa acerca de A. Nos dois casos o *status* de $\neg A$ não muda graças a informação futura, mas o *status* de A pode mudar.

As seguintes propriedades são facilmente verificáveis:

Propriedades 0. **(a)** $m \nvDash^{1,2} A \quad \Rightarrow \quad m \vDash^{1,2} \neg A$;

(b) $m \vDash^{1,2} \neg\neg A \quad \Rightarrow \quad n \vDash^{1,2} A$, para algum n tal que $m \leq n$;

(c) $m \vDash^{1,2} A \wedge B \quad \Leftrightarrow \quad m \vDash^{1,2} A$ e $m \vDash^{1,2} B$;

(d) $m \vDash^{1,2} A \vee B \quad \Leftrightarrow \quad m \vDash^{1,2} A$ ou $m \vDash^{1,2} B$;

(e) $m \vDash^{1,2} A \rightarrow B \quad \Leftrightarrow \quad n \nvDash^{1,2} A$ ou $n \vDash^{1,2} B$,

para algum n tal que $m \leq n$.

Esta propriedade mostra que os conectivos deste novo sistema que definimos têm propriedades paraconsistentes semelhantes às dos cálculos C_n. Com efeito, pode valer, para uma dada sentença A, $m \vDash^{1,2} A \wedge \neg A$: basta que $m \vDash_{\mathbf{MP}_1} A$ e $m \vDash_{\mathbf{MP}_2} A$. Consequentemente, $m \vDash^{1,2} \neg A$ não implica em $m \nvDash^{1,2} A$; e $m \vDash^{1,2} A$ não implica em $m \vDash^{1,2} \neg\neg A$ (por que?). Note que tomamos como tradução a função identidade. Caso alterássemos as cláusulas **(TP1)** e **(TP2)** poderíamos definir ainda outras lógicas paraconsistentes.

Não deve haver dúvidas de que no caso acima o que temos é definitivamente um produto de lógicas. De fato, nem sabemos ainda como axiomatizar o resultado, ou mesmo se resultaria daí uma lógica paraconsistente já conhecida na literatura. Trabalhamos neste caso com dois cálculos interpretantes, e uma nova definição para a relação de forçamento local. Num caso mais geral, poderíamos pensar cada ingrediente – as lógicas – como dotado de uma estrutura topológica sobre a qual se definiriam funções contínuas – as traduções – a ser organizadas por meio de estruturas ainda mais gerais e complexas – os feixes.

Através do Espelho

E há a dualidade entre lógicas. Assim como o termo “tradução”, o termo “dualidade” é costumeiramente empregado na literatura em um sentido informal: fala-se da dualidade entre união e interseção, abertos e fechados, filtros e ideais, conjunção e disjunção etc. É comum encontrar referências à dualidade entre *relações*, mas também, de modo mais geral, entre *estruturas matemáticas*. Uma proposta para a definição da *dualidade entre lógicas* é estudada em Queiroz, 1997: duas lógicas são ditas *duais* se há entre elas uma tradução conservativa, bijetora, gramatical e literal relativamente a variáveis (vide **2.3.4.1**). Não obstante, na presente seção, a menos que nos manifestemos em contrário, estaremos sempre nos valendo do sentido informal do termo “dualidade” – daí a ausência de aspas daqui em diante.

Em **2.3** discutimos a respeito da dualidade entre lógicas paraconsistentes e intuicionistas *lato sensu* – estas últimas também ditas *paracompletas*. Carnielli & Marcos (199?a) apresentam a semântica de traduções possíveis para a hierarquia de cálculos paraconsistentes C_n^{ℓ}, $1 \leq n < \omega$, (vide **5.1**) e propõem em seguida uma hierarquia $\mathcal{D}_n^{\ell}$, $1 \leq n < \omega$, de cálculos paracompletos duais, sobre os quais não entraremos aqui em detalhes. Notemos apenas que a noção de dualidade entre lógicas neste caso está baseada na dualidade das matrizes e das restrições sobre as traduções em suas semânticas de traduções possíveis, o que deve ficar mais claro no exemplo mais simples a seguir.

Primeiras Estórias

O exemplo é o seguinte (cf. Carnielli & Marcos, 199?b): tomemos o cálculo C_{min}, cuja semântica de traduções possíveis é apresentada em **4.4**. Substituamos agora as matrizes de $\mathcal{W}_3^{\odot}$ pelas matrizes da lógica $\mathcal{M}_3^{\odot}$ a seguir:

$\wedge$	**V**	**F⁺**	**F**
V	V	F^+	F^+
F^+	F^+	F^+	F^+
F	F^+	F^+	F^+

$\vee$	**V**	**F^+**	**F**
V	V	V	V
F^+	V	F^+	F^+
F	V	F^+	F^+

$\rightarrow$	**V**	**F^+**	**F**
V	V	F^+	F^+
F^+	V	V	V
F	V	V	V

	$\neg_L$	$\neg_C$
V	F	F
F^+	V	F^+
F	V	V

onde V é o único valor distinguido. Observe que tudo o que fizemos às matrizes de $\mathcal{W}_3^{\odot}$ para transformá-las nas matrizes de $\mathcal{M}_3^{\odot}$ foi substituir o valor distinguido V^- pelo valor não-distinguido F^+, e então agir de acordo. Para completar a semântica de traduções possíveis para esta nova lógica, que chamaremos $\mathcal{D}_{min}$, manteremos ainda exatamente as mesmas restrições sobre as funções de tradução feitas no caso de C_{min} (vide **4.4**).

É fácil verificar que o cálculo $\mathcal{D}_{min}$ tem algumas propriedades interessantes e singulares:

Propriedade 1. *$\mathcal{D}_{min}$ pode ser axiomatizado como C_{min} (vide* **4.2***), substituindo apenas o esquema* $\boldsymbol{C_{min}}$**(9)**: $A \vee \neg A$ *por* $\boldsymbol{\mathcal{D}_{min}}$**(9)**: $A \to (\neg A \to B)$, *e substituindo* $\boldsymbol{C_{min}}$**(10)**: $\neg\neg A \to A$ *por* $\boldsymbol{\mathcal{D}_{min}}$**(10)**: $A \to \neg\neg A$.

Propriedade 2. *$\mathcal{D}_{min}$ não é caracterizável por matrizes finitas.*

Para verificar este fato, basta usar o **Teo A** do apêndice $\omega \times \omega$, **Incaracterizabilidade por matrizes finitas**.

Propriedade 3 *Uma bivaluação não-verofuncional para $\mathcal{D}_{min}$ pode ser obtida a partir daquela para C_{min} (vide* **4.2***) apenas substituindo* **val[iv]**: $v(A)=0 \Rightarrow v(\neg A)=1$ *por* **val[iv^d]**: $v(A)=1 \Rightarrow v(\neg A)=0$, *e substituindo* **val[v]**: $v(\neg\neg A)=1 \Rightarrow v(A)=1$ *por* **val[v^d]**: $v(\neg\neg A)=0 \Rightarrow v(A)=0$.

Propriedade 4. *Um procedimento de quase-matrizes para $\mathcal{D}_{min}$ é obtido se substituímos a regra para a negação em C_{min} (vide* **4.5.2***) por*

QM 4.2. *se A é da forma $\neg B$, então se B toma o valor* 1, *escreva* 0*; em caso contrário bifurque a linha e escreva* 0 *numa parte e* 1 *na outra.*

Propriedade 5. *Nenhuma fórmula negada é teorema de $\mathcal{D}_{min}$.*

Prova-se de modo similar ao **Teorema** em **4.4**.

Propriedade 6. *Nenhuma das fórmulas seguintes é teorema de $\mathcal{D}_{min}$:*

(i) $A \vee \neg A$ **(iii)** $\neg(A \wedge \neg A)$;

(ii) $\neg\neg A \to A$ **(iv)** $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$.

O fato de que em $\mathcal{D}_{min}$ as fórmulas **(i)** e **(ii)** não sejam demonstráveis faz com que este cálculo atenda aos conhecidos requisitos de Brouwer para "*a*" Lógica Intuicionista (cf. Brouwer, 1975). As principais diferenças entre $\mathcal{D}_{min}$ e o Cálculo Intuicionista de Heyting (**CIH**) residem na rejeição por $\mathcal{D}_{min}$ também das fórmulas **(iii)** e **(iv)**, as quais poderíamos denominar, respectivamente, *Não-Contradição* e *Redução ao Absurdo*. Assim, enquanto **CIH** rejeita uma parte da lógica positiva, e mantém a Não-Contradição e a Redução ao Absurdo, $\mathcal{D}_{min}$ perde estes dois esquemas, mantendo porém toda a lógica positiva.

Uma extensão muito natural para $\mathcal{D}_{min}$ seria o cálculo $\mathcal{D}_{min}^{\neg\neg}$, obtido ao revés do que fizemos em **5.4.1**, pelo acréscimo da fórmula **(ii)** acima à axiomática de $\mathcal{D}_{min}$. Neste caso, contudo, nos afastamos um pouco da interpretação construtiva usual para o intuicionismo.

Terceiras Estórias

Um outro exemplo de lógica dual que ora abordamos é o seguinte: $\mathcal{I}^1$, a lógica paracompleta dual a $\mathcal{P}^1$, introduzida em Sette & Carnielli, 1995. A axiomática de $\mathcal{I}^1$ é de certa forma dual àquela de $\mathcal{P}^1$ (vide **5.4.2.1**):

$\mathcal{I}^1$**(1)** $A \to (B \to A)$

$\mathcal{I}^1$**(2)** $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

$\mathcal{I}^1$**(3)** $(\neg\neg A \to \neg B) \to ((\neg\neg A \to B) \to \neg A)$

$\mathcal{I}^1$**(5)** $\neg\neg(A \to B) \to (A \to B)$

onde novamente a única regra de inferência é Modus Ponens **(MP)**: $A,\ A \to B\ /\ B$. Note que o axioma $\mathcal{P}^1$**(4)** não foi dualizado, já que, como mostramos no apêndice $\omega+\omega$, **Um axioma a menos**, esta fórmula é demonstrável a partir das demais. Da mesma forma, em $\mathcal{I}^1$, a fórmula dual a $\mathcal{P}^1$**(4)**, $\neg(\neg\neg A \to A) \to \neg\neg A$, é demonstrável a partir dos esquemas acima (cf. Sette & Carnielli, 1995).

As matrizes trivalentes adequadas a $\mathcal{I}^1$ são as seguintes:

$\wedge$	**V**	**F***	**F**
V	V	F	F
F*	F	F	F
F	F	F	F

$\vee$	**V**	**F***	**F**
V	V	V	V
F*	V	F	F
F	V	F	F

$\to$	**V**	**F***	**F**
V	V	F	F
F*	V	V	V
F	V	V	V

	$\neg$	$\sim$
V	F	F
F*	F	V
F	V	V

onde V é o único valor distinguido, F^* é interpretado como falso por *default*, ou por falta de evidência em contrário, e a negação forte: $\sim$, a conjunção: $\wedge$, e a disjunção: $\vee$, são definidos a partir da negação: $\neg$, e da implicação: $\to$, respectivamente como: $A \to \neg A$, $\neg(A \to \sim B)$ e $\sim A \to B$.

Uma semântica de sociedade para $\mathcal{I}^1$ foi oferecida por Carnielli & Lima-Marques (1999). Se para o caso de $\mathcal{P}^1$ trabalhamos com sociedades abertas (vide **5.4.2.1**), tomamos agora sociedades *fechadas*, a ser denotadas por S^-, as quais consistem em sociedades que aceitam uma fórmula caso ambos os seus agentes a aceitem. A *relação de satisfatibilidade* em uma sociedade biassertiva fechada (**SBF**), denotada por $S^- \vDash$, é definida como no caso das sociedades biassertivas abertas (**SBA**s), diferindo apenas nas seguintes cláusulas:

(S1.1) $S^- \vDash p$ se para todo agente Ag_i em S vale $Ag_i \vDash p$

(S1.2) $S^- \vDash \neg p$ se para todo agente Ag_i em S vale $Ag_i \nvDash p$

O resultado sobre a cardinalidade das **SBA**s é ainda válido para **SBF**s. Dizemos que a fórmula F é uma *tautologia fechada* se para toda **SBF** S^- vale $S^- \vDash F$. É fácil ver que a fórmula $p \vee \neg p$ não é uma tautologia fechada: basta tomar Ag_1 e Ag_2 tais que $Var_1 = \{p\}$ e $Var_2 = \varnothing$, e tomar $S^- = \{Ag_1, Ag_2\}$. Analogamente a **5.4.2.1**, podemos provar agora:

Caracterização I. *A lógica das* **SBF**s *é* $\mathcal{I}^1$.

Consideremos agora a estrutura de traduções possíveis **TP** para $\mathcal{I}^1$ baseada na lógica clássica, cujas restrições sobre as traduções são as mesmas que no caso de $\mathcal{P}^1$, enquanto que a *relação de forçamento bilocal*, $\vDash^{*_i *_j}$, é definida também como no caso de $\mathcal{P}^1$, diferindo apenas nas cláusulas:

(B1.1) $\vDash^{*_i *_j} p$ se $\vDash_{\mathbf{CP}} p^{*_i}$ e $\vDash_{\mathbf{CP}} p^{*_j}$

(B1.2) $\vDash^{*_i *_j} \neg p$ se $\nvDash_{\mathbf{CP}} p^{*_i}$ e $\nvDash_{\mathbf{CP}} p^{*_j}$

A *relação de forçamento global*, $\vDash_{\mathbf{TP}}$, continua a mesma. Dada uma fórmula F, definimos:

$$\vDash_{\mathbf{TP}} F \Leftrightarrow \text{para quaisquer } *_i \text{ e } *_j \text{ vale } \vDash^{*_i *_j} F.$$

É fácil ver agora que $p \vee \neg p$ não é uma **TP**-tautologia, isto é, que $\nvDash_{\mathbf{TP}} p \vee \neg p$: basta tomar $*_i$ e $*_j$ tais que $p^{*_i} = \top$ e $p^{*_j} = \bot$. Analogamente a **5.4.2.1**, podemos provar agora:

Caracterização II. **TP** *fornece uma semântica de traduções possíveis para* $\mathcal{I}^1$.

Carnielli & Lima-Marques (1999) mostraram ainda como fornecer uma semântica de mundos possíveis para $\mathcal{I}^1$ baseada em modelos binários com uma relação reflexiva binária. Como o leitor deve estar imaginando, dado um modelo **MP**, definimos a noção de *verdade no mundo possível m em* **MP**, $m \vDash_{\mathbf{MP}}$, como no caso de $\mathcal{P}^1$, diferindo apenas nas cláusulas seguintes:

(P1.1) $m \vDash_{\mathbf{MP}} p$ para toda $m' \in \boldsymbol{M}$ tal que mRm' vale $m' \in P(p)$

(P1.2) $m \vDash_{\mathbf{MP}} \neg p$ para toda $m' \in \boldsymbol{M}$ tal que mRm' vale $m' \notin P(p)$

Se uma fórmula F é tal que temos $m \vDash_{\mathbf{MP}} F$ para todo mundo m em $\boldsymbol{M}$, então dizemos simplesmente que esta fórmula é *verdadeira em* **MP**, e denotamos este fato por $\vDash_{\mathbf{MP}} F$. Se, mais ainda, esta fórmula é válida para todo modelo binário **MP**, dizemos que ela é **MP**-*válida*. Para ver que a fórmula $p \vee \neg p$ não é **MP**-válida, basta tomar um modelo binário **MP** tal que $\boldsymbol{M} = \{m_1, m_2\}$, R seja uma relação reflexiva com $m_1 R m_2$, e $P(p) = \{m_1\}$. Mais uma vez, analogamente a **5.4.2.1**, podemos provar agora:

Caracterização III. *Os modelos binários acima considerados fornecem uma semântica de traduções possíveis para* $\mathcal{I}^1$.

No caso de $\mathcal{P}^1$ e $\mathcal{I}^1$, Carnielli & Lima-Marques (1999) indicaram como sua dualidade pode ser precisada. Dadas duas lógicas polivalentes, $\mathbf{L}_1$ e $\mathbf{L}_2$, com o mesmo número n de valores de verdade e tais que $\mathbf{L}_1$ possua d valores distinguidos, e $\mathbf{L}_2$ possua $n-d$ valores distinguidos, chamaremos *dualizador de* $\mathbf{L}_1$ *em* $\mathbf{L}_2$ ao par $\mathbf{DU} = \langle \boldsymbol{D}, \boldsymbol{U} \rangle$, onde $\boldsymbol{D}$ é uma função injetiva dos valores de verdade de $\mathbf{L}_1$ nos valores de verdade de $\mathbf{L}_2$ levando valores distinguidos a não-distinguidos e vice-versa, e $\boldsymbol{U}$ é uma função das fórmulas de $\mathbf{L}_1$ nas fórmulas de $\mathbf{L}_2$ atendendo ao seguinte requisito: para cada valoração w em L_1 existe uma valoração w' em L_2 tal que $\boldsymbol{D}(w(F))=w'(\boldsymbol{U}(F))$ para toda fórmula F de L_1.

Para construir um dualizador de $\mathcal{I}^1$ em $\mathcal{P}^1$, basta considerar a função $\boldsymbol{D}$ que leva T a F, F* a T* e F a T, e a função $\boldsymbol{U}$ dada por:

(U1) $\boldsymbol{U}(p)=p$ para p atômica

(U2) $\boldsymbol{U}(\neg^{\mathcal{I}}A)=\neg^{\mathcal{P}}(\boldsymbol{U}(A))$

(U3) $\boldsymbol{U}(B\to^{\mathcal{I}}C)=\neg^{\mathcal{P}}(\boldsymbol{U}(C)\to^{\mathcal{P}}\boldsymbol{U}(B))$

É fácil verificar agora:

Fato 1. *A função **U** atende ao requisito acima, isto é, para cada valoração w em $\mathcal{I}^1$ existe uma valoração w' em $\mathcal{P}^1$ tal que $\boldsymbol{D}(w(F))=w'(\boldsymbol{U}(F))$ para toda fórmula F de $\mathcal{I}^1$.*

Prova-se por indução sobre a complexidade das fórmulas de $\mathcal{I}^1$.

Fato 2. $w(\neg^{\mathcal{I}}A)=\mathrm{V} \Leftrightarrow w'(\boldsymbol{U}(\neg^{\mathcal{I}}A))=\mathrm{F}$;

$w(B\to^{\mathcal{I}}C)=\mathrm{V} \Leftrightarrow w'(\boldsymbol{U}(B\to^{\mathcal{I}}C))=\mathrm{F}$.

Consequência do **Fato 1**.

Fato 3. $\boldsymbol{U}(A\wedge^{\mathcal{I}}B)=\boldsymbol{U}(A)\vee^{\mathcal{P}}\boldsymbol{U}(B)$;

$\boldsymbol{U}(A\vee^{\mathcal{I}}B)=\boldsymbol{U}(A)\wedge^{\mathcal{P}}\boldsymbol{U}(B)$.

Consequência do **Fato 2** e das definições das conjunções e das disjunções dadas acima.

Observe que o **Fato 2** nos informa que as tautologias e as contradições de $\mathcal{I}^1$ estão sendo mapeadas, respectivamente, a contradições e tautologias de $\mathcal{P}^1$: este é justamente o efeito do dualizador. Seguindo o método dado em Feitosa, 1997, podemos também construir uma tradução conservativa (vide **2.3.4.1**) de $\mathcal{I}^1$ em $\mathcal{P}^1$, isto é, uma função $\boldsymbol{R}$ das fórmulas de $\mathcal{I}^1$ nas fórmulas de $\mathcal{P}^1$ tal que $\Gamma \vDash_{\mathcal{I}^1} F \Leftrightarrow \boldsymbol{R}(\Gamma) \vDash_{\mathcal{P}^1} \boldsymbol{R}(F)$. Basta tomar a função dada por:

$$\left.\begin{array}{ll}\textbf{(R1)} & \boldsymbol{R}(p)=\neg^{\mathcal{P}}\neg^{\mathcal{P}}p \\ \textbf{(R2)} & \boldsymbol{R}(\neg^{\mathcal{I}}p)=\sim^{\mathcal{P}}p\end{array}\right\}\ \text{para } p \text{ atômica}$$

(R3) $\boldsymbol{R}(\neg^{\mathcal{I}} A) = \neg^{\mathcal{P}} \boldsymbol{R}(A)$ para A não-atômica

(R4) $\boldsymbol{R}(B \to^{\mathcal{I}} C) = \neg^{\mathcal{P}} \boldsymbol{R}(B) \vee^{\mathcal{P}} \boldsymbol{R}(C)$

Pode-se verificar imediatamente:

Fato 4. *Sejam dadas $w^{\mathcal{I}}$ e $w^{\mathcal{P}}$ valorações, respectivamente, de $\mathcal{I}^1$ e de $\mathcal{P}^1$, tais que $w^{\mathcal{I}}(p)=w^{\mathcal{P}}(p)$ para toda variável proposicional p. Tome w como a função cujo domínio é $\mathrm{FOR}(\mathcal{I}^1) \cup \mathrm{FOR}(\mathcal{P}^1)$ e tal que $w(F)=w^{\mathcal{I}}(F)$ se $F \in \mathrm{FOR}(\mathcal{I}^1)$, e $w(F)=w^{\mathcal{P}}(F)$ se $F \in \mathrm{FOR}(\mathcal{P}^1)$. Tome finalmente v como a função tal que $v(F)=1$ se $w(F)=\mathrm{V}$, $v(F)=½$ se $w(F) \in \{\mathrm{F}^*, \mathrm{V}^*\}$, e $v(F)=0$ se $w(F)=\mathrm{F}$. Então, para toda $F \in \mathrm{FOR}(\mathcal{I}^1)$ tem-se que*

$$v(F)=1 \Leftrightarrow v(\boldsymbol{R}(F)) \neq 0.$$

Sejam p e q proposições atômicas. Das matrizes de $\mathcal{P}^1$ é fácil notar que, para toda proposição F, atômica ou não, $\boldsymbol{R}(F)$ não pode tomar o valor ½.

Caso 1.1 F é p. Da negação de $\mathcal{P}^1$ temos **(*)** $v(p)=1 \Leftrightarrow v(\neg^{\mathcal{P}}\neg^{\mathcal{P}} p) \neq 0$, e de **(R1)** concluímos que $v(p)=1 \Leftrightarrow v(\boldsymbol{R}(p)) \neq 0$.

Caso 1.2 F é $\neg^{\mathcal{I}} p$. Da negação de $\mathcal{I}^1$ temos $v(\neg^{\mathcal{I}} p)=1 \Leftrightarrow v(p)=0$. Mas da negação forte de $\mathcal{P}^1$ temos que **(*)** $v(p)=0 \Leftrightarrow v(\sim^{\mathcal{P}} p) \neq 0$. De **(R2)** concluímos que $v(\neg^{\mathcal{I}} p)=1 \Leftrightarrow v(\boldsymbol{R}(\neg^{\mathcal{I}} p)) \neq 0$.

Caso 1.3 F é $p \to^{\mathcal{I}} q$. Da implicação de $\mathcal{I}^1$ temos $v(p \to^{\mathcal{I}} q)=1 \Leftrightarrow v(p) \neq 1$ ou $v(q)=1$. Do **Caso 1.1** temos **(*)** $v(p) \neq 1$ ou $v(q)=1 \Leftrightarrow v(\boldsymbol{R}(p))=0$ ou $v(\boldsymbol{R}(q)) \neq 0$. Mas como $\boldsymbol{R}(p)$ não pode tomar o valor ½, da negação e da disjunção de $\mathcal{P}^1$ temos **(**)** $v(\boldsymbol{R}(p))=0$ ou $v(\boldsymbol{R}(q)) \neq 0 \Leftrightarrow v(\neg^{\mathcal{P}} \boldsymbol{R}(p) \vee^{\mathcal{P}} \boldsymbol{R}(q)) \neq 0$, e de **(R4)** concluímos que $v(p \to^{\mathcal{I}} q)=1 \Leftrightarrow v(\boldsymbol{R}(p \to^{\mathcal{I}} q)) \neq 0$.

Suponhamos agora, por hipótese de indução, **(HI)**, que o **Fato 4** valha para proposições não-atômicas A e B. Neste caso, nota-se das matrizes de $\mathcal{I}^1$ que também A e B estão proibidas de tomar o valor ½. Mostraremos a seguir que o **Fato 4** também vale para $\neg^{\mathcal{I}} A$ e $A \to^{\mathcal{I}} B$.

Caso 2.1 F é $\neg^{\mathcal{I}} A$. Temos $v(\neg^{\mathcal{I}} A)=1 \Leftrightarrow v(A)=0$, e como $v(A)$ deve ser, neste caso, diferente de ½, temos, por **(HI)**, que $v(A)=0 \Leftrightarrow v(\boldsymbol{R}(A))=0$. Como $v(\boldsymbol{R}(A))$ também não pode ser ½, temos $v(\boldsymbol{R}(A))=0 \Leftrightarrow v(\neg^{\mathcal{P}} \boldsymbol{R}(A)) \neq 0$, e de **(R3)** concluímos que $v(\neg^{\mathcal{I}} A)=1 \Leftrightarrow v(\boldsymbol{R}(\neg^{\mathcal{I}} A)) \neq 0$.

Caso 2.2 F é $A \rightarrow^{\mathcal{I}} B$. Temos $v(A \rightarrow^{\mathcal{I}} B) = 1 \Leftrightarrow v(A) \neq 1$ ou $v(B) = 1$. Como A não pode neste caso tomar o valor ½, temos, por **(HI)**, que $v(A) \neq 1$ ou $v(B) = 1 \Leftrightarrow v(\boldsymbol{R}(A)) = 0$ ou $v(\boldsymbol{R}(B)) \neq 0$. Como $\boldsymbol{R}(A)$ também não pode tomar o valor ½, temos $v(\boldsymbol{R}(A)) = 0$ ou $v(\boldsymbol{R}(B)) \neq 0 \Leftrightarrow v(\neg^{\mathcal{P}} \boldsymbol{R}(A) \vee^{\mathcal{P}} \boldsymbol{R}(B)) \neq 0$, e de **(R4)** concluímos mais uma vez que $v(A \rightarrow^{\mathcal{I}} B) = 1 \Leftrightarrow v(\boldsymbol{R}(A \rightarrow^{\mathcal{I}} B)) \neq 0$.

Caso 2.3 F é $p \rightarrow^{\mathcal{I}} B$ ou $A \rightarrow^{\mathcal{I}} p$, para p atômica. Basta considerar, em conjunto, os **Casos 1.3** e **2.2**.

Como consequência do fato acima, podemos provar:

Fato 5. *A função* $\boldsymbol{R}$ *é uma tradução conservativa.*

Tome $\Gamma \cup \{F\} \subseteq \text{For}(\mathcal{I}^1)$ tal que $\Gamma \vDash_{\mathcal{I}^1} F$. Mas, por definição, $\Gamma \vDash_{\mathcal{I}^1} F \Leftrightarrow$ para toda v (definida como no **Fato 4** acima) tal que $v(\Gamma) = 1$ vale $v(F) = 1$. Do **Fato 4**, para toda v tal que $v(\boldsymbol{R}(\Gamma)) \neq 0$ vale $v(\boldsymbol{R}(F)) \neq 0$. Por definição, para toda v tal que $v(\boldsymbol{R}(\Gamma)) \neq 0$ vale $v(\boldsymbol{R}(F)) \neq 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{R}(\Gamma) \vDash_{\mathcal{P}^1} \boldsymbol{R}(F)$.

O leitor deve observar que a função $\boldsymbol{R}$ que acima apresentamos difere daquela proposta por Feitosa (1997).[1] Além disso, apesar de bastante interessante, esta tradução não é dual no sentido de Queiroz (1997): embora ela seja conservativa e gramatical, não é bijetora nem literal relativamente a variáveis.

[1] Com muita razão. A função apresentada por Feitosa (1997, item **7.4.8**, p.118) coincide com a nossa em **(R3)** e **(R4)**, mas substitui **(R1)** e **(R2)** por **(R0)**: $\boldsymbol{R}(p) = p$. Nossos **Fatos 4** e **5** correspondem, respectivamente, aos **Lema 7.4.20** e à **Proposição 7.4.21** de Feitosa. No entanto, o efeito da troca acima é desastroso: **(i)** em primeiro lugar, ao tomarmos a fórmula $p \vee^{\mathcal{I}} \neg^{\mathcal{I}} p$ verificamos facilmente que, embora $\nvDash_{\mathcal{I}^1} p \vee^{\mathcal{I}} \neg^{\mathcal{I}} p$, segundo **(R0)**, **(R3)** e **(R4)** e a definição de $\vee^{\mathcal{I}}$ temos $\vDash_{\mathcal{P}^1} \boldsymbol{R}(p \vee^{\mathcal{I}} \neg^{\mathcal{I}} p)$ – donde $\boldsymbol{R}$ não seria *conservativa*; **(ii)** em segundo lugar, o **Lema 7.4.20** não separa, como o faz o **Fato 4**, os casos **1.x** de **2.x**, e a consequência é que pelo menos cinco de suas equivalências falham – observe por exemplo que, se mantemos **(R0)**, as passagens que marcamos com **(*)** no **Fato 4** falham quando tomamos $v(p) = ½$, e como neste caso também não é verdade que $v(\boldsymbol{R}(F)) \neq ½$ para toda fórmula F, a passagem que marcamos com **(**)** falha quando tomamos $v(\boldsymbol{R}(p)) = ½$ – daí, embora a função $\boldsymbol{R}$ proposta por Feitosa ainda seja uma *tradução*, sua prova por contraposição da **Proposição 7.4.21** não funciona, não se prestando sequer a demonstrar este fato.

É evidente que poderíamos igualmente construir dualizadores e traduções conservativas de $\mathcal{P}^1$ em I^1. Teremos assim maneiras alternativas de caracterizar a dualidade entre estas lógicas. Assim como fizemos para $\mathcal{P}^1$, poderíamos buscar a lógica dual a $\mathcal{P}^2$, a qual poderíamos denominar I^2, obtida de maneira óbvia, pela modificação conveniente da tabela da negação. Quais as propriedades de I^2? Como axiomatizar esta lógica? Será ela também maximal?

A tendência destes exemplos é multiplicar-se indefinidamente. Paramos por aqui.

Questões abertas

Muitas foram as questões deixadas em aberto ao longo deste trabalho; *felizmente*, acrescentaríamos, pois onde há perguntas, há vida. É bem verdade que algumas delas não são originais, e já se encontram mais ou menos formuladas em algum outro trabalho. Compilamos e comentamos a seguir uma lista das principais questões ainda sem resposta que o leitor terá aqui encontrado.

Velhas interrogações

1) Qual o grau de sucesso obtido por Wittgenstein em seu esclarecimento – ou, segundo Moreno (1993), “terapia” – do papel da contradição na matemática? Vimos em **1.1** que, de certa forma, a preocupação com relação à presença de contradições no cálculo deve ser secundária: o paradoxo de Curry, desconhecido por Wittgenstein, e o surgimento posterior de lógicas paraconsistentes (vide **1.4**) mostraram que o verdadeiro alvo de ataque deveria ter sido a trivialização, e não a inconsistência. A questão mais adequada seria: como impedir a trivialização do cálculo, advinda ou não da inconsistência? Mais ainda, já se perguntava Turing (vide **1.2**), como fazê-lo mecanicamente? Realmente, em tempos nos quais se fala de *prova automática de teoremas* e *inteligência artificial* e se dispõe de criaturas tão complexas e tão faltas de inteligência quanto os computadores hodiernos – cujos *softwares*, ademais, se encontram não raro infestados de *bugs* das mais diversas espécies – esta é uma preocupação mais do que atual. Dentre as várias mudanças de atitude exortadas por Wittgenstein (vide **1.1** e **1.3**), aquela com relação à premunição mecânica da trivialização nos parece ter sido a mais insatisfatoriamente defendida – como afinal programar os tais “anjos bons”? Cumpre investigar escrupulosamente a opinião de Wittgenstein a este respeito.

2) Em **1.4** vimos que Goldstein acredita ser possível detectar tendências dialeteistas na segunda filosofia de Wittgenstein. Mas será que Wittgenstein teria realmente aceitado a existência de contradições na realidade? Não é o que nos parece, pois vimos em **1.6** que podemos caracterizar Wittgenstein como anti-platonista, e vimos em **1.3** que o filósofo vê a matemática como um jogo, as proposições verdadeiras e falsas como configurações do jogo, e acredita ser absurdo falar em “configurações contraditórias”. Além disso, em **1.3** deixamos ainda bem claro que o que o segundo Wittgenstein denomina “essência” nada mais é do um aspecto da descrição gramatical dos objetos. Acreditamos ser muito difícil apontar em Wittgenstein, como propõe da Costa (vide **1.4**) com relação à filosofia das lógicas não-clássicas, qualquer espécie de *comprometimento ontológico*. Nos parece que Goldstein e seus asseclas devem seguramente convocar seus advogados a defender tão polêmica asserção.

3) É evidente que as concepções de Wittgenstein sobre o tópico “fundamentos da matemática” influenciam tremendamente seu método filosófico (vide **1.3** e **1.5**). Mas até que ponto é possível *falar sobre* matemática sem *fazê-la* (vide **1.**) – ou conhecê-la? Será que podemos realmente afirmar que os problemas matemáticos reais são desimportantes aos fundamentos da matemática? Em **1.5.1** mostramos como um grande equívoco na interpretação das provas de equiconsistência e um completo mal-entendido com relação ao Segundo Teorema de Gödel por parte de Wittgenstein podem ser entendidos como o resultado de sua desconfiança visceral com relação à concepção e ao escopo da Metamatemática. Além disso, sugerimos em **1.6** que a falta de uma semântica bem definida (vide **1.5.2**) pode ser vista como a justificação para outro grande equívoco de Wittgenstein, desta vez com relação ao funcionamento e ao significado do Primeiro Teorema de Gödel.

Em **1.6** levantamos a seguinte questão: até que ponto é possível a um cientista ou pensador evitar que seus preconceitos invadam, moldem e talhem as suas investigações, levando-o inclusive a formular teses equivocadas? Curry (vide **1.5.1**) acreditava ver no formalismo de Hilbert resquícios da filosofia idealista alemã. Analogamente, não é difícil vermos o logicismo de Russell e o intuicionismo de Brouwer como frutos, respectivamente, de uma visão superotimista – panglossiana, quase – acerca dos produtos da ciência, e de uma tese metafísico-epistemológica muito forte acerca do papel da matemática. Newton, Darwin e Cantor, entre outros, parecem ter sido capazes de controlar, cada qual à sua vez, suas inclinações religiosas na produção de suas grandiosas obras – não obstante, parecem não ter jamais cessado de sentir por isso um certo peso na consciência.

Será que poderíamos dizer o mesmo de Wittgenstein, isto é, será que o filósofo conseguiu evitar que sua filosofia fosse um espelho de seus preconceitos? A resposta será positiva se for verdade que na filosofia (de Wittgenstein) não há teses (vide **1.6**). Muitos discordam desta premissa, e alguns afirmam que pelo menos uma tese há: a tese de que “em filosofia não há teses” (cf. p.ex. Dummett, 1978). Podemos nos perguntar, de todo modo: que outros equívocos teriam sido evitados por Wittgenstein caso o filósofo conhecesse, e se permitisse, um pouco mais de matemática?

Mais além, se Wittgenstein contara entre seus *bons alunos* um bom matemático – e estamos supondo que Turing não foi um bom aluno, pois não parece ter sido influenciado em seu trabalho matemático por idéias wittgensteinianas – podemos nos perguntar: que tipo de pesquisa faria um tal aluno?

4) Em **2.3.4.2** nos perguntamos se todas as lógicas seriam intertradutíveis. Em particular, deixamos em aberto a seguinte questão: haverá uma tradução conservativa de C_1 em $\mathcal{W}_3$? Dada a enorme variedade de lógicas estudadas na literatura, talvez seja necessário restringir um pouco a questão da intertradutibilidade universal das lógicas: haverá traduções (conservativas) entre quaisquer duas *lógicas monotônicas baseadas numa mesma linguagem*? haverá igualmente traduções *recursivas*? Como já apontado por Feitosa (1997) e Carnielli & D’Ottaviano (1997), este é um importante problema que envolve complexidade de algoritmos.

5) Em **5.3** levantamos a questão: haverá algum cálculo paraconsistente que estenda o cálculo C_1 de da Costa e no qual valha o Teorema da Substitutividade de Equivalentes, **(TSE)** (vide **2.1.1.*i***)? Em 1987, em sua tese de doutorado, Urbas mostrou que não há um tal cálculo (cf. Urbas, 1989). A questão acima se conecta sutilmente àquela formulada no apêndice ω, **Formas de Contraposição**, sobre a validade de esquemas tais como $(\neg A \to B) \to (\neg B \to A)$. Ora, em qualquer cálculo S no qual valha o Teorema da Dedução e Modus Ponens, temos $\vdash_S C \to (D \to C)$ e $C \to D$, $D \to E \vdash_S C \to E$. Destes teoremas e do esquema anterior é imediato concluir $\vdash_S B \to (\neg B \to A)$, donde o cálculo S não seria paraconsistente. Mas os esquemas de contraposição são essenciais à demonstração usual de **(TSE)**, e à algebrização usual do cálculo S… Não obstante, podem-se formular versões "mais fracas" de **(TSE)**, como aquela válida para $C_1^{\dagger}$ (vide **5.3**), e deve-se notar que há uma certa classe de estruturas algébricas que pode ser associada aos cálculos de da Costa (cf. Carnielli & de Alcântara, 1984). Para o cálculo $\mathcal{P}^1$, o qual sabemos estender maximamente o cálculo C_1 (vide o **Teorema VI** do apêndice ω+ω, **A segunda via**), uma algebrização no estilo Blok-Pigozzi – uma espécie de generalização da algebrização no estilo Tarski-Lindenbaum usual – já foi apresentada (cf. Lewin *et al.*, 1990). Será que é possível fazer o mesmo para o cálculo $\mathcal{P}^2$, que introduzimos em **5.4.2.2** e que sabemos também estender maximamente o cálculo C_1 (vide o **Teorema VIII** do apêndice ω+ω, **A Terceira Margem**)?

Que outras versões de **(TSE)** e que outras estruturas algébricas (vide **Fatoração**, neste capítulo) podem ser associadas a lógicas paraconsistentes? Este campo permanece ainda aberto à exploração. Por um lado, seguindo a abordagem de da Costa, podemos pensar na lógica paraconsistente como uma maneira de explorar o significado da negação (vide **1.1**). Foi assim que da Costa & Béziau, (1997) propuseram uma lógica *superclássica*, paraconsistente e paracompleta, baseada numa estrutura algébrica inusual, com uma negação que verifica todas as leis de De Morgan e valida o esquema $A \equiv \neg\neg A$, mas cuja implicação não verifica nenhum dos esquemas de definição cruzada implicação-disjunção e implicação-conjunção (vide o apêndice ω). Para esta lógica pode-se demonstrar o Teorema da

Dedução e a existência de uma relação de congruência não-trivial. Por outro lado, Béziau (1998a) mostrou que lógicas paraconsistentes com negações suficientemente fortes não podem ser algebrizadas no sentido usual.

Por outro lado, os relevantistas (cf. Priest & Routley, 1989) têm criticado a suposta debilidade de quase todas as negações produzidas pela escola de da Costa, e propuseram lógicas nas quais tanto **(TSE)** quanto a algebrização são as usuais, mas que dispõem apenas de versões mais fracas do Teorema da Dedução. Como consequência, não vale nestas lógicas, por exemplo, o silogismo disjuntivo: A, $\neg A \vee B \vdash B$.

Ambas as abordagens acima foram criticadas por Slater (1995). Segundo este autor, em nenhum dos casos a negação mereceria este nome, pois não é uma relação que forma proposições contraditórias, isto é, proposições A e $\neg A$ que não possam ser simultaneamente verdadeiras nem simultaneamente falsas. Sob este ponto de vista, não haveria quaisquer negações "desviantes", já que a única relação que forma contraditórios em uma lógica *normal* – uma lógica cuja relação de dedutibilidade, $\vdash$, é um operador de fecho (vide **2.3.4.1**) – é a negação clássica (cf. Béziau, 1998a).

Por fim, é possível ainda projetar lógicas paraconsistentes baseadas em álgebras duais à álgebra de Heyting para a lógica intuicionista. Foi o que fizeram, independentemente, Urbas (1996) e Queiroz (1997). Ambas as propostas se ressentem, todavia, da falta de uma axiomatização hilbertiana correspondente. Todas as lógicas acima discutidas, assim como aquelas que sobrevirão, têm suas características particulares, vantagens e defeitos. Quais delas sobreviverão? Esta decisão fica para o "tribunal da história".

6) Ao demonstrarmos a maximalidade de $\mathcal{J}_3$, no apêndice $\omega+\omega$, discutimos a possibilidade de se definir e estudar os cálculos de uma hierarquia $\mathcal{J}_n$, $n>2$, "dual" à hierarquia $Ł_n$, $n>2$, de cálculos polivalentes de Łukasiewicz. Um primeiro passo em direção à generalização polivalente dos resultados de D'Ottaviano & da Costa (1970) foi dado por Kotas & da Costa (1980), com a definição das *lógicas generalizadas de Łukasiewicz*, e sua axiomatização no caso finito. Em julho de 1997, no First World Congress on Paraconsistency, realizado em Ghent, na Bélgica, Avron apresentou uma conferência intitulada “Multiple-valued logics with exactly one non-designated element”, na qual defendeu o estudo de cálculos polivalentes com todos os valores distinguidos à exceção de um, os quais forneceriam os melhores modelos algébricos para o estudo de lógicas paraconsistentes. As *álgebras de Łukasiewicz* associadas aos cálculos polivalentes de Łukasiewicz têm sido amplamente estudadas (para os principais resultados na área, cf. Cignoli *et al.*, 1995). Cumpre verificar ao menos que resultados seriam preservados por suas estruturas “duais”.

Novas interrogações

7) Em **2.3.3.5** mostramos como a *completude* da semântica de traduções possíveis para C_1 pode ser obtida como um corolário de sua *representabilidade* (vide **2.3.3.4**) em termos da semântica paraconsistente de valorações já conhecida para C_1 (vide **2.2**). O mesmo método, essencialmente, foi utilizado na demonstração da completude da semântica de traduções possíveis oferecida para todas as doze hierarquias de cálculos aqui estudadas (vide o apêndice ω, **Cálculos**), bem como para os casos de C_{min} e $C_{min}^{\neg\neg}$. Para os casos de $\mathcal{P}^1$ e $\mathcal{P}^2$ utilizamos diretamente as matrizes trivalentes já conhecidas. Em todos os casos passamos portanto pela representabilidade, isto é, pela construção de um **TP**-modelo e uma **TP**-valoração para cada modelo paraconsistente dado. Cabe aqui a questão: como seria uma demonstração “direta” de completude da semântica de traduções possíveis, isto é, uma demonstração que não resultasse imediatamente da representabilidade, ou ainda em outras palavras, uma demonstração que não dependesse da existência anterior de uma outra semântica fortemente adequada ao cálculo em foco? A resposta a esta questão pode ser capital ao desenvolvimento de uma poderosa tecnologia associada a esta nova classe de semânticas que aqui estudamos.

8) Será que podemos engendrar semânticas de traduções possíveis para quaisquer lógicas que disponham de um procedimento de decisão por (quase-)matrizes? No caso das lógicas polivalentes basta notar que sua semântica é um caso particular das semânticas de traduções possíveis, tomando como única tradução a função identidade. Conjeturamos que todo procedimento de decisão por quase-matrizes poderá eventualmente ser mapeado a uma semântica de traduções possíveis, tal como fizemos em **2.3.3.7**.

Façamos portanto uma pergunta mais geral: será que toda lógica que possui uma semântica de valorações adequada possui igualmente uma semântica de traduções possíveis, e vice-versa? A este respeito vale despender um par de palavras. O método de se fornecer semânticas de valorações para cálculos não-clássicos, ilustrado em detalhes em Loparić & da Costa, 1984, faz parte de um programa mais amplo, de inspiração "fregeana", qual seja, o de fornecer para todas as lógicas semânticas bivaluadas (não necessariamente verofuncionais): este programa é conhecido como Teoria da Valoração. Béziau (1998b) mostrou como reduzir toda semântica de um certo tipo a uma semântica bivaluada: todas as lógicas normais (vide a questão **5**, acima) possuem uma semântica bivaluada adequada, constituída exatamente pelas funções características do fecho de suas teorias; se estas lógicas forem também compactas podemos tomar a semântica bivaluada constituída pelas funções características de suas teorias saturadas (vide p.ex. o **Lema** e a **Completude** de C_{min}, em **4.2**). Além disso, da Costa & Béziau (1994) mostraram que se uma tal lógica for decidível, então ela o é por meio de um procedimento (recursivo) de quase-matrizes. Observe que, mesmo que se possa mostrar que existe uma semântica de valorações para toda lógica normal, nem sempre é fácil formular finitamente suas cláusulas definidoras. Exemplo: embora o cálculo proposicional intuicionista seja normal, ninguém até agora foi capaz de fornecer-lhe uma semântica de valorações com algumas poucas cláusulas, que dirá uma semântica de traduções possíveis.

Ora, as semânticas de traduções possíveis parecem caminhar em sentido contrário à Teoria da Valoração: nas hierarquias que aqui estudamos, tratamos de mostrar que cálculos que já possuíam semânticas bivaluadas não-verofuncionais possuem também semânticas de traduções possíveis baseadas em lógicas trivalentes. Mas se estabelecermos uma correspondência entre estes dois tipos de semântica, poderemos realmente vê-las como complementares: teremos mostrado não somente que toda lógica normal possui uma semântica bivaluada, como também uma semântica *verofuncional* baseada em uma lógica polivalente (vide a discussão deste tópico em **Fatoração**, no presente capítulo). Poderíamos então ver este programa como uma generalização da Teoria da Valoração, com uma inspiração "leibniziana", talvez.

9) Uma outra faceta da questão acima resulta no estabelecimento de uma certa ligação entre as semânticas de traduções possíveis e as semânticas de mundos possíveis. O leitor se recordará de que em **5.4.2.1** e **5.4.2.2** mostramos que os cálculos $\mathcal{P}^1$ e $\mathcal{P}^2$ possuem ambos os tipos de semântica mencionados – além de semânticas de sociedade e semânticas trivalentes. Observamos ainda que Loparić (1978) mostrou como fornecer uma semântica bivaluada não-verofuncional e um procedimento de decisão por quase-matrizes para o cálculo modal normal minimal $\mathcal{K}$. Seus resultados parecem ser facilmente adaptáveis a diversos cálculos modais normais estendendo $\mathcal{K}$, tais como $\mathcal{T}$, $\mathcal{S}4$ e $\mathcal{S}5$. Encontraremos matrizes polivalentes e traduções apropriadas a fim de definir uma semântica de traduções possíveis para estes cálculos modais? Por outro lado, seremos capazes de definir semânticas de mundos possíveis para cada cálculo das hierarquias paraconsistentes aqui estudadas (vide **2.3**)? De maneira mais geral: será que toda lógica que possui uma semântica de mundos possíveis adequada possui igualmente uma semântica de traduções possíveis, e vice-versa? Note que uma resposta positiva a esta questão seria igualmente suficiente para garantir que o cálculo proposicional intuicionista possuiria uma semântica de traduções possíveis, dada a conhecida interpretação modal deste cálculo (vide **Produto**, neste capítulo).

10) Em **4.2**, construímos o cálculo C_{min} acrescentando a Lei de Dummett **(LD)**: $A \vee (A \to B)$ como um novo esquema de axioma a C_ω, e logo em seguida mostramos como deduzir a partir de C_{min} a Lei de Peirce **(LP)**: $((A \to B) \to A) \to A$. Do apêndice $\omega\times\omega$, **Independência de Peirce e Dummett em C_ω** já sabíamos que nem **(LD)** nem **(LP)** eram demonstráveis em C_ω. Será que poderíamos ter construído C_{min} alternativamente pela adição de **(LP)** a C_ω? Conjeturamos que não, embora ainda não tenhamos sido capazes de demonstrar a independência de **(LD)** em $C_\omega \cup \{$**(LP)**$\}$. Se nossa conjetura estiver correta, então podemos decerto dizer que o cálculo positivo clássico seria axiomatizado por C_1**(1)** - C_1**(8)** $\cup \{$**(LD)**$\}$, mas seria equivocado afirmar, como fizemos em **2.1.1.*e***, que ele poderia ser axiomatizado por C_1**(1)** - C_1**(8)**$\cup\{$**(LP)**$\}$. A correção dessa conjetura justificaria ainda a distinção – que em caso contrário seria artificial – feita no capítulo **4.** entre os esquemas do cálculo positivo clássico e os esquemas puramente positivos do cálculo clássico.

11) Algumas questões acerca de C_{min} foram deixadas sem resposta em **4.5.4**: **(a)** será que podemos fornecer uma semântica de mundos possíveis para este cálculo seguindo o modelo da semântica de mundos possíveis apresentada para C_ω por Baaz (1986)? **(b)** embora já tenhamos descoberto que este cálculo não é o limite da hierarquia C_n, será que ele é o cálculo-limite de alguma outra hierarquia, tal como $C_n\backslash\{\boldsymbol{C_n}\textbf{(10)}\}$, $n<\omega$? Questões análogas podem ser colocadas com relação ao cálculo $C_{min}^{\neg\neg}$.

12) Várias questões sobre C_{Lim}, o verdadeiro cálculo-limite da hierarquia C_n, foram deixadas sem resposta em **4.6** (e em Carnielli & Marcos, 199?b): **(a)** como fornecer uma semântica de valorações para este cálculo? **(b)** como fornecer-lhe uma semântica de traduções possíveis baseada nas matrizes de $\mathcal{W}_3$ (vide **2.3.1**)? **(c)** será possível definir em C_{Lim} uma negação forte? **(d)** como fornecer uma axiomatização hilbertiana para este cálculo? É evidente que questões análogas se aplicam aos cálculos-limites das outras onze hierarquias tratadas no capítulo **5.** Fixada uma das hierarquias C_n^x, $C_n^{\neg\neg x}$, C_n^{+x} ou $C_n^{+\neg\neg x}$, haverá alguma diferença entre os cálculos-limites de suas versões levo, dextro e biparaconsistentes? Conjecturamos que não, donde poderíamos concluir por uma certa artificialidade nesta tripla distinção. De qualquer forma, não deixa de ser interessante notar que duas hierarquias tais como C_n^ℓ e C_n^b, a segunda constituída de cálculos estritamente mais fortes do que os cálculos correspondentes da primeira, sejam tais que seus cálculos-limites, isto é, os núcleos comuns a todos os cálculos de cada hierarquia, sejam rigorosamente o mesmo cálculo.

13) Em **5.4.2.1** e **5.4.2.2** mostramos como interpretar dois cálculos trivalentes, $\mathcal{P}^1$ e $\mathcal{P}^2$, através de uma semântica de traduções possíveis baseada num cálculo bivalente, o cálculo proposicional clássico, e restrições adequadas sobre as traduções.

Conviria tratar o cálculo $\mathcal{P}^1$ por $\mathcal{P}^1_3$, já que ele é trivalente. Carnielli & Lima-Marques (1999) mostraram como fornecer uma semântica de sociedade baseada em $\mathcal{P}^1_3$ para um cálculo que denominaremos $\mathcal{P}^1_4$, cujas matrizes são as seguintes:

$\wedge$	**V**	**V***	**V****	**F**
V	V	V	V	F
V*	V	V	V	F
V**	V	V	V	F
F	F	F	F	F

$\vee$	**V**	**V***	**V****	**F**
V	V	V	V	V
V*	V	V	V	V
V**	V	V	V	V
F	V	V	V	F

$\rightarrow$	**V**	**V***	**V****	**F**
V	V	V	V	F
V*	V	V	V	F
V**	V	V	V	F
F	V	V	V	V

	$\neg$
V	F
V*	V**
V**	V
F	V

onde $\{V, V^*, V^{**}\}$ são os valores distinguidos, os quais podem ser entendidos, nesta ordem, como graus decrescentes de verdade. Carnielli & Lima-Marques mostraram que $\mathcal{P}^1_4$ é a lógica das sociedades *triassertivas* abertas, isto é, aquelas nas quais tanto o valor de $\neg A$ quanto o de $\neg\neg A$ não dependem funcionalmente do valor de verdade de A.

Uma semântica de traduções possíveis para $\mathcal{P}^1_4$ é dada por $<\mathcal{P}^1_3, \boldsymbol{T}>$, onde as funções de tradução $*$: $\text{For}(\mathcal{P}^1_4) \rightarrow \text{For}(\mathcal{P}^1_3)$ em $\boldsymbol{T}$ estão sujeitas às mesmas restrições que no caso de $\mathcal{P}^1_3$ (vide **5.4.2.1**). O que muda são as relações de forçamento. Dadas três funções de tradução, $*_i$, $*_j$ e $*_k$ definimos agora a *relação de forçamento trilocal*, denotada por $\vDash^{*_i*_j*_k}$, como:

(B1.1) $\vDash^{*_i*_j*_k} p$ se $\vDash_{\mathcal{P}^1_3} p^{*_i}$ ou $\vDash_{\mathcal{P}^1_3} p^{*_j}$ ou $\vDash_{\mathcal{P}^1_3} p^{*_k}$;

(B1.2) $\vDash^{*_i*_j*_k} \neg p$ se $\nvDash_{\mathcal{P}^1_3} p^{*_i}$ ou $\nvDash_{\mathcal{P}^1_3} p^{*_j}$ ou $\nvDash_{\mathcal{P}^1_3} p^{*_k}$;

(B1.3) $\vDash^{*_i*_j*_k} \neg\neg p$ se $\nvDash^{*_i*_j} \neg p$ ou $\nvDash^{*_i*_k} \neg p$ ou $\nvDash^{*_j*_k} \neg p$;

(B2.1) $\vDash^{*_i*_j*_k} \neg A$ se $\nvDash^{*_i*_j*_k} A$, se A não for atômica nem negação de atômica;

(B2.2) $\vDash^{*_i*_j*_k} A \wedge B$ se $\vDash^{*_i*_j*_k} A$ e $\vDash^{*_i*_j*_k} B$;

(B2.3) $\vDash^{*_i *_j *_k} A \vee B$ se $\vDash^{*_i *_j *_k} A$ ou $\vDash^{*_i *_j *_k} B$;

(B2.4) $\vDash^{*_i *_j *_k} A \rightarrow B$ se $\nvDash^{*_i *_j *_k} A$ ou $\vDash^{*_i *_j *_k} B$.

Note que em **(B1.3)** fizemos uso da relação de forçamento bilocal definida em **5.4.2.1**. Para toda fórmula F em $\mathcal{P}^1_4$, definimos agora a *relação de forçamento global*, denotada por $\vDash_{\mathbf{TP}}$, como:

$$\vDash_{\mathbf{TP}} F \Leftrightarrow \text{para quaisquer } *_i, *_j \text{ e } *_k \text{ vale } \vDash^{*_i *_j *_k} F.$$

O único axioma de $\mathcal{P}^1_3$ não validado pelas matrizes de $\mathcal{P}^1_4$ (vide a axiomatização que fornecemos no **Teorema IV** do apêndice $\omega+\omega$, **A segunda via**) é representado pelo esquema $(\neg A)^{(n)}$. Como consequência, observamos por exemplo que o esquema $\neg(\neg A \wedge \neg\neg A)$ é válido em $\mathcal{P}^1_3$ mas não em $\mathcal{P}^1_4$. Não obstante esta falha, verificamos facilmente que um outro esquema, $(\neg\neg A)^{(n)}$, é por sua vez validado pelas matrizes de $\mathcal{P}^1_4$. Conjecturamos que o cálculo $\mathcal{P}^1_4$ pode ser axiomatizado exatamente pela substituição do axioma $(\neg A)^{(n)}$ de $\mathcal{P}^1_3$ pelo axioma $(\neg\neg A)^{(n)}$, donde concluiríamos que o cálculo $\mathcal{P}^1_4$ seria estritamente mais fraco do que $\mathcal{P}^1_3$. Generalizando todo o procedimento acima poderíamos definir toda uma hierarquia de cálculos cada vez mais fracos, os cálculos $\mathcal{P}^1_n$, $1 \leq n < \omega$, onde cada $\mathcal{P}^1_m$ é um cálculo m-valente, e provar analogamente sua completude. Que características terá o cálculo-limite desta hierarquia (vide a questão **12**)? Como definir, de maneira semelhante, uma hierarquia de cálculos a partir do cálculo $\mathcal{P}^2$? Será que podemos definir semânticas de mundos possíveis elegantes – como aquelas apresentadas para $\mathcal{P}^1_3$ e para $\mathcal{P}^2$, em **5.4.2.1** e **5.4.2.2** – para os outros cálculos destas hierarquias? Todas as perguntas acima podem ser recolocadas com relação aos cálculos paracompletos $\mathcal{I}^1$ e $\mathcal{I}^2$ (vide **Terceiras Estórias**, no presente capítulo). A rigor, com relação ao cálculo $\mathcal{I}^2$, devemos antes deixar bem claro qual seria a sua axiomática, e também demonstrar sua suposta maximalidade, como fizemos para o cálculo $\mathcal{P}^2$ no apêndice $\omega+\omega$, **A Terceira Margem**.

Em cada um dos casos acima, mostramos como fornecer uma semântica de traduções possíveis para um cálculo n-valente baseada em uma lógica $(n-1)$-valente. Cabe aqui a seguinte questão: será que conseguiremos aplicar a mesma técnica a outros cálculos polivalentes? Isto é, será que é sempre possível tratar as matrizes de uma lógica n-valente em termos de semânticas de traduções possíveis baseadas em matrizes m-valentes, para algum $m<n$? A resposta a esta questão se liga à resposta à primeira parte da questão **8**, logo acima. Com efeito, já em 1975, Suszko sugerira a possibilidade de se fornecer uma semântica bivaluada para o cálculo trivalente de Łukasiewicz. Ora, como toda lógica polivalente finitária é normal (vide a questão **5**), já que sua relação de consequência semântica é um operador de fecho, e é também obviamente decidível, então sabemos que existe para ela não apenas uma semântica bivaluada adequada como também um procedimento de decisão por quase-matrizes. Se dispusermos de uma técnica para reduzir toda matriz n-valente finita às condições equivalentes em termos de valorações bivaluadas – o que já se constituiria numa valiosa contribuição à Teoria da Valoração – e ainda for verdade que nestas condições há sempre uma semântica de traduções possíveis correspondente, então a resposta à questão acima sobre a redutibilidade de matrizes de uma lógica n-valente em termos de semânticas de traduções possíveis já estará a meio caminho. Um primeiro passo na busca de uma tal técnica é ensaiado pelo autor em Marcos, 199?b.

14) Na primeira parte do apêndice **ω×ω** mostramos a independência de cada um dos axiomas dos cálculos C_n^{ℓ}, C_n^{d}, C_n^{b}, $C_n^{\neg\neg\ell}$, $C_n^{\neg\neg d}$, $C_n^{\neg\neg b}$, $1\leq n<\omega$ (vide o apêndice **ω**, **Cálculos**). Resta fazer o mesmo para os cálculos $C_n^{+\ell}$, C_n^{+d}, C_n^{+b}, $C_n^{+\neg\neg\ell}$, $C_n^{+\neg\neg d}$, $C_n^{+\neg\neg b}$, $1\leq n<\omega$.

15) Na parte final do apêndice **ω×ω** mostramos a incaracterizabilidade por matrizes finitas de todos os cálculos paraconsistentes tratados neste trabalho, com exceção de $\mathcal{P}^1$ e $\mathcal{P}^2$ – os quais são trivalentes – e também de $C_{min}^{\neg\neg}$: com efeito, as demonstrações de Arruda e de Carnielli não são apropriadas para este último. Deixamos como desafio ao leitor a tarefa de encontrar uma demonstração de que este cálculo $C_{min}^{\neg\neg}$ seria incaracterizável por matrizes finitas – se de fato o for – ou mostrar que a incaracterizabilidade por matrizes finitas do cálculo $C_{min}^{\neg\neg}$ seria uma consequência da incaracterizabilidade por matrizes finitas dos cálculos que o estendem – se de fato o for – ou simplesmente elaborar uma demonstração mais geral que sirva simultaneamente a todos os cálculos mencionados. As mesmas questões são evidentemente cabíveis com relação ao cálculo $\mathcal{D}_{min}^{\neg\neg}$ introduzido em **Primeiras Estórias**, no presente capítulo.

16) Em **Através do Espelho**, neste capítulo, mostramos que tudo o que fizemos para lógicas paraconsistentes pode ser de certa forma reproduzido para lógicas paracompletas relacionadas. É evidente que a mesma observação se aplica igualmente a lógicas que são ao mesmo tempo paraconsistentes e paracompletas, como por exemplo $\mathcal{V}_0$, uma das *lógicas da vaguidade* propostas por Arruda & Alves (1979a e 1979b). Conjeturamos que em casos como este poderíamos fornecer uma semântica de traduções possíveis baseada numa lógica tetravalente.

17) Em **Produto**, neste capítulo, apresentamos um primeiro exemplo de semântica de traduções possíveis não baseada em lógicas polivalentes, mas em modelos da semântica de mundos possíveis para o Cálculo Intuicionista de Heyting. Outras interpretações modais poderiam e deveriam ser exploradas. O interessante neste ponto é notar que também as semânticas de traduções possíveis nos permitem combinar lógicas conhecidas para gerar novas lógicas, almejando por exemplo satisfazer necessidades específicas de sistemas de dedução aplicados. Para tornar ainda mais forte a nossa nova ferramenta semântica, interessa investigar doravante as principais questões que deixamos em aberto bem aqui, no presente capítulo (vide subseções de **Combinações entre lógicas**): como seriam as semânticas de traduções possíveis para lógicas de primeira ordem?, como generalizar o próprio conceito de semântica de traduções possíveis, fazendo uso por exemplo da teoria de feixes?, quais as relações da semântica de traduções possíveis, por exemplo, com os fibrados estudados por Gabbay, e com outras formas de combinar lógicas? As respostas a questões deste gênero definirão o próprio futuro das semânticas de traduções possíveis.

ω
Quem É Quem

Tratamos, ao longo do presente trabalho, de diversos cálculos paraconsistentes, entre eles as hierarquias C_n^{ℓ}, C_n^{d}, C_n^{b}, $C_n^{\neg\neg\,\ell}$, $C_n^{\neg\neg\,d}$, $C_n^{\neg\neg\,b}$, $C_n^{+\,\ell}$, $C_n^{+\,d}$, $C_n^{+\,b}$, $C_n^{+\,\neg\neg\,\ell}$, $C_n^{+\,\neg\neg\,d}$, $C_n^{+\,\neg\neg\,b}$, $1 \leq n < \omega$, seus cálculos-limites, e também os cálculos C_{min}, $C_{min}^{\neg\neg}$, $\mathcal{P}^1$, $\mathcal{P}^2$ e $\mathcal{J}_3$. Vários destes cálculos foram aqui apresentados pela primeira vez, todos receberam uma semântica de traduções possíveis.

A seguir apresentamos brevemente os axiomas dos cálculos acima mencionados e fornecemos listas de alguns dos principais teoremas que os singularizam, para fim de presta consulta e intercomparação. Todos os cálculos paraconsistentes abordados restringem de alguma forma o cálculo proposicional clássico – daí ser oportuno apresentarmos diversos teoremas clássicos e testarmos sua validade nos cálculos paraconsistentes supracitados.

Axiomas

Definições:

$$X^{\circ} \stackrel{\text{def}}{=} \neg(X \wedge \neg X) \qquad\qquad X^{\square} \stackrel{\text{def}}{=} \neg(\neg X \wedge X)$$

$$\begin{cases} X^{0} \stackrel{\text{def}}{=} X \\ X^{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} (X^{n})^{\circ} \text{ para } 1 \leq n < \omega \end{cases} \qquad \begin{cases} X^{\underline{0}} \stackrel{\text{def}}{=} X \\ X^{\underline{n+1}} \stackrel{\text{def}}{=} (X^{\underline{n}})^{\square} \text{ para } 1 \leq n < \omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} X^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} X \\ X^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} X^{1} \\ X^{(n+1)} \stackrel{\text{def}}{=} X^{(n)} \wedge X^{n+1} \text{ para } 1 < n < \omega \end{cases} \qquad \begin{cases} X^{[0]} \stackrel{\text{def}}{=} X \\ X^{[1]} \stackrel{\text{def}}{=} X^{\underline{1}} \\ X^{[n+1]} \stackrel{\text{def}}{=} X^{[n]} \wedge X^{\underline{n+1}} \text{ para } 1 < n < \omega \end{cases}$$

Regra: Modus Ponens, **(MP)**, $\dfrac{A, A \to B}{B}$

Esquemas:

(1) $A \to (B \to A)$

(2) $(A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$

(3) $A \to (B \to (A \wedge B))$

(4) $(A \wedge B) \to A$

(5) $(A \wedge B) \to B$

(6) $A \to (A \vee B)$

(7) $B \to (A \vee B)$

(8) $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$

$(9^{(n)})$ $B^{(n)} \to ((A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A))$

$(9^{[n]})$ $B^{[n]} \to ((A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A))$

$(10^{(n)}_{\wedge})$ $(A^{(n)} \wedge B^{(n)}) \to ((A \wedge B)^{(n)} \wedge (A \vee B)^{(n)} \wedge (A \to B)^{(n)})$

$(10^{[n]}_{\wedge})$ $(A^{[n]} \wedge B^{[n]}) \to ((A \wedge B)^{[n]} \wedge (A \vee B)^{[n]} \wedge (A \to B)^{[n]})$

$(10^{(n)}_{\vee})$ $(A^{(n)} \vee B^{(n)}) \to ((A \wedge B)^{(n)} \wedge (A \vee B)^{(n)} \wedge (A \to B)^{(n)})$

$(10^{[n]}_{\vee})$ $(A^{[n]} \vee B^{[n]}) \to ((A \wedge B)^{[n]} \wedge (A \vee B)^{[n]} \wedge (A \to B)^{[n]})$

(11) $A \vee \neg A$

(12) $\neg\neg A \to A$

(AN) $A \to \neg\neg A$

(LD) $A \vee (A \to B)$

$(\vee_{(n)} \wedge)$ $(A^{(n)} \vee B^{(n)}) \to (A^{(n)} \wedge B^{(n)})$

$(\vee_{[n]} \wedge)$ $(A^{[n]} \vee B^{[n]}) \to (A^{[n]} \wedge B^{[n]})$

$(\mathrm{NC}^{(n)}_{1})$ $(A \wedge B)^{(n)} \wedge (A \vee B)^{(n)} \wedge (A \to B)^{(n)}$

$(\mathrm{NC}^{(n)}_{2})$ $(\neg A)^{(n)}$

$(\mathrm{NC}^{(n)}_{3})$ $A^{(n)}$

Cálculos

- *Cálculo Positivo Intuicionista* **(CPI)**: **(1)** a **(8)**, e **(MP)**

— a partir destes axiomas e da regra de Modus Ponens, pode-se deduzir todos os teoremas livres de negação do Cálculo Intuicionista de Heyting.

- *Cálculo* C_ω: **(CPI)**, **(11)** e **(12)**.
- *Família de hierarquias* C_n, $0 < n < \omega$:
  - C_n^ℓ: C_ω, $\mathbf{(9^{(n)})}$ e $\mathbf{(10^{(n)}_\wedge)}$
  - C_n^d: C_ω, $\mathbf{(9^{[n]})}$ e $\mathbf{(10^{[n]}_\wedge)}$
  - C_n^b: C_ω, $\mathbf{(9^{(n)})}$, $\mathbf{(9^{[n]})}$ e ($\mathbf{(10^{(n)}_\wedge)}$ ou $\mathbf{(10^{[n]}_\wedge)}$)

— leia o índice ℓ como "levoparaconsistente", o índice d como "dextroparaconsistente", o índice b como "biparaconsistente". A hierarquia original de da Costa (1963) é C_n^ℓ.

  - $C_n^{\neg\neg\ell}$: C_n^ℓ e **(AN)**
  - $C_n^{\neg\neg d}$: C_n^d e **(AN)**
  - $C_n^{\neg\neg b}$: C_n^b e **(AN)**

— leia o índice $\neg\neg$ como "com acréscimo de negações".

- *Família de hierarquias* C_n^+, $0 < n < \omega$:
  - $C_n^{+\ell}$: C_ω, $\mathbf{(9^{(n)})}$ e $\mathbf{(10^{(n)}_\vee)}$
  - C_n^{+d}: C_ω, $\mathbf{(9^{[n]})}$ e $\mathbf{(10^{[n]}_\vee)}$
  - C_n^{+b}: C_ω, $\mathbf{(9^{(n)})}$, $\mathbf{(9^{[n]})}$ e ($\mathbf{(10^{(n)}_\vee)}$ ou $\mathbf{(10^{[n]}_\vee)}$)
  - $C_n^{+\neg\neg\ell}$: $C_n^{+\ell}$ e **(AN)**
  - $C_n^{+\neg\neg d}$: C_n^{+d} e **(AN)**
  - $C_n^{+\neg\neg b}$: C_n^{+b} e **(AN)**
- *Cálculo* C_{min}: C_ω e **(LD)**

  Cálculo $C_{min}^{\neg\neg}$: C_{min} e **(AN)**
- *Cálculo* $\mathcal{P}^1$: (C_n^b ou C_n^{+b}), $\mathbf{(NC^{(n)}_1)}$ e $\mathbf{(NC^{(n)}_2)}$

  Cálculo $\mathcal{P}^2$: ($C_n^{\neg\neg b}$ ou $C_n^{+\neg\neg b}$) e $\mathbf{(NC^{(n)}_1)}$
- *Cálculo Proposicional Clássico* (**CP**): ($\mathcal{P}^1$ ou $\mathcal{P}^2$) e, por exemplo, $\mathbf{(NC^{(n)}_3)}$

Mais complicada, a axiomatização de $\mathcal{J}_3$ pode ser encontrada em D'Ottaviano, 1982. A axiomatização de $\boldsymbol{RM}_3^{\supset}$, cálculo análogo a $\mathcal{J}_3$ mas cuja linguagem não contém o símbolo ∇ (vide o apêndice $\omega+\omega$, **$\mathcal{J}_3$ é maximal**) pode ser encontrada em Avron, 1986.

Fixado um $n<\omega$, a relação entre os cálculos das hierarquias acima definidas pode ser visualizada na figura seguinte:

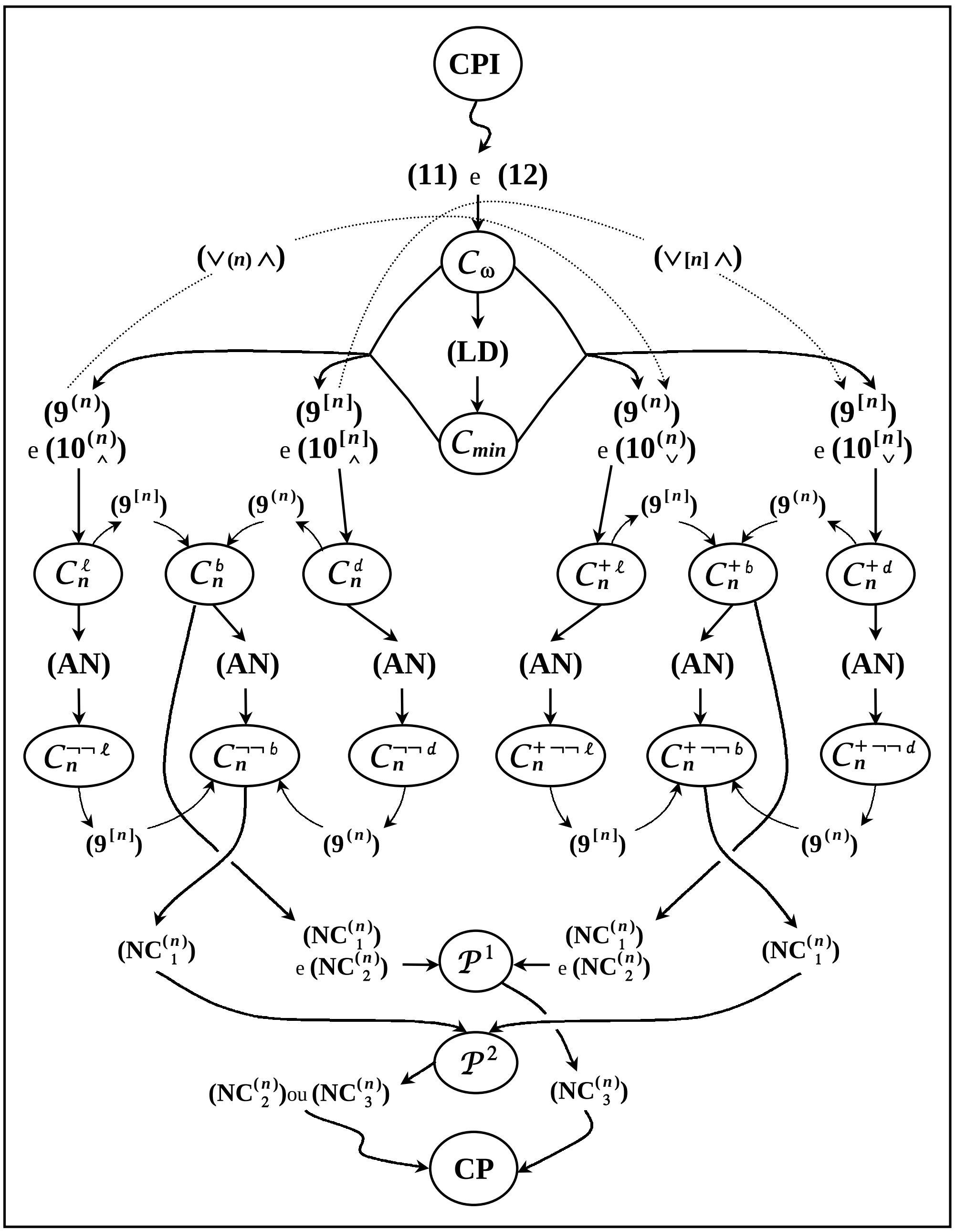

Figura 3

Leis de De Morgan

Já mencionamos estas leis em **3.5.3**. Por conveniência, dividamo-las aqui em quatro grupos:

Grupo I

$$\neg(A \wedge B) \to (\neg A \vee \neg B)$$
$$\neg(A \wedge \neg B) \to (\neg A \vee B)$$
$$\neg(\neg A \wedge B) \to (A \vee \neg B)$$
$$\neg(\neg A \wedge \neg B) \to (A \vee B)$$

Grupo II

$$\neg(A \vee B) \to (\neg A \wedge \neg B)$$
$$\neg(A \vee \neg B) \to (\neg A \wedge B)$$
$$\neg(\neg A \vee B) \to (A \wedge \neg B)$$
$$\neg(\neg A \vee \neg B) \to (A \wedge B)$$

Grupo III

$$(\neg A \vee \neg B) \to \neg(A \wedge B)$$
$$(\neg A \vee B) \to \neg(A \wedge \neg B)$$
$$(A \vee \neg B) \to \neg(\neg A \wedge B)$$
$$(A \vee B) \to \neg(\neg A \wedge \neg B)$$

Grupo IV

$$(\neg A \wedge \neg B) \to \neg(A \vee B)$$
$$(\neg A \wedge B) \to \neg(A \vee \neg B)$$
$$(A \wedge \neg B) \to \neg(\neg A \vee B)$$
$$(A \wedge B) \to \neg(\neg A \vee \neg B)$$

Das fórmulas acima, valem:

- *em* C_{min} e $C_{min}^{\neg\neg}$: **nenhuma**;
- *em* C_n^{ℓ}, C_n^{d}, C_n^{b}, $C_n^{\neg\neg\,\ell}$, $C_n^{\neg\neg\,\mathsf{d}}$, $C_n^{\neg\neg\,\mathsf{b}}$: **Grupo I**;
- *em* $C_n^{+\,\ell}$, $C_n^{+\,\mathsf{d}}$, $C_n^{+\,\mathsf{b}}$, $C_n^{+\,\neg\neg\,\ell}$, $C_n^{+\,\neg\neg\,\mathsf{d}}$, $C_n^{+\,\neg\neg\,\mathsf{b}}$: **Grupos I** e **II**;
- *em* $\mathcal{P}^1$ e $\mathcal{P}^2$: **Grupos I** e **II**;
- *em* $\mathcal{J}_3$: **Grupos I**, **II**¸ **III** e **IV**.

Implicação-disjunção

Consideremos os quatro grupos de fórmulas a seguir:

Grupo I

$$(A \to B) \to (\neg A \vee B)$$
$$(A \to \neg B) \to (\neg A \vee \neg B)$$
$$(\neg A \to B) \to (A \vee B)$$
$$(\neg A \to \neg B) \to (A \vee \neg B)$$

Grupo II

$$\neg(A \to B) \to \neg(\neg A \vee B)$$
$$\neg(A \to \neg B) \to \neg(\neg A \vee \neg B)$$
$$\neg(\neg A \to B) \to \neg(A \vee B)$$
$$\neg(\neg A \to \neg B) \to \neg(A \vee \neg B)$$

Grupo III

$$(\neg A \vee B) \to (A \to B)$$
$$(\neg A \vee \neg B) \to (A \to \neg B)$$
$$(A \vee B) \to (\neg A \to B)$$
$$(A \vee \neg B) \to (\neg A \to \neg B)$$

Grupo IV

$$\neg(\neg A \vee B) \to \neg(A \to B)$$
$$\neg(\neg A \vee \neg B) \to \neg(A \to \neg B)$$
$$\neg(A \vee B) \to \neg(\neg A \to B)$$
$$\neg(A \vee \neg B) \to \neg(\neg A \to \neg B)$$

Destas fórmulas, valem:

- *em* C_{min} e $C_{min}^{\neg\neg}$: **Grupo I**;
- *em* C_n^{ℓ}, C_n^{d}, C_n^{b}, $C_n^{\neg\neg\,\ell}$, $C_n^{\neg\neg\,d}$, $C_n^{\neg\neg\,b}$: **Grupo I**;
- *em* $C_n^{+\,\ell}$, $C_n^{+\,d}$, $C_n^{+\,b}$, $C_n^{+\,\neg\neg\,\ell}$, $C_n^{+\,\neg\neg\,d}$, $C_n^{+\,\neg\neg\,b}$: **Grupo I**;
- *em* $\mathcal{P}^1$ e $\mathcal{P}^2$: **Grupos I** e **IV**;
- *em* J_3: **Grupos I**, **II** e **IV**.

Implicação-conjunção

Consideremos agora os quatro grupos a seguir:

Grupo I

$$(A \to B) \to \neg (A \wedge \neg B)$$
$$(A \to \neg B) \to \neg (A \wedge B)$$
$$(\neg A \to B) \to \neg (\neg A \wedge \neg B)$$
$$(\neg A \to \neg B) \to \neg (\neg A \wedge B)$$

Grupo II

$$\neg (A \to B) \to (A \wedge \neg B)$$
$$\neg (A \to \neg B) \to (A \wedge B)$$
$$\neg (\neg A \to B) \to (\neg A \wedge \neg B)$$
$$\neg (\neg A \to \neg B) \to (\neg A \wedge B)$$

Grupo III

$$\neg (A \wedge \neg B) \to (A \to B)$$
$$\neg (A \wedge B) \to (A \to \neg B)$$
$$\neg (\neg A \wedge \neg B) \to (\neg A \to B)$$
$$\neg (\neg A \wedge B) \to (\neg A \to \neg B)$$

Grupo IV

$$(A \wedge \neg B) \to \neg (A \to B)$$
$$(A \wedge B) \to \neg (A \to \neg B)$$
$$(\neg A \wedge \neg B) \to \neg (\neg A \to B)$$
$$(\neg A \wedge B) \to \neg (\neg A \to \neg B)$$

Valem:

- *em* C_{min} e $C_{min}^{\neg\neg}$: **nenhuma**;
- *em* C_n^{ℓ}, C_n^{d}, C_n^{b}, $C_n^{\neg\neg\,\ell}$, $C_n^{\neg\neg\,\mathsf{d}}$, $C_n^{\neg\neg\,\mathsf{b}}$: **nenhuma**;
- *em* $C_n^{+\,\ell}$, $C_n^{+\,\mathsf{d}}$, $C_n^{+\,\mathsf{b}}$, $C_n^{+\,\neg\neg\,\ell}$, $C_n^{+\,\neg\neg\,\mathsf{d}}$, $C_n^{+\,\neg\neg\,\mathsf{b}}$: **Grupos II** e **III**;
- *em* $\mathcal{P}^1$ e $\mathcal{P}^2$: **Grupos II** e **III**;
- *em* J_3: **Grupos I**, **II** e **IV**.

Formas de contraposição

Consideremos as fórmulas seguintes:

$$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$$

$$(A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$$

$$(\neg A \to B) \to (\neg B \to A)$$

$$(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$$

Nenhuma destas fórmulas é válida em qualquer dos cálculos paraconsistentes acima considerados. Talvez valha a pena investigar o interesse e a aplicação de cálculos paraconsistentes nos quais (algumas d)elas valham.

Outros esquemas

Os esquemas **($9^{(n)}$)** e **($9^{[n]}$)** são os únicos esquemas em **Axiomas** que não valem em $\mathcal{J}_3$. Como pelo menos uma forma destes esquemas é válida em cada cálculo das doze hierarquias paraconsistentes aqui estudadas, o cálculo $\mathcal{J}_3$ estende apenas os cálculos C_{min} e $C_{min}^{\neg\neg}$.

Vale a pena ressaltar ainda que os esquemas

$$\neg(\boldsymbol{B} \wedge \neg \boldsymbol{B}) \ \text{ e } \ \neg(\neg \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{B})$$

valem em $\mathcal{J}_3$ mas não valem em nenhum dos outros cálculos considerados.

Observe que, embora as fórmulas acima, B° e $B^\Box$, não sejam teoremas de $\mathcal{P}^1$, $(\neg B)^\circ$, $(\neg B)^\Box$, $(A \# B)^\circ$ e $(A \# B)^\Box$, com $\# \in \{\wedge, \vee, \to\}$, o são. O esquema

$$(\neg \boldsymbol{A} \to \neg \boldsymbol{B}) \to ((\neg \boldsymbol{A} \to \neg\neg \boldsymbol{B}) \to \boldsymbol{A})$$

é um dos axiomas da versão original de $\mathcal{P}^1$ (vide **5.4.2.1**) e não vale em nenhum dos outros cálculos considerados. Como o esquema **(AN)**: $A \to \neg\neg A$ não vale em $\mathcal{P}^1$, este cálculo estende os cálculos de exatamente metade das hierarquias estudadas, quais sejam, C_n^{ℓ}, C_n^{d}, C_n^{b}, $C_n^{+\ell}$, C_n^{+d} e C_n^{+b}.

O axioma $\mathcal{P}^1$**(3)** da axiomatização original de $\mathcal{P}^1$ (vide **5.4.2.1**) é o único não-válido em $\mathcal{P}^2$. Da axiomatização para $\mathcal{P}^1$ que aqui apresentamos (vide **Cálculos**, neste apêndice), **(NC$_2^{(n)}$)** é o único esquema não-válido em $\mathcal{P}^2$. Não obstante, o cálculo $\mathcal{P}^2$ estende *todos* os cálculos das doze hierarquias aqui estudadas. Observe que, como em $\mathcal{P}^1$, as fórmulas $(A\#B)^\circ$ e $(A\#B)^\square$, com $\#\in\{\wedge,\vee,\rightarrow\}$, são teoremas de $\mathcal{P}^2$, mas $(\neg B)^\circ$ e $(\neg B)^\square$ não o são.

O esquema

$$\boldsymbol{B^\circ \rightarrow B^\square}$$

vale em C_n^ℓ, $C_n^{\neg\neg\ell}$, C_n^b, $C_n^{\neg\neg b}$, $C_n^{+\ell}$, $C_n^{+\neg\neg\ell}$, C_n^{+b}, $C_n^{+\neg\neg b}$, em $\mathcal{P}^1$, em $\mathcal{P}^2$ e em J_3, mas não vale em C_n^d, $C_n^{\neg\neg d}$, C_n^{+d}, $C_n^{+\neg\neg d}$, C_{min}, $C_{min}^{\neg\neg}$. Similarmente, o esquema

$$\boldsymbol{B^\square \rightarrow B^\circ}$$

vale em C_n^d, $C_n^{\neg\neg d}$, C_n^b, $C_n^{\neg\neg b}$, C_n^{+d}, $C_n^{+\neg\neg d}$, C_n^{+b}, $C_n^{+\neg\neg b}$, em $\mathcal{P}^1$, em $\mathcal{P}^2$ e em J_3, mas não vale em C_n^ℓ, $C_n^{\neg\neg\ell}$, $C_n^{+\ell}$, $C_n^{+\neg\neg\ell}$, C_{min}, $C_{min}^{\neg\neg}$.

O esquema

$$\boldsymbol{(A^{n-1}\wedge\neg A^{n-1})^{(n)}}$$

é válido em C_n^ℓ, C_n^b, $C_n^{\neg\neg\ell}$, $C_n^{\neg\neg b}$, $C_n^{+\ell}$, C_n^{+b}, $C_n^{+\neg\neg\ell}$, $C_n^{+\neg\neg b}$, em $\mathcal{P}^1$, em $\mathcal{P}^2$ e em J_3, mas não é válido em C_m^ℓ, C_m^b, $C_m^{\neg\neg\ell}$, $C_m^{\neg\neg b}$, $C_m^{+\ell}$, C_m^{+b}, $C_m^{+\neg\neg\ell}$ e $C_m^{+\neg\neg b}$, para $m>n$. Similarmente, o esquema

$$\boldsymbol{(A^{\underline{n-1}}\wedge\neg A^{\underline{n-1}})^{[n]}}$$

é válido em C_n^d, C_n^b, $C_n^{\neg\neg d}$, $C_n^{\neg\neg b}$, C_n^{+d}, C_n^{+b}, $C_n^{+\neg\neg d}$, $C_n^{+\neg\neg b}$, em $\mathcal{P}^1$, em $\mathcal{P}^2$ e em J_3, mas não é válido em C_m^d, C_m^b, $C_m^{\neg\neg d}$, $C_m^{\neg\neg b}$, C_m^{+d}, C_m^{+b}, $C_m^{+\neg\neg d}$ e $C_m^{+\neg\neg b}$, para $m>n$.

O esquema

$$\boldsymbol{A \to \neg\neg A}$$

vale em $C_n^{\neg\neg\ell}$, $C_n^{\neg\neg d}$, $C_n^{\neg\neg b}$, $C_n^{+\neg\neg\ell}$, $C_n^{+\neg\neg d}$, $C_n^{+\neg\neg b}$, em $\mathcal{P}^2$ e em J_3, mas não vale nos demais cálculos. O esquema

$$\boldsymbol{(\neg A)^{(n)} \to A^{(n)}}$$

vale somente em $C_n^{\neg\neg\ell}$, $C_n^{\neg\neg b}$, $C_n^{+\neg\neg\ell}$, $C_n^{+\neg\neg b}$, em $\mathcal{P}^2$ e em J_3. Similarmente, o esquema

$$\boldsymbol{(\neg A)^{[n]} \to A^{[n]}}$$

vale somente em $C_n^{\neg\neg d}$, $C_n^{\neg\neg b}$, $C_n^{+\neg\neg d}$, $C_n^{+\neg\neg b}$, em $\mathcal{P}^2$ e em J_3.

O esquema

$$\boldsymbol{(A \wedge \neg A) \to (\neg\neg(A \wedge \neg A) \vee \neg\neg(\neg A \wedge A))}$$

é válido em todos os cálculos considerados, com a única exceção de C_{min}.

ω+ω
Algumas Lógicas Trivalentes

Da capacidade de expressão de $Ł_3$, J_3 e $\mathcal{W}_3$

Seguindo Rescher (1993), podemos afirmar que a "era pioneira" das lógicas polivalentes teve início em 1920, com a publicação de um artigo de Łukasiewicz em que este expunha sua lógica trivalente, $Ł_3$, motivado por idéias de *modalidade*. Proposições acerca de um *futuro contingente*, tais como "amanhã haverá uma batalha naval", não podem no presente ser verdadeiras ou falsas. Para avaliá-las, Łukasiewicz estendeu a lógica clássica pela introdução de um terceiro valor de verdade – denominado *intermediário*, *neutro* ou *indeterminado*.

As tabelas de verdade referentes a esta lógica são construídas pela avaliação das seguintes funções, que tomam { 0, ½, 1 } como domínio:

- $v(A \wedge B) = min[v(A),\ v(B)]$;
- $v(A \vee B) = max[v(A),\ v(B)]$;
- $v(A \rightarrow B) = min[1,\ 1 - v(A) + v(B)]$;
- $v(\neg A) = 1 - v(A)$.

Logo, são elas:

∧	1	½	0
1	1	½	0
½	½	½	0
0	0	0	0

∨	1	½	0
1	1	1	1
½	1	½	½
0	1	½	0

→	1	½	0
1	1	½	0
½	1	1	½
0	1	1	1

	¬
1	0
½	½
0	1

onde 1 é o único valor distinguido, e $A \equiv B \overset{\text{def}}{=} (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$. A conjunção e a disjunção podem também ser definidas em termos da implicação e da negação:

$A \vee B \overset{\text{def}}{=} (A \rightarrow B) \rightarrow B$;

$A \wedge B \overset{\text{def}}{=} \neg(\neg A \vee \neg B)$.

Diremos que uma matriz trivalente (entendida aqui como um operador) é *hiperclássica* se a sua restrição ao domínio clássico ({ 0, 1 }) resulta numa matriz clássica. Isto é, no caso de matrizes binárias e unárias,

✌	1	½	0
1	b_{11}	$\cancel{b_{12}}$	b_{13}
~~**½**~~	$\cancel{b_{21}}$	$\cancel{b_{22}}$	$\cancel{b_{23}}$
0	b_{31}	$\cancel{b_{32}}$	b_{33}

$\Longrightarrow$

✌	1	0
1	b_{11}	b_{13}
0	b_{31}	b_{33}

	👍
1	u_1
~~**½**~~	$\cancel{u_2}$
0	u_3

$\Longrightarrow$

	👍
1	u_1
0	u_3

as matrizes binárias hiperclássicas são aquelas tais que $b_{11}, b_{13}, b_{31}, b_{33} \in \{0, 1\}$, e as matrizes unárias hiperclássicas são aquelas tais que $u_1, u_3 \in \{0, 1\}$. Dizemos neste caso que as matrizes à direita são o *reduto* das matrizes à esquerda.

Ora, é evidente que todas as matrizes trivalentes cujos redutos são tautologias clássicas representam teoremas clássicos. Mas nem todas elas representam teoremas de $Ł_3$ – no caso das matrizes unárias e binárias, também os valores cortados à esquerda $(b_{12}, b_{21}, b_{22}, b_{23}, b_{32}, u_2)$ devem ser distinguidos. Daí, é fácil ver que $Ł_3$ constitui apenas um fragmento do cálculo proposicional clássico (**CP**), isto é,

$$Teo(Ł_3) \subset Teo(\mathbf{CP}).$$

Como exemplo de teoremas clássicos que não são teoremas de $Ł_3$ considere as fórmulas

① $(A \to B) \to ((\neg A \to B) \to B)$

② $\neg(A \equiv \neg A)$

cujas matrizes são

①	1	½	0
1	**1**	1	**1**
½	1	½	1
0	**1**	1	**1**

	②
1	**1**
½	*0*
0	**1**

Mas quais matrizes somos de fato capazes de "designar" com fórmulas bem-formadas da nossa linguagem? No caso clássico, sabemos que *todas* as matrizes unárias e binárias são designáveis. No caso de $Ł_3$, contudo, está claro que *somente* matrizes hiperclássicas podem ser designadas, já que aplicados ao domínio clássico todos os seus conectivos dão como saída valores clássicos (indução sobre a complexidade das fórmulas). Será que podemos designar *todas* as matrizes unárias e binárias hiperclássicas?

Teorema I. *Todas as matrizes unárias e binárias trivalentes hiperclássicas podem ser obtidas a partir da implicação e da negação de Łukasiewicz.*

Já vimos que podemos escrever $\wedge$ e $\vee$ em termos de $\neg$ e $\rightarrow$. Mais ainda, não é difícil verificar que, destes quatro conectivos, $\{\neg, \rightarrow\}$ é o subconjunto mínimo de conectivos primitivos de $Ł_3$ (no sentido de que qualquer outro deve contê-lo).

Resolveremos o problema se pudermos construir as matrizes seguintes:

	✞$^{0}_{1}$
1	**0**
½	1
0	1

	✞$^{0}_{2}$
1	1
½	**0**
0	1

	✞$^{½}_{2}$
1	1
½	½
0	1

	✞$^{0}_{3}$
1	1
½	1
0	**0**

	☪
1	**1**
½	**1**
0	**1**

✡$^{0}_{11}$	**1**	**½**	**0**
1	**0**	1	1
½	1	1	1
0	1	1	1

✡$^{0}_{12}$	**1**	**½**	**0**
1	1	**0**	1
½	1	1	1
0	1	1	1

✡$^{½}_{12}$	**1**	**½**	**0**
1	1	½	1
½	1	1	1
0	1	1	1

✡$^{0}_{13}$	**1**	**½**	**0**
1	1	1	**0**
½	1	1	1
0	1	1	1

✡$^{0}_{21}$	**1**	**½**	**0**
1	1	1	1
½	**0**	1	1
0	1	1	1

✡$^{½}_{21}$	**1**	**½**	**0**
1	1	1	1
½	½	1	1
0	1	1	1

✡$^{0}_{22}$	**1**	**½**	**0**
1	1	1	1
½	1	**0**	1
0	1	1	1

✡$^{½}_{22}$	**1**	**½**	**0**
1	1	1	1
½	1	½	1
0	1	1	1

✡$^{0}_{23}$	**1**	**½**	**0**
1	1	1	1
½	1	1	**0**
0	1	1	1

✡$^{½}_{23}$	**1**	**½**	**0**
1	1	1	1
½	1	1	½
0	1	1	1

✡$^{0}_{31}$	**1**	**½**	**0**
1	1	1	1
½	1	1	1
0	**0**	1	1

✡$^{0}_{32}$	**1**	**½**	**0**
1	1	1	1
½	1	1	1
0	1	**0**	1

✡$^{½}_{32}$	**1**	**½**	**0**
1	1	1	1
½	1	1	1
0	1	½	1

✡$^{0}_{33}$	**1**	**½**	**0**
1	1	1	1
½	1	1	1
0	1	1	**0**

☯	**1**	**½**	**0**
1	**1**	**1**	**1**
½	**1**	**1**	**1**
0	**1**	**1**	**1**

Com o auxílio da conjunção de $Ł_3$ e das matrizes acima já podemos, “multiplicando”, construir todas as matrizes trivalentes hiperclássicas unárias e binárias. Por exemplo, se desejássemos construir as matrizes seguintes,

$\to^J$	**1**	**½**	**0**
1	1	½	0
½	1	½	0
0	1	1	1

$\equiv^J$	**1**	**½**	**0**
1	1	0	0
½	0	½	0
0	0	0	1

	∇^J
1	1
½	1
0	0

bastaria fazer:

$$A \to^J B \;\overset{\text{def}}{=}\; (A\,\text{✡}^{½}_{12}B)\wedge(A\,\text{✡}^{0}_{13}B)\wedge(A\,\text{✡}^{½}_{22}B)\wedge(A\,\text{✡}^{0}_{23}B);$$

$$A \equiv^J B \;\overset{\text{def}}{=}\; (A\,\text{✡}^{0}_{12}B)\wedge(A\,\text{✡}^{0}_{13}B)\wedge(A\,\text{✡}^{0}_{21}B)\wedge$$
$$\wedge(A\,\text{✡}^{½}_{22}B)\wedge(A\,\text{✡}^{0}_{23}B)\wedge(A\,\text{✡}^{0}_{31}B)\wedge(A\,\text{✡}^{0}_{32}B);$$

$$\nabla^J A \;\overset{\text{def}}{=}\; \text{✞}^{0}_{3}A.$$

N.B.: o leitor terá notado que $\to^J$ e ∇^J representam, respectivamente, a implicação básica e o operador nabla de J_3. (vide **2.3.3**) O operador $\equiv^J$ é conhecido como *equivalência forte* de J_3. (vide D’Ottaviano, 1982)

UM PROCEDIMENTO CONSTRUTIVO. Exibamos as fórmulas que geram as matrizes acima:

$$\text{✞}^{0}_{1}A \;\overset{\text{def}}{=}\; A\to\neg A;$$

$$\text{✞}^{0}_{2}A \;\overset{\text{def}}{=}\; \neg(A\equiv\neg A);$$

$$\text{✞}^{½}_{2}A \;\overset{\text{def}}{=}\; A\vee\neg A;$$

$$
\begin{aligned}
\text{✟}^{0}_{3} A &\stackrel{\text{def}}{=} \text{✟}^{0}_{1}(\neg A);\\
\text{☪} A &\stackrel{\text{def}}{=} (\text{✟}^{0}_{1} A) \vee (\text{✟}^{0}_{2} A);\\
A \text{✡}^{0}_{11} B &\stackrel{\text{def}}{=} A \rightarrow (A \rightarrow (\text{✟}^{0}_{1} B));\\
A \text{✡}^{0}_{12} B &\stackrel{\text{def}}{=} \neg \text{✟}^{0}_{1}(A \text{✡}^{½}_{12} B);\\
A \text{✡}^{½}_{12} B &\stackrel{\text{def}}{=} A \rightarrow ((\text{✟}^{0}_{3} B) \rightarrow B);\\
A \text{✡}^{0}_{13} B &\stackrel{\text{def}}{=} A \text{✡}^{0}_{11} (\neg B);\\
A \text{✡}^{0}_{21} B &\stackrel{\text{def}}{=} \neg \text{✟}^{0}_{1}(A \text{✡}^{½}_{21} B);\\
A \text{✡}^{½}_{21} B &\stackrel{\text{def}}{=} B \text{✡}^{½}_{12} A;\\
A \text{✡}^{0}_{22} B &\stackrel{\text{def}}{=} \neg \text{✟}^{0}_{1}(A \text{✡}^{½}_{22} B);\\
A \text{✡}^{½}_{22} B &\stackrel{\text{def}}{=} (A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow B);\\
A \text{✡}^{0}_{23} B &\stackrel{\text{def}}{=} \neg \text{✟}^{0}_{1}(A \text{✡}^{½}_{23} B);\\
A \text{✡}^{½}_{23} B &\stackrel{\text{def}}{=} (\neg B) \text{✡}^{½}_{12} (\neg A);\\
A \text{✡}^{0}_{31} B &\stackrel{\text{def}}{=} (\neg A) \text{✡}^{0}_{11} B;\\
A \text{✡}^{0}_{32} B &\stackrel{\text{def}}{=} \neg \text{✟}^{0}_{1}(A \text{✡}^{½}_{32} B);\\
A \text{✡}^{½}_{32} B &\stackrel{\text{def}}{=} (\neg A) \text{✡}^{½}_{12} (\neg B);\\
A \text{✡}^{0}_{33} B &\stackrel{\text{def}}{=} (\neg A) \text{✡}^{0}_{11} (\neg B);\\
A \text{☯} B &\stackrel{\text{def}}{=} (A \text{✡}^{0}_{11} B) \vee (A \text{✡}^{½}_{12} B).
\end{aligned}
$$

Corolário. *Em Ł$_3$, J_3 e $\mathcal{W}_3$ estas são as únicas matrizes que podem ser obtidas.*

Basta notar que todas as matrizes de J_3 e de $\mathcal{W}_3$ são hiperclássicas e que a negação e a implicação de Ł$_3$ são definíveis em J_3 e em $\mathcal{W}_3$. (vide **2.3.3**)

J_3 é maximal

Na lógica clássica, dois sentidos de *completude* se confundem. Algumas vezes dizemos que esta lógica (vista como um conjunto de teoremas) é completa (com relação a uma dada semântica) se toda fórmula válida de sua linguagem é demonstrável; outras vezes dizemos que ela é completa pois dada uma fórmula qualquer de sua linguagem, ou ela é um teorema clássico ou sua adição ao sistema clássico resulta numa contradição demonstrável, e, portanto, na trivialização do sistema.

Sabe-se que na hierarquia $Ł_n$, $n > 2$, de lógicas polivalentes de Łukasiewicz esta identificação entre os dois sentidos de completude já não mais acontece, pois cada uma destas lógicas é completa apenas no primeiro sentido acima. Em $Ł_3$, por exemplo, só obtemos uma contradição se acrescentarmos como axioma uma fórmula que não seja um teorema clássico: se a fórmula acrescentada for teorema clássico, mas não de $Ł_3$, então todos os teoremas clássicos, e apenas eles, passam a ser demonstráveis no novo sistema. Se denominamos *extensão* de um cálculo S a um conjunto de sentenças de $L(S)$ que contém todos os teoremas de S e é fechado sob as regras de S e sob substituições, então podemos garantir que a única extensão não-trivial de $Ł_3$ é a lógica clássica. Daí dizermos que $Ł_3$ é *maximal*. Na verdade, vale um resultado mais forte: toda $Ł_m$ tal que $(m-1)$ é um número primo é maximal (cf. Ackermann, 1967, para referências).

Já que J_3 e $Ł_3$ definem as mesmas matrizes é bastante razoável esperar que também J_3 seja maximal. De fato, isto é o que acontece. Parte deste resultado já fora anunciado por Avron (1986) para uma lógica que o autor denominou $\boldsymbol{RM}_3^{\supset}$, extensão do cálculo relevante ***RM*** de Dunn-McCall. Avron justificou sua terminologia, dizendo que "infelizmente eu estava em completa ignorância de J_3 e do trabalho sobre ele realizado na época em que escrevi este artigo, então usei outros nomes"[1].

As matrizes correspondentes a $\boldsymbol{RM}_3^{\supset}$ são:

∧	**1**	**½**	**0**
1	1	½	0
½	½	½	0
0	0	0	0

∨	**1**	**½**	**0**
1	1	1	1
½	1	½	½
0	1	½	0

⊃	**1**	**½**	**0**
1	1	½	0
½	1	½	0
0	1	1	1

	¬
1	0
½	½
0	1

onde {1, ½} são os valores distinguidos.

[1] Avron, comunicação pessoal, out.98.

Ora, estas são exatamente as matrizes, respectivamente, da conjunção, da disjunção, da implicação básica e da negação de J_3. Mas parece faltar algo, pois o operador ∇ de J_3 (vide **2.3.3**) não é sequer definível em $\boldsymbol{RM}_3^{\supset}$ – pois não é possível definir uma função cuja entrada seja apenas ½'s e cuja saída seja diferente de ½; não é possível portanto definir $\rightarrow$, a implicação de $Ł_3$; e como consequência não vale para $\boldsymbol{RM}_3^{\supset}$ o teorema de exprimibilidade recém-demonstrado (**Teorema I**).

Avron *não* afirmou, contudo, que J_3 e $\boldsymbol{RM}_3^{\supset}$ fossem equivalentes, mas que J_3 "pode ser obtido se adicionarmos à linguagem de $\boldsymbol{RM}_3^{\supset}$ uma constante proposicional como $\mathbf{F}$ (ou $\mathbf{T}$)"[2]. O seu propalado resultado de maximalidade foi enunciado assim: $\neg A \supset (A \supset B)$ *não é demonstrável em* $\boldsymbol{RM}_3^{\supset}$, *e* $\boldsymbol{RM}_3^{\supset}$ *é uma lógica maximal com esta propriedade*. Até aqui não há problemas. Mas Avron asseverou ainda que *de fato, o cálculo proposicional clássico é a única extensão de* $\boldsymbol{RM}_3^{\supset}$. Pode ocorrer aqui alguma confusão.

O conjunto de fórmulas da linguagem de $\boldsymbol{RM}_3^{\supset}$, $\mathrm{F{\scriptsize OR}}(\boldsymbol{RM}_3^{\supset})$, é a álgebra das fórmulas geradas por $\{\wedge, \vee, \supset, \neg\}$. Agora, se acrescentarmos aos axiomas de $\boldsymbol{RM}_3^{\supset}$ qualquer teorema clássico escrito nesta linguagem, e que não seja porém um teorema de $\boldsymbol{RM}_3^{\supset}$, o resultado será que *todos* os teoremas clássicos, *e apenas eles*, serão demonstráveis neste novo sistema (cf. Avron, 1986). Mas poderíamos argumentar que uma matriz apenas com 1's, como aquela gerada por $A \rightarrow A$ em J_3, não pode ser gerada em $\boldsymbol{RM}_3^{\supset}$, isto é, temos aqui aparentemente um exemplo de teorema clássico, e de J_3, que não é demonstrável em $\boldsymbol{RM}_3^{\supset}$. Seria este um contra-exemplo à maximalidade de $\boldsymbol{RM}_3^{\supset}$? Não. Se pudéssemos acrescentar a $\boldsymbol{RM}_3^{\supset}$ a matriz gerada em J_3 por $A \rightarrow A$, então o sistema resultante seria simplesmente equivalente a J_3; mas lembremo-nos de que não podemos definir $\rightarrow$ na linguagem de $\boldsymbol{RM}_3^{\supset}$! Num sentido estrito, poderíamos dizer que J_3 *não* é uma extensão (dos teoremas de) de $\boldsymbol{RM}_3^{\supset}$.

Se formos buscar as origens deste aparente paradoxo, notaremos que o

[2] Id., mesma data.

símbolo ∇ de J_3, por exemplo, também não existe na linguagem da lógica clássica, e a rigor deveríamos acrescentá-lo e axiomatizá-lo (para todo teorema clássico A, valeria, por exemplo, $\vdash \nabla A \Rightarrow \vdash A$) se quisermos continuar entendendo J_3 como uma extensão do caso clássico. Em outras palavras, devemos ter em mente que J_3 "estende" não apenas as matrizes do cálculo clássico, mas também sua linguagem.

Lembramos que em J_3 a regra de Modus Ponens vale para $\supset$ mas não para $\rightarrow$. Caracterizaremos a seguir a maximalidade de J_3, na sua linguagem própria:

Teorema II. *Se acrescentarmos a J_3 qualquer não-teorema clássico, trivializamos este sistema.*[3]

Seja $f(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, com $p_1, p_2, \ldots, p_n$ variáveis atômicas, uma fórmula bem-formada do cálculo proposicional clássico (**CP**), que não seja porém um teorema deste cálculo. Esta fórmula também não é, como é claro, um teorema de J_3. Logo, existe uma interpretação v para estas variáveis no conjunto $\{0, 1\}$ tal que $v(f(p_1, p_2, \ldots, p_n)) = 0$.

Agora, para cada p_i tal que $v(p_i) = 1$, substituímos todas as ocorrências de p_i em $f(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ por $p_1 \rightarrow p_1$, e para cada p_i tal que $v(p_i) = 0$, substituímos todas as ocorrências de p_i em $f(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ por $\neg(p_1 \rightarrow p_1)$. Como $p_1 \rightarrow p_1$ sempre assume o valor 1 tanto em **CP** quanto em J_3, e $\neg(p_1 \rightarrow p_1)$ sempre assume o valor 0 tanto em **CP** quanto em J_3, então as substituições que fizemos acima resultam numa fórmula $f'(p_1)$ que sempre assume o valor 0 tanto em **CP** quanto em J_3.

Acrescentamos a fórmula $f(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ ao conjunto de axiomas de J_3. Por substituição, temos que $f'(p_1)$ é demonstrável em $J_3 \cup \{f(p_1, p_2, \ldots, p_n)\}$. A fórmula $f'(p_1) \supset F$, onde F é uma fórmula qualquer de J_3, assume apenas valores distinguidos em J_3, já que $v(f'(p_1))$ é sempre 0, e a completude de J_3 nos garante que $f'(p_1) \supset F$ é portanto um teorema de J_3. Por Modus Ponens provamos F em $J_3 \cup \{f(p_1, p_2, \ldots, p_n)\}$.

[3] Cf., p.ex., Ackermann, 1967.

Teorema III. *Se acrescentarmos a J_3 qualquer teorema clássico não-demonstrável no próprio J_3, o sistema resultante é o cálculo proposicional clássico.*

Seja $g(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, com $p_1, p_2, \ldots, p_n$ variáveis atômicas, um teorema de **CP** que não seja porém teorema de J_3. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $v(g(p_1, p_2, \ldots, p_n)) = 0$ quando $v(p_i) = ½$ para todo p_i, $1 \leq i \leq n$. Claro, pois se uma dada fórmula $h(p_1, p_2, \ldots, p_n, p_{n+1})$ assume o valor 0 quando $v(p_i) = ½$ para todo $1 \leq i \leq n$ e $v(p_{n+1}) \neq ½$, então podemos fixar o valor da variável p_{n+1} substituindo-a por $p_1 \to p_1$ se $v(p_{n+1}) = 1$, ou por $\neg(p_1 \to p_1)$ se $v(p_{n+1}) = 0$ (como fizemos no **Teorema II**), e assim obter uma fórmula da forma $g(p_1, p_2, \ldots, p_n)$.

Consideremos agora outro teorema clássico, $t(q_1, q_2, \ldots, q_m)$, também não-demonstrável em J_3. Esta fórmula dá origem, como é claro, a uma matriz trivalente hiperclássica. Devemos mostrar que esta fórmula é um teorema de $J_3 \cup \{g(p_1, p_2, \ldots, p_n)\}$. Para cada q_j, $1 \leq j \leq m$, formemos a sentença $g(q_j)$, substituindo cada variável em $g(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ por q_j. Consequentemente, para toda valoração w em J_3, $w(g(q_j)) = 0$ sse $w(q_j) = ½$. Além disso, para cada w dada, duas situações podem ocorrer:

- $w(t(q_1, q_2, \ldots, q_m)) \neq 0$;
- $w(t(q_1, q_2, \ldots, q_m)) = 0$. Esta situação deve forçosamente ocorrer, para alguma w, pois $t(q_1, q_2, \ldots, q_m)$ *não é* um teorema de J_3; mas neste caso deve existir um q_j, $1 \leq j \leq m$, tal que $w(q_j) = ½$, pois $t(q_1, q_2, \ldots, q_m)$ *é* um teorema de **CP**. Daí concluímos que a conjunção $g(q_1) \wedge g(q_2) \wedge \ldots \wedge g(q_m)$ deve assumir o valor 0 sob esta valoração.

Em ambos os casos acima, a proposição

$$g(q_1) \wedge g(q_2) \wedge \ldots \wedge g(q_m) \supset t(q_1, q_2, \ldots, q_m)$$

assume um valor distinguido. Pela completude de J_3, esta proposição é demonstrável. Mas em $J_3 \cup \{g(p_1, p_2, \ldots, p_n)\}$ a conjunção no antecedente da fórmula acima é também demonstrável. Logo, por Modus Ponens, demonstramos $t(q_1, q_2, \ldots, q_m)$ em $J_3 \cup \{g(p_1, p_2, \ldots, p_n)\}$.

N.B.: o raciocínio usado nos **Teoremas II** e **III** não se aplica igualmente à demonstração do eventual colapso e da maximalidade de $\boldsymbol{RM}_3^{\supset}$, pois a implicação $\to$ não é definível em $\boldsymbol{RM}_3^{\supset}$.

Graficamente, o procedimento acima consiste no seguinte:

❶	**1**	**½**	**0**
1	1	½	1
½	0	½	1
0	1	1	1

❷	**1**	**½**	**0**
1	1	0	1
½	1	1	0
0	1	½	1

	❸
1	1
½	0
0	1

❹	**1**	**½**	**0**
1	1	0	1
½	0	0	0
0	1	0	1

❶ e ❷ representam, respectivamente, $h(p_1, p_2)$ e $t(p_3, p_4)$, teoremas de **CP** mas não de J_3. Já que $h(½, 1) = 0$, substituímos p_2 por $p_1 \rightarrow p_1$, obtendo assim $g(p_1)$, representado por ❸. Como $t(1, ½) = 0$ e $t(½, 0) = 0$, tomamos como ❹ a conjunção $g(p_3) \wedge g(p_4)$. É fácil ver que ❹ $\rightarrow$ ❷ assume apenas valores distinguidos em J_3, e é portanto demonstrável. Tendo adicionado ❸ ao conjunto de axiomas de J_3, demonstramos ❹ por substituição e adjunção. Por Modus Ponens, concluímos ❷.

Será possível obter resultados de maximalidade para cálculos de uma hierarquia J_n, $n > 2$, de modo semelhante aos já demonstrados para a hierarquia Ł_n, $n > 2$? Bom, primeiro seria necessário definir esta hierarquia… Qual seria, por exemplo, J_4, o próximo cálculo após J_3? Será que suas matrizes coincidiriam com as de Ł_4? Teria ele também dois valores distinguidos, como seu antecessor, ou três? Após esta definição, seria interessante verificar, claro, quais propriedades seriam preservadas entre cada Ł_i e J_i. Problemas desta sorte são aqui deixados em aberto.

Os cálculos $\mathcal{P}^1$ e $\mathcal{P}^2$

Acabamos de demonstrar a maximalidade de J_3, isto é, a propriedade segundo a qual o acréscimo a J_3 de qualquer teorema clássico não-demonstrável no próprio J_3 ocasiona o "colapso" deste cálculo ao cálculo proposicional clássico. Sabemos que há vários anos já fôra introduzido na literatura um outro cálculo trivalente paraconsistente maximal, $\mathcal{P}^1$, construído a partir da intuição de que todos os esquemas clássicos deveriam valer se aplicados a fórmulas não-atômicas – somente com respeito a fórmulas atômicas se permitiria um "mau-comportamento". Em **5.4.2.1** apresentamos a axiomática e as matrizes trivalentes do cálculo $\mathcal{P}^1$, tal como originalmente introduzido por Sette (1973) e mostramos em seguida como fornecer semânticas de sociedade, de traduções possíveis e de mundos possíveis para este cálculo.

Um axioma a menos

Recordemos a axiomatização para $\mathcal{P}^1$ originalmente proposta por Sette:

$\mathcal{P}^1$(1) $A\to(B\to A)$

$\mathcal{P}^1$(2) $(A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))$

$\mathcal{P}^1$(3) $(\neg A\to\neg B)\to((\neg A\to\neg\neg B)\to A)$

$\mathcal{P}^1$(4) $\neg(A\to\neg\neg A)\to A$

$\mathcal{P}^1$(5) $(A\to B)\to\neg\neg(A\to B)$

em conjunto com a regra de Modus Ponens: **(MP)**: $A,\ A\to B\ /\ B$.

Em variadas ocasiões (cf. p.ex. Cândido, 1992) se observou que o axioma **$\mathcal{P}^1$(4)** não é independente dos demais – ao contrário, pode ser deles deduzido. Apenas para fixar tal resultado, apresentamos a seguir uma demonstração deste fato.

Fato I. *Denotemos por* $\vdash_{\mathcal{P}^1}$ *a relação de consequencia sintática em* $\mathcal{P}^1$*. Temos:*

(TD) *Vale o Teorema da Dedução:* $\Gamma, A \vdash_{\mathcal{P}^1} B \iff \Gamma \vdash_{\mathcal{P}^1} A\to B$.

Consequência imediata dos axiomas **$\mathcal{P}^1$(1)**, **$\mathcal{P}^1$(2)** e **(MP)**, por indução sobre o comprimento das deduções em $\mathcal{P}^1$.

(Id) $\vdash_{\mathcal{P}^1} A \to A$

(Trans) $A \to B, B \to C \vdash_{\mathcal{P}^1} A \to C$

(Perm) $A \to (B \to C) \vdash_{\mathcal{P}^1} B \to (A \to C)$

(Simp) $\vdash_{\mathcal{P}^1} ((A \to B) \to C) \to (B \to C)$

(Id), **(Trans)**, **(Perm)** e **(Simp)** podem ser facilmente demonstrados a partir de **(TD)**.

Fato II. *Os esquemas seguintes são demonstráveis em* $\mathcal{P}^1 \setminus \{\mathcal{P}^1\mathbf{(4)}\}$:

(1) $(A\to\neg\neg A)\to(\neg A\to(A\to B))$

(2) $\neg\neg A\to A$

(3) $(\neg\neg A\to\neg\neg B)\to(\neg B\to\neg A)$

(4) $(B\to\neg\neg B)\to((A\to B)\to(\neg B\to\neg A))$

(5) $(B\to\neg\neg B)\to((A\to B)\to((\neg A\to B)\to B))$

(6) $(\neg((A\to A)\to A)\to((A\to A)\to A))\to A$

(7) $((A\to B)\to A)\to A.$

Demonstrações.

(1) $\vdash_{\mathcal{P}^1} (A\to\neg\neg A)\to(\neg A\to(A\to B))$

Graças a **(TD)**, provar este teorema equivale a provar $A\to\neg\neg A,\ \neg A,\ A \vdash_{\mathcal{P}^1} B$. É seguramente mais fácil demonstrar esta nova versão do teorema. Sempre que julgarmos evidente, adiante, o uso de tal artifício, não o mencionaremos.

Daí:

1. $A\to\neg\neg A$	premissa;
2. $\neg A$	premissa;
3. A	premissa;
4. $\neg A\to(\neg B\to\neg A)$	de $\mathcal{P}^1$**(1)**;
5. $\neg B\to\neg A$	de **2.** e **4.**, por **(MP)**;
6. $\neg\neg A$	de **1.** e **3.**, por **(MP)**;
7. $\neg\neg A\to(\neg B\to\neg\neg A)$	de $\mathcal{P}^1$**(1)**;
8. $\neg B\to\neg\neg A$	de **6.** e **7.**, por **(MP)**;
9. $(\neg B\to\neg A)\to((\neg B\to\neg\neg A)\to B)$	de $\mathcal{P}^1$**(3)**;
10. B	de **5.**, **8.**, **9.** e $2\times$**(MP)**.

(2) $\vdash_{\mathcal{P}^1} \neg\neg A \rightarrow A$

1. $(\neg B \rightarrow \neg B) \rightarrow ((\neg B \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow B)$ de $\mathcal{P}^1$**(3)**;

2. $\neg B \rightarrow \neg B$ de **(Id)**;

3. $(\neg B \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow B$ de **1.** e **2.**, por **(MP)**;

4. $\neg\neg B \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg\neg B)$ de $\mathcal{P}^1$**(1)**;

5. $\neg\neg B \rightarrow B$ de **4.** e **3.**, por **(Trans)**.

(3) $\vdash_{\mathcal{P}^1} (\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$

1. $\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B$ premissa;

2. $\neg B$ premissa;

3. $(\neg\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow \neg A)$ de $\mathcal{P}^1$**(3)**;

4. $(\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow ((\neg\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$ de **3.**, por **(Perm)**;

5. $(\neg\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A$ de **1.** e **4.**, por **(MP)**;

6. $\neg B \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow \neg B)$ de $\mathcal{P}^1$**(1)**;

7. $\neg B \rightarrow \neg A$ de **6.** e **5.**, por **(Trans)**.

(4) $\vdash_{\mathcal{P}^1} (B \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A))$

1. $B \rightarrow \neg\neg B$ premissa;

2. $A \rightarrow B$ premissa;

3. $\neg\neg A \rightarrow A$ do **Fato II.(2)**;

4. $\neg\neg A \rightarrow B$ de **3.** e **2.** por **(Trans)**;

5. $\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B$ de **4.** e **1.**, por **(Trans)**;

6. $(\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ do **Fato II.(3)**;

7. $\neg B \rightarrow \neg A$ de **5.** e **6.**, por **(MP)**.

(5) $\vdash_{\mathcal{P}^1} (B \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow B))$

1. $B \rightarrow \neg\neg B$ premissa;

2. $A \rightarrow B$ premissa;

3. $\neg A \rightarrow B$ premissa;

4. $(B \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A))$ do **Fato II.(4)**;

5. $\neg B \rightarrow \neg A$ de **1.**, **2.**, **4.** e $2\times$**(MP)**;

6. $(B\to\neg\neg B)\to((\neg A\to B)\to(\neg B\to\neg\neg A))$ do **Fato II.(4)**;

7. $\neg B\to\neg\neg A$ de **1.**, **3.**, **6.** e 2×**(MP)**;

8. $(\neg B\to\neg A)\to((\neg B\to\neg\neg A)\to B)$ de $\mathcal{P}^1$**(3)**;

9. B de **5.**, **7.**, **8.** e 2×**(MP)**.

(6) $\vdash_{\mathcal{P}^1} (\neg((A\to A)\to A)\to((A\to A)\to A))\to A$

Aqui e logo adiante abreviaremos $(A\to A)\to A$ por α, para facilitar a leitura.

1. $(\alpha\to\neg\neg\alpha)\to((\alpha\to\alpha)\to((\neg\alpha\to\alpha)\to\alpha))$ do **Fato II.(5)**;

2. $\alpha\to\neg\neg\alpha$ de $\mathcal{P}^1$**(5)** e da definição de α;

3. $(\alpha\to\alpha)\to((\neg\alpha\to\alpha)\to\alpha)$ de **2.** e **1.**, por **(MP)**;

4. $\alpha\to\alpha$ de **(Id)**;

5. $((\neg\alpha\to\alpha)\to\alpha)$ de **2.** e **4.**, por **(MP)**;

6. $\neg\alpha\to\alpha \vdash_{\mathcal{P}^1} \alpha$ de **5.**, por **(TD)**;

7. $A\to A$ de **(Id)**;

8. $\neg\alpha\to\alpha \vdash_{\mathcal{P}^1} A$ de **7.**, **6.** e da definição de α, por **(MP)**.

(7) $\vdash_{\mathcal{P}^1} ((A\to B)\to A)\to A.$

1. $(A\to B)\to A$ premissa;

2. $(\alpha\to B)\to(A\to B)$ de **(Simp)** e da definição de α;

3. $(\alpha\to B)\to A$ de **2.** e **1.**, por **(Trans)**;

4. $A\to\alpha$ de $\mathcal{P}^1$**(1)** e da definição de α;

5. $\alpha\to\neg\neg\alpha$ de $\mathcal{P}^1$**(5)** e da definição de α;

6. $(\alpha\to\neg\neg\alpha)\to(\neg\alpha\to(\alpha\to B))$ do **Fato II.(1)**;

7. $\neg\alpha\to(\alpha\to B)$ de **5.** e **6.**, por **(MP)**;

8. $(\alpha\to B)\to\alpha$ de **3.** e **4.**, por **(Trans)**;

9. $\neg\alpha\to\alpha$ de **7.** e **9.**, por **(Trans)**;

10. $(\neg\alpha\to\alpha)\to A$ do **Fato II.(6)**;

11. A de **9.** e **10.**, por **(MP)**.

Agora finalmente podemos "eliminar" o axioma $\mathcal{P}^1$**(4)**:

Fato III. *O esquema* $\mathcal{P}^1$**(4)**: $\neg(A\to\neg\neg A)\to A$ *é demonstrável em* $\mathcal{P}^1\setminus\{\mathcal{P}^1\mathbf{(4)}\}$.

1. $\neg(A\to\neg\neg A)$ premissa;

2. $(A\to\neg\neg A)\to\neg\neg(A\to\neg\neg A)$ de $\mathcal{P}^1$**(5)**;

3. $((A\to\neg\neg A)\to\neg\neg(A\to\neg\neg A))\to(\neg(A\to\neg\neg A)\to((A\to\neg\neg A)\to A))$ do **Fato II.(1)**;

4. $\neg(A\to\neg\neg A)\to((A\to\neg\neg A)\to A)$ de **2.** e **3.**, por **(MP)**;

5. $(A\to\neg\neg A)\to A$ de **1.** e **4.**, por **(MP)**;

6. $((A\to\neg\neg A)\to A)\to A$ do **Fato II.(7)**;

7. A de **5.** e **6.**, por **(MP)**.

A segunda via

O leitor terá observado que, em sua formulação original, $\mathcal{P}^1$ toma como conectivos primitivos apenas a implicação e a negação, e não fica clara de imediato a sua relação com os demais cálculos paraconsistentes abordados neste trabalho. Usando as matrizes de $\mathcal{P}^1$ podemos facilmente verificar que este cálculo estende cada um dos cálculos C_n^{ℓ}, C_n^{d}, C_n^{b}, $C_n^{+\ell}$, C_n^{+d}, C_n^{+b} e C_{min} aqui abordados, mas não os cálculos $C_n^{\neg\neg\ell}$, $C_n^{\neg\neg d}$, $C_n^{\neg\neg b}$, $C_n^{+\neg\neg\ell}$, $C_n^{+\neg\neg d}$, $C_n^{+\neg\neg b}$ ou $C_{min}^{\neg\neg}$ pois a fórmula $A\to\neg\neg A$ não vale em $\mathcal{P}^1$. O teorema a seguir mostra como axiomatizações alternativas para $\mathcal{P}^1$ podem ser obtidas a partir do simples acréscimo de novos axiomas a cada um desses cálculos por ele estendidos.

Teorema IV. *Dados os axiomas de um certo cálculo* C_n^{b} *(ou* C_n^{+b}*), uma axiomatização para* $\mathcal{P}^1$ *é obtida pelo acréscimo das fórmulas* $(\neg B)^{(n)}$ *e* $(A\wedge B)^{(n)}\wedge(A\vee B)^{(n)}\wedge(A\to B)^{(n)}$ *como novos esquemas de axiomas.*

Com efeito, é fácil verificar que não apenas os axiomas de C_n^{b} (ou C_n^{+b}) mas também os esquemas $(\neg A)^{(n)}$ e $(A\wedge B)^{(n)}\wedge(A\vee B)^{(n)}\wedge(A\to B)^{(n)}$ são validados pelas matrizes trivalentes que caracterizam $\mathcal{P}^1$ (vide **5.4.2.1**). Reciprocamente, usando quaisquer das semânticas que apresentamos para C_n^{b} (vide **3.2** e **3.3**) observamos que os axiomas $\mathcal{P}^1$**(1)**, $\mathcal{P}^1$**(2)** e $\mathcal{P}^1$**(4)**, são válidos em cada C_n^{b}. Além disso, em cada C_n^b são válidos ainda os esquemas $(\neg B)^{(n)} \to ((\neg A \to \neg B) \to ((\neg A \to \neg\neg B) \to A))$, e $(A \to B)^{(n)} \to ((A \to B) \to \neg\neg(A \to B))$. Mas $(\neg A \to \neg B) \to ((\neg A \to \neg\neg B) \to A)$ e $(A \to B) \to \neg\neg(A \to B)$ são exatamente os axiomas restantes de $\mathcal{P}^1$, $\mathcal{P}^1$**(3)** e $\mathcal{P}^1$**(5)**. Logo, de C_1**(4)**, C_1**(5)** e **(MP)** concluímos que em cada $C_n^b \cup \{(\neg B)^{(n)}, (A \wedge B)^{(n)} \wedge (A \vee B)^{(n)} \wedge (A \to B)^{(n)}\}$ os axiomas $\mathcal{P}^1$**(3)** e $\mathcal{P}^1$**(5)** são demonstráveis. Note ainda que o mesmo argumento vale para C_n^{+b}, cálculo que estende C_n^b.

Para conhecer a relação entre os cálculos C_n^b e C_n^{+b} e os demais cálculos estendidos por $\mathcal{P}^1$, consulte o apêndice **ω+ω**, **Cálculos**. Como consequência do **Teorema IV**, é teorema de $\mathcal{P}^1$ todo esquema da forma $A^{(n)}$, onde A é uma fórmula não-atômica. Daí afirmarmos que “todos os esquemas clássicos são demonstráveis em $\mathcal{P}^1$ para fórmulas não-atômicas”. Com efeito, basta notar que em $C_n^b \cup \{(\neg B)^{(n)}, (A \wedge B)^{(n)} \wedge (A \vee B)^{(n)} \wedge (A \to B)^{(n)}\}$ a *redução ao absurdo* vale para fórmulas não-atômicas. Observe que a validade de $\mathcal{P}^1$**(4)** em cada C_n^b elimina a necessidade de demonstrá-lo a partir de qualquer das novas axiomatizações para $\mathcal{P}^1$.

Com o fim de simplicidade, fixaremos doravante a axiomatização de $\mathcal{P}^1$ dada por $C_1^b \cup \{(\neg B)^\circ, (A \wedge B)^\circ \wedge (A \vee B)^\circ \wedge (A \to B)^\circ\}$. Destarte serão conectivos primitivos de $\mathcal{P}^1$ não apenas a implicação e a negação, mas também a conjunção e a disjunção. Uma nova demonstração da completude de $\mathcal{P}^1$ com relação a (todas) as matrizes trivalentes apresentadas em **5.4.2.1** é possível. Mas para tanto são desejáveis alguns lemas prévios.

Lema I. *Os esquemas seguintes são demonstráveis (válidos) em* C_1^b:

1. $A^\circ \to (A \to \neg\neg A)$;

2. $A^\circ \to (\neg A \to (A \to B))$;

3. $B^\circ \to (A \to (\neg B \to \neg(A \to B)))$;

4. $A^\circ \to (\neg A \to \neg(A \wedge B))$;

5. $B^\circ \to (\neg B \to \neg(A \wedge B))$;

6. $(A^\circ \wedge B^\circ) \to (\neg A \to (\neg B \to \neg(A \vee B)))$.

Lema II. *Seja G uma fórmula de* $\mathcal{P}^1$ *cujas variáveis atômicas são* $p_1, p_2, \ldots, p_n$. *Dada uma valoração* $v\colon \mathrm{FOR}(\mathcal{P}^1) \to \{\mathrm{V}, \mathrm{V}^*, \mathrm{F}\}$, *definamos para cada* p_i, $1 \leq i \leq n$, *as seguintes fórmulas associadas:*

(i) *se* $v(p_i)=\mathrm{V}$, *então* $p_i^+ = \neg(p_i \wedge \neg p_i)$ *e* $p_i^- = p_i$;

(ii) *se* $v(p_i)=\mathrm{V}^*$, *então* $p_i^+ = p_i$ *e* $p_i^- = p_i \wedge \neg p_i$;

(iii) *se* $v(p_i)=\mathrm{F}$, *então* $p_i^+ = \neg(p_i \wedge \neg p_i)$ *e* $p_i^- = \neg p_i$.

Denotemos por Δ *o conjunto* $\{p_1^+, p_2^+, \ldots, p_n^+, p_1^-, p_2^-, \ldots, p_n^-\}$. *Definamos ainda:*

(iv) *se* $v(G)=\mathrm{V}$, *então* $G' = G$;

(v) *se* $v(G)=\mathrm{V}^*$, *então* $G' = G \wedge \neg G$;

(vi) *se* $v(G)=\mathrm{F}$, *então* $G' = \neg G$.

Afirmamos que vale o seguinte:

$$\Delta \vdash_{\mathcal{P}^1} G'.$$

A demonstração se dará por indução na complexidade de *G*. Como passo base de indução, consideremos o caso em que *G* é atômica, isto é, *G* é p_i, para algum $1 \leq i \leq n$. Logo, $\Delta = \{p_i^+, p_i^-\}$, mas neste caso, para toda *v* dada, temos $p_i^- = G'$. Note que a partir dos axiomas C_1**(1)** e C_1**(2)** já podemos deduzir o esquema $A \to A$, donde $\Delta \vdash_{\mathcal{P}^1} G'$.

Suponhamos agora como hipótese de indução, **(HI)**, que o lema seja válido para qualquer fórmula *F* com um número de conectivos menor ou igual a *n*. Mostraremos que ele vale também para fórmulas com $n+1$ conectivos.

(Caso 1) Suponha que *G* seja $\neg A$.

(Subcaso 1.1) Seja $v(A)=\mathrm{V}$. Como consequência, $v(G)=\mathrm{F}$.

(Subsubcaso 1.1.1) *A* é p_i, uma fórmula atômica.

Neste caso, de **(i)** e **(vi)** temos $p_i^+ = \neg(p_i \wedge \neg p_i)$, $p_i^- = p_i$ e $G' = \neg G = \neg\neg p_i$. Do **Lema I.1** temos $p_i^\circ \to (p_i \to \neg\neg p_i)$, e daí $\Delta \vdash_{\mathcal{P}^1} G'$.

(Subsubcaso 1.1.2) *A* é não-atômica.

Neste caso, de **(vi)** temos $A' = A$ e $G' = \neg G = \neg\neg A$. Como *A* é não-atômica, A° é teorema de $\mathcal{P}^1$. Do **Lema I.1** concluímos que $A \to \neg\neg A$ é teorema de $\mathcal{P}^1$, e como por **(HI)** temos $\Delta \vdash_{\mathcal{P}^1} A'$, então $\Delta \vdash_{\mathcal{P}^1} G'$.

(Subcaso 1.2) Seja $v(A)=\mathrm{V}^*$. Como consequência, $v(G)=\mathrm{V}$.

(Subsubcaso 1.2.1) A é p_i.

De **(ii)** e **(iv)** temos $p_i^-=p_i\wedge\neg p_i$ e $G'=G=\neg p_i$. Mas de C_1**(5)** temos $(p_i\wedge\neg p_i)\to\neg p_i$, donde $\Delta\vdash_{\mathcal{P}^1} G'$.

(Subsubcaso 1.2.2) A é não-atômica.

De **(v)** e **(iv)** temos $A'=A\wedge\neg A$ e $G'=G=\neg A$. Por **(HI)** temos $\Delta\vdash_{\mathcal{P}^1} A'$, daí, tal como no **Subsubcaso 1.2.1**, concluímos $\Delta\vdash_{\mathcal{P}^1} G'$.

(Subcaso 1.3) Seja $v(A)=\mathrm{F}$. Como consequência, $v(G)=\mathrm{V}$.

(Subsubcaso 1.3.1) A é p_i.

De **(iii)** e **(iv)** temos $p_i^-=\neg p_i$ e $G'=G=\neg p_i$. Daí, $\Delta\vdash_{\mathcal{P}^1} G'$.

(Subsubcaso 1.3.2) A é não-atômica.

De **(vi)** e **(iv)** temos $A'=\neg A$ e $G'=G=\neg A$. Por **(HI)** temos $\Delta\vdash_{\mathcal{P}^1} A'$, e daí $\Delta\vdash_{\mathcal{P}^1} G'$.

(Caso 2) Suponha que G seja $A\to B$.

(Subcaso 2.1) Seja $v(A)=\mathrm{F}$. Como consequência, $v(G)=\mathrm{V}$.

(Subsubcaso 2.1.1) A é p_i, uma fórmula atômica.

Neste caso, de **(iii)** e de **(iv)** temos $p_i^+=\neg(p_i\wedge\neg p_i)$, $p_i^-=\neg p_i$ e $G'=G=p_i\to B$. Do **Lema I.2** temos $p_i^\circ\to(\neg p_i\to(p_i\to B))$, e daí $\Delta\vdash_{\mathcal{P}^1} G'$.

(Subsubcaso 2.1.2) A é não-atômica.

De **(vi)** e **(iv)** temos $A'=\neg A$ e $G'=G=A\to B$. Como A é não-atômica, A° é teorema de $\mathcal{P}^1$. Do **Lema I.2** concluímos que $\neg A\to(A\to B)$ é teorema de $\mathcal{P}^1$, e como por **(HI)** temos $\Delta\vdash_{\mathcal{P}^1} A'$, então $\Delta\vdash_{\mathcal{P}^1} G'$.

(Subcaso 2.2) Seja $v(B)=\mathrm{V}$. Como consequência, $v(G)=\mathrm{V}$.

(Subsubcaso 2.2.1) B é p_i.

De **(i)** e de **(iv)** temos $p_i^-=p_i$ e $G'=G=A\to p_i$. Mas de C_1**(1)** temos $p_i\to(A\to p_i)$, donde $\Delta\vdash_{\mathcal{P}^1} G'$.

(Subsubcaso 2.2.2) B é não-atômica.

De **(iv)** temos $B'=B$ e $G'=G=A\to B$. Por **(HI)** temos $\Delta\vdash_{\mathcal{P}^1} B'$, daí, tal como no **Subsubcaso 2.2.1**, concluímos $\Delta\vdash_{\mathcal{P}^1} G'$.

(Subcaso 2.3) Seja $v(A) \neq F$ e $v(B)=F$. Como consequência, $v(G)=F$.

(Subsubcaso 2.3.1) B é p_i.

De **(iii)** e **(vi)** temos $p_i^+ = \neg(p_i \wedge \neg p_i)$, $p_i^- = \neg p_i$ e $G' = \neg G = \neg(A \to p_i)$. Além disso, caso A seja uma fórmula atômica p_j, então se $v(p_j)=V$ temos, de **(i)**, $p_j^- = p_j$, e se $v(p_j)=V^*$ temos, de **(ii)**, $p_j^+ = p_j \wedge \neg p_j$. Em ambos os casos temos $\Delta \vdash_{\mathcal{P}^1} A$. Por outro lado, caso A seja não-atômica, então se $v(A)=V$ temos, de **(iv)**, $A' = A$, e se $v(A)=V^*$ temos, de **(v)**, $A' = A \wedge \neg A$. Em ambos os casos, por **(HI)** temos $\Delta \vdash_{\mathcal{P}^1} A'$, donde mais uma vez inferimos que $\Delta \vdash_{\mathcal{P}^1} A$. Mas do **Lema I.3** sabemos que $p_i^\circ \to (A \to (\neg p_i \to \neg(A \to p_i)))$ é teorema de $\mathcal{P}^1$. Logo, $\Delta \vdash_{\mathcal{P}^1} G'$.

(Subsubcaso 2.3.2) B é não-atômica.

Como no **Subsubcaso 2.3.1**, temos $\Delta \vdash_{\mathcal{P}^1} A$. Além disso, de **(vi)** temos $B' = \neg B$ e $G' = \neg G = \neg(A \to B)$. Por **(HI)**, $\Delta \vdash_{\mathcal{P}^1} B'$, e como B foi suposta não-atômica, B° é teorema de $\mathcal{P}^1$, e concluímos do **Lema I.3** que a fórmula $A \to (\neg B \to \neg(A \to B))$ é teorema de $\mathcal{P}^1$. Daí, $\Delta \vdash_{\mathcal{P}^1} G'$.

(Caso 3) Suponha que G seja $A \wedge B$.

(Subcaso 3.1) Seja $v(A)=F$. Como consequência, $v(G)=F$.

(Subsubcaso 3.1.1) A é p_i, uma fórmula atômica.

Neste caso, de **(iii)** e de **(vi)** temos $p_i^+ = \neg(p_i \wedge \neg p_i)$, $p_i^- = \neg p_i$ e $G' = \neg G = \neg(p_i \wedge B)$. Do **Lema I.4** temos $p_i^\circ \to (\neg p_i \to \neg(p_i \wedge B))$, e daí $\Delta \vdash_{\mathcal{P}^1} G'$.

(Subsubcaso 3.1.2) A é não-atômica.

De **(vi)** temos $A' = \neg A$ e $G' = \neg G = \neg(A \wedge B)$. Como A é não-atômica, A° é teorema de $\mathcal{P}^1$, e concluímos do **Lema I.4** que $\neg A \to \neg(A \wedge B)$ é teorema de $\mathcal{P}^1$, e como por **(HI)** temos $\Delta \vdash_{\mathcal{P}^1} A'$, então $\Delta \vdash_{\mathcal{P}^1} G'$.

(Subcaso 3.2) Seja $v(B)=F$. Como consequência, $v(G)=F$.

Basta repetir o raciocínio usado no **Subcaso 3.1** invocando desta vez o **Lema I.5**.

(Subcaso 3.3) Seja $v(A)\neq$F e $v(B)\neq$F. Como consequência, $v(G)$=V.

De **(vi)** temos G'=G=$A\wedge B$. De **(iv)**, **(v)** e de **(HI)** temos $\Delta\vdash_{\mathcal{P}^1} A$ e $\Delta\vdash_{\mathcal{P}^1} B$. De C_1 **(3)** sabemos que $A\rightarrow(B\rightarrow(A\wedge B))$ é um esquema demonstrável em $\mathcal{P}^1$. Daí concluímos que $\Delta\vdash_{\mathcal{P}^1} G'$.

(Caso 4) Suponha que G seja $A\vee B$.

(Subcaso 4.1) Seja $v(A)\neq$F. Como consequência, $v(G)$=V.

(Subsubcaso 4.1.1) A é p_i, uma fórmula atômica.

Se $v(A)$=V temos, de **(i)**, $p_i^-=p_i$, e se $v(A)$=V* temos, de **(ii)**, $p_i^+=p_i$. Além disso, de **(iv)** temos G'=G=$p_i\vee B$. Mas de C_1 **(6)** sabemos que $p_i\rightarrow(p_i\vee B)$ é um esquema demonstrável em $\mathcal{P}^1$. Concluímos daí que $\Delta\vdash_{\mathcal{P}^1} G'$.

(Subsubcaso 4.1.2) A é não-atômica.

De **(iv)**, **(v)** e de **(HI)** temos $\Delta\vdash_{\mathcal{P}^1} A$, e de **(iv)** temos ainda G'=G=$A\vee B$. Como no **Subsubcaso 4.1.1** concluímos que $\Delta\vdash_{\mathcal{P}^1} G'$.

(Subcaso 4.2) Seja $v(B)\neq$F. Como consequência, $v(G)$=V.

Basta repetir o raciocínio usado no **Subcaso 4.1** invocando desta vez C_1 **(7)**.

(Subcaso 4.3) Seja $v(A)$=F e $v(B)$=F. Como consequência, $v(G)$=F.

(Subsubcaso 4.3.1) A é p_i e B é p_j, fórmulas atômicas.

De **(iii)** temos $p_i^+=\neg(p_i\wedge\neg p_i)$ e $p_i^-=\neg p_i$, $p_j^+=\neg(p_j\wedge\neg p_j)$ e $p_j^-=\neg p_j$. De **(vi)** temos G'=$\neg G=\neg(p_i\vee p_j)$. Do **Lema I.6** temos $(p_i^\circ\wedge p_j^\circ)\rightarrow(\neg p_i\rightarrow(\neg p_j\rightarrow\neg(p_i\vee p_j)))$, e daí $\Delta\vdash_{\mathcal{P}^1} G'$.

(Subsubcaso 4.3.2) A é p_i e B é não-atômica.

De **(iii)** temos $p_i^+=\neg(p_i\wedge\neg p_i)$ e $p_i^-=\neg p_i$, e de **(vi)** temos B'=$\neg B$ e G'=$\neg G=\neg(p_i\vee B)$. Por **(HI)** temos $\Delta\vdash_{\mathcal{P}^1} B'$, e como B foi suposta não-atômica, B° é teorema de $\mathcal{P}^1$. Do **Lema I.6** concluímos que $\Delta\vdash_{\mathcal{P}^1} G'$.

(Subsubcaso 4.3.3) A é não-atômica e B é p_j.

Como no **Subsubcaso 4.3.2**, *mutatis mutandis*.

(Subsubcaso 4.3.4) A e B são ambas não-atômicas.

De **(vi)** temos A'=$\neg A$, B'=$\neg B$ e G'=$\neg G=\neg(A\vee B)$. Por **(HI)** temos $\Delta\vdash_{\mathcal{P}^1} A'$ e $\Delta\vdash_{\mathcal{P}^1} B'$, e como A e B são supostas não-atômicas, A° e B° são teoremas de $\mathcal{P}^1$. Do **Lema I.6** concluímos que $\Delta\vdash_{\mathcal{P}^1} G'$.

Teorema V. ***(Completude)*** *Toda tautologia de $\mathcal{P}^1$ segundo as matrizes trivalentes apresentadas é demonstrável neste cálculo.*

Seja dada uma tautologia G cujas variáveis atômicas são $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Então, pelo **Lema II**, para cada valoração dada temos $\Delta \vdash_{\mathcal{P}^1} G$. Denotemos por Δ_1 o conjunto $\Delta \setminus \{p_1^+, p_1^-\}$, e consideremos três valorações distintas, v_1, v_2 e v_3 tais que difiram exatamente em p_1, isto é:

(a) $v_1(p_1)=\mathrm{V}$, caso em que $p_1^+ = \neg(p_1 \wedge \neg p_1)$ e $p_1^- = p_1$;

(b) $v_2(p_1)=\mathrm{V}^*$, caso em que $p_1^+ = p_1$ e $p_1^- = p_1 \wedge \neg p_1$;

(c) $v_3(p_1)=\mathrm{F}$, caso em que $p_1^+ = \neg(p_1 \wedge \neg p_1)$ e $p_1^- = \neg p_1$.

Do caso **(a)** temos

$$\Delta_1, \neg(p_1 \wedge \neg p_1) \vdash_{\mathcal{P}^1} p_1 \to G, \qquad \textbf{(1)}$$

e do caso **(c)** temos

$$\Delta_1, \neg(p_1 \wedge \neg p_1) \vdash_{\mathcal{P}^1} \neg p_1 \to G. \qquad \textbf{(2)}$$

De **(1)** e **(2)**, por C_1**(8)**, C_1**(11)** e **(MP)** (a *prova por casos*), temos

$$\Delta_1, \neg(p_1 \wedge \neg p_1) \vdash_{\mathcal{P}^1} G. \qquad \textbf{(3)}$$

Mas do caso **(b)** temos

$$\Delta_1, p_1 \wedge \neg p_1 \vdash_{\mathcal{P}^1} p_1 \to G. \qquad \textbf{(4)}$$

Lembrando que, de C_1**(4)**, o esquema $(A \wedge B) \to A$ é demonstrável, então

$$\Delta_1, p_1 \wedge \neg p_1 \vdash_{\mathcal{P}^1} G. \qquad \textbf{(5)}$$

De **(3)** e **(5)**, usando novamente a prova por casos, temos

$$\Delta_1 \vdash_{\mathcal{P}^1} G. \qquad \textbf{(6)}$$

O que logramos assim foi "eliminar" a variável p_1. Recursivamente, podemos definir o conjunto Δ_i como $\Delta_{i-1} \setminus \{p_i^+, p_i^-\}$, $1 < i \leq n$, e repetir o procedimento acima $n-1$ vezes. Desta forma, o conjunto Δ_{n+1} é vazio; ao atingi-lo teremos concluído a presente demonstração.

Concluída enfim a prova direta e construtiva da completude da nova axiomática que propusemos para $\mathcal{P}^1$ com relação às matrizes trivalentes apresentadas em **5.4.2.1**, prosseguimos agora a demonstrar a maximalidade de $\mathcal{P}^1$.

Teorema VI. *$\mathcal{P}^1$ é maximal.*

Seja $g(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, com $p_1, p_2, \ldots, p_n$ variáveis atômicas, um teorema do cálculo proposicional clássico que não seja porém teorema de $\mathcal{P}^1$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $v(g(p_1, p_2, \ldots, p_n)) = \mathrm{F}$ quando $v(p_i) = \mathrm{V}^*$ para todo p_i, $1 \leq i \leq n$. Com efeito, se uma dada fórmula $h(p_1, p_2, \ldots, p_n, p_{n+1})$ assume o valor F quando $v(p_i) = \mathrm{V}^*$ para todo $1 \leq i \leq n$ e $v(p_{n+1}) \neq \mathrm{V}^*$, então podemos fixar o valor da variável p_{n+1} substituindo-a por $p_1 \to p_1$ se $v(p_{n+1}) = \mathrm{V}$, ou por $\neg(p_1 \to p_1)$ se $v(p_{n+1}) = \mathrm{F}$, e assim obter uma fórmula da forma $g(p_1, p_2, \ldots, p_n)$.

Consideremos agora a fórmula D_n definida por

$$D_n \stackrel{\text{def}}{=} \neg(p_1 \wedge \neg p_1) \vee \neg(p_2 \wedge \neg p_2) \vee \ldots \vee \neg(p_n \wedge \neg p_n).$$

Então, para toda valoração w segundo as matrizes de $\mathcal{P}^1$, é fácil ver que $w(D_n) = \mathrm{V}$ se e somente se $w(p_i) \neq \mathrm{V}^*$ para algum p_i, $1 \leq i \leq n$, e $w(D_n) = \mathrm{F}$ em caso contrário. Afirmamos que a proposição $g(p_1, p_2, \ldots, p_n) \to D_n$ é uma tautologia de $\mathcal{P}^1$. De fato, para cada w dada duas situações podem ocorrer:

- $w(D_n) = \mathrm{V}$;
- $w(D_n) = \mathrm{F}$, o que ocorre desde que $w(p_i) = \mathrm{V}^*$ para todo p_i, $1 \leq i \leq n$. Mas neste caso $w(g(p_1, p_2, \ldots, p_n)) = \mathrm{F}$.

Em ambos os casos temos $w(g(p_1, p_2, \ldots, p_n) \to D_n) = \mathrm{V}$. Pela completude de $\mathcal{P}^1$, esta proposição é demonstrável. Concluímos daí que em $\mathcal{P}^1 \cup \{g(p_1, p_2, \ldots, p_n)\}$ o esquema D_n é demonstrável. Em particular, nesta extensão de $\mathcal{P}^1$, fixada uma variável proposicional p_1, podemos demonstrar $\neg(p_1 \wedge \neg p_1) \vee \neg(p_1 \wedge \neg p_1) \vee \ldots \vee \neg(p_1 \wedge \neg p_1)$, donde o próprio esquema $\neg(p_1 \wedge \neg p_1)$ é demonstrável. A partir de C_1**(9)**, por **(MP)**, a redução ao absurdo passa a ser irrestritamente válida, e obtemos assim o cálculo proposicional clássico com força total.

A Terceira Margem

Haverá um cálculo trivalente maximal que, diferentemente de $\mathcal{P}^1$, estenda também os cálculos $C_n^{\neg\neg\ell}$, $C_n^{\neg\neg d}$, $C_n^{\neg\neg b}$, $C_n^{+\neg\neg\ell}$, $C_n^{+\neg\neg d}$, $C_n^{+\neg\neg b}$ e $C_{min}^{\neg\neg}$, isto é, tal que a fórmula **(AN)**: $A \to \neg\neg A$ também nele valha? Sim. As matrizes deste cálculo, o qual batizamos $\mathcal{P}^2$, foram apresentadas em **5.4.2.2** – basta cambiar a negação de $\mathcal{P}^1$.

Mostraremos que uma axiomatização para $\mathcal{P}^2$ pode ser obtida a partir do acréscimo do esquema $(A\wedge B)^{(n)} \wedge (A\vee B)^{(n)} \wedge (A\to B)^{(n)}$ à axiomática de $C_n^{\neg\neg b}$ (ou de $C_n^{+\neg\neg b}$). Assim, o leitor deve notar que por um lado **(AN)** é axioma de $\mathcal{P}^2$ não obstante não seja demonstrável em $\mathcal{P}^1$, e por outro lado $(\neg B)^{(n)}$ é axioma de $\mathcal{P}^1$, conquanto seja indemonstrável em $\mathcal{P}^2$. Denotando por $\neg_1 X$ a fórmula $\neg X$ e por $\neg_{i+1} X$ a fórmula $\neg(\neg_i X)$, podemos dizer que é teorema de $\mathcal{P}^2$ todo esquema da forma $A^{(n)}$, desde que A não seja da forma $\neg_n p$, com p uma proposição atômica.

Com o fim de simplicidade, fixaremos doravante a axiomatização de $\mathcal{P}^2$ dada por $C_1^{\neg\neg b} \cup \{(\neg B)^\circ, (A\wedge B)^\circ \wedge (A\vee B)^\circ \wedge (A\to B)^\circ\}$. Demonstraremos a seguir sua completude.[4]

Lema III. *O* **Lema II** *vale também para* $\mathcal{P}^2$.

Devemos apenas rever os casos em que a mera suposição de que a proposição A é não-atômica nos levou a concluir que A° é teorema: esta inferência pode ser feita em $\mathcal{P}^1$, mas já notamos que ela só vale em $\mathcal{P}^2$ se A não for da forma $\neg_n p$, com p uma proposição atômica. Denotemos por $\vdash_{\mathcal{P}^2}$ a relação de consequência sintática de $\mathcal{P}^2$.

(…)

(Subsubcaso 1.1.2) Suponha que G seja $\neg A$ e $v(A)$=V. Daí, $v(G)$=F. Suponha ainda A não-atômica.

Neste caso, de **(vi)** temos $A' = A$ e $G' = \neg G = \neg\neg A$. De **(AN)** sabemos que $A \to \neg\neg A$, e como por **(HI)** temos $\Delta \vdash_{\mathcal{P}^2} A'$, então $\Delta \vdash_{\mathcal{P}^2} G'$.

---

[4] Em Marcos, 199?a, o cálculo $\mathcal{P}^2$ é introduzido e confrontado com $\mathcal{P}^1$. A apresentação e a discussão dos principais resultados expostos nesta seção e nas duas seções precedentes podem ser encontradas neste artigo.

(Subcaso 1.2) Suponha que G seja $\neg A$ e $v(A)$=V*. Daí, $v(G)$=V* (note a diferença do caso de $\mathcal{P}^1$).

(Subsubcaso 1.2.1) A é p_i, uma fórmula atômica.

De **(ii)** e **(v)** temos $p_i^- = p_i \wedge \neg p_i$ e $G' = G \wedge \neg G = \neg p_i \wedge \neg\neg p_i$. De **(AN)** temos que $p_i \rightarrow \neg\neg p_i$, e em conjunto com C_1**(3)**, C_1**(4)** e C_1**(5)** concluímos $\Delta \vdash_{\mathcal{P}^2} G'$.

(Subsubcaso 1.2.2) A é não-atômica.

De **(v)** temos $A' = A \wedge \neg A$ e $G' = G \wedge \neg G = \neg A \wedge \neg\neg A$. Mas por **(HI)** temos $\Delta \vdash_{\mathcal{P}^2} A'$. Daí, tal como no **Subsubcaso 1.2.1**, inferimos $\Delta \vdash_{\mathcal{P}^2} G'$.

(…)

(Subsubcaso 2.1.2) Suponha que G seja $A \rightarrow B$ e $v(A)$=F. Daí, $v(G)$=V. Suponha ainda A não-atômica.

De **(vi)** e **(iv)** temos $A' = \neg A$ e $G' = G = A \rightarrow B$. Se A não é da forma $\neg_n p_i$, o raciocínio do **Lema II** permanece inalterado. Consideremos portanto o caso em que A é desta forma – e A', como consequência, é $\neg_{n+1} p_i$.

Como $v(A)$=F, podemos concluir que $v(p_i) \neq$V*. Se n é da forma $2m$, então $v(p_i)$=F, e daí temos, de **(iii)**, $p_i^+ = \neg(p_i \wedge \neg p_i)$ e $p_i^- = \neg p_i$. Lembramos que $F^\circ \rightarrow (\neg_n F)^\circ$ é um esquema demonstrável mesmo em C_n^b (como uma generalização do ex. **b** em **2.2.2.1** e ex. **b** em **2.3.3.6**), e daí temos $p_i^\circ \rightarrow A^\circ$. Além disso, após m aplicações de **(AN)** obtemos $\neg p_i \rightarrow A'$. Daí concluímos que $\Delta \vdash_{\mathcal{P}^2} A^\circ$ e $\Delta \vdash_{\mathcal{P}^2} \neg A$. Do **Lema I.2** concluímos que $\Delta \vdash_{\mathcal{P}^2} G'$.

Por outro lado, se n é da forma $2m-1$, então $v(p_i)$=V, e daí temos, de **(i)**, $p_i^+ = \neg(p_i \wedge \neg p_i)$ e $p_i^- = p_i$. Novamente temos $p_i^\circ \rightarrow A^\circ$, e após m aplicações de **(AN)** obtemos $p_i \rightarrow A'$. Daí, $\Delta \vdash_{\mathcal{P}^2} A^\circ$ e $\Delta \vdash_{\mathcal{P}^2} \neg A$, e mais uma vez do **Lema I.2** concluímos que $\Delta \vdash_{\mathcal{P}^2} G'$.

(…)

(Subsubcaso 2.3.2) Suponha que G seja $A \rightarrow B$, $v(A) \neq$F e $v(B)$=F. Daí, $v(G)$=F. Suponha ainda B não-atômica.

De **(i)** e **(ii)** – caso A seja atômica – e de **(iv)**, **(v)** e **(HI)** – em caso contrário – concluímos que $\Delta \vdash_{\mathcal{P}^2} A$. De **(vi)** temos $G' = \neg G = \neg(A \rightarrow B)$. Se B não é da forma $\neg_n p_i$, o raciocínio do **Lema II** permanece inalterado. Consideremos portanto o caso em que B é desta forma – e B', como consequência, é $\neg_{n+1} p_i$.

Por um raciocínio similar ao usado no **Subsubcaso 2.1.2**, mas desta vez fazendo uso do **Lema I.3** mostramos que $\Delta \vdash_{\mathcal{P}^2} G'$.

(…)

Os demais subsubcasos a reavaliar, quais sejam, **3.1.2**, **3.2.2**, **4.3.2**, **4.3.3** e **4.3.4** são igualmente similares ao **Subsubcaso 2.1.2**, só que fazendo uso, respectivamente, do **Lema I.4**, **I.5** e, nos últimos três casos, **I.6**.

Teorema VII. ***(Completude)*** *Toda tautologia de $\mathcal{P}^2$ segundo as matrizes trivalentes apresentadas é demonstrável neste cálculo.*

A demonstração deste resultado metateórico acerca de $\mathcal{P}^2$ segue aquela da completude de $\mathcal{P}^1$, **Teorema V**, usando novamente a prova por casos, mas desta feita fazendo uso do **Lema III**, recém-demonstrado.

Teorema VIII. *$\mathcal{P}^2$ é maximal.*

Basta fazer uso do mesmo raciocínio usado no **Teorema VI** sobre a maximalidade de $\mathcal{P}^1$, notando que segundo as matrizes de $\mathcal{P}^2$ ainda vale, para toda valoração w, $w(D_n) = \mathrm{V}$ se e somente se $w(p_i) \neq \mathrm{V}^*$ para algum p_i, $1 \leq i \leq n$, e $w(D_n) = \mathrm{F}$ em caso contrário. Além disso, é claro que a adição do esquema $\neg(p_1 \wedge \neg p_1)$ ao cálculo $\mathcal{P}^2$, definido como $C_1^{\neg\neg b} \cup \{(\neg B)^\circ, (A \wedge B)^\circ \wedge (A \vee B)^\circ \wedge (A \rightarrow B)^\circ\}$ causa igualmente a sua transformação no cálculo proposicional clássico.

O fato de que disponhamos de três cálculos paraconsistentes maximais, e ainda por cima todos trivalentes, não deve causar espécie ao leitor, não mais do que a observação de que ramos que se separam a partir de uma mesma árvore possuem extremidades distintas. Agora, é evidente que nenhum destes cálculos pode ser uma extensão do outro, já que eles são todos maximais (para conhecer as diferenças entre eles, cf. o apêndice ω, **Outros esquemas**).

$\omega \times \omega$
Anotações Paraconsistentes

A seguir apresentamos diversos resultados de independência, bem como alguns teoremas relativos aos cálculos paraconsistentes apresentados neste trabalho. Os resultados novos são aqui assinalados por ★; os resultados que, além de novos, vêm corrigir os apresentados em Alves, 1976, ou Alves & Queiroz, 1991, são assinalados por ✪. Também alguns resultados já conhecidos são aqui apresentados, boa parte deles de forma diferente – estes não serão postos em destaque.

Da independência dos axiomas de C_n

Para cada axioma de C_n, exibimos aqui matrizes "esdrúxulas" nas quais todos os demais axiomas, mas não este, assumem valores distinguidos. (É claro que a matriz da implicação deve ser cuidadosamente escolhida em cada caso a fim de garantir que a regra de Modus Ponens seja "boa", isto é, preserve validade.) Se somos capazes de demonstrar assim, com um certo conjunto de matrizes de uma lógica *n*-valente, a independência de um certo axioma frente aos demais, ainda pode ser que possamos fazê-lo com uma lógica *m*-valente, $m < n$. Daí, para alguns axiomas, apresentarmos mais de uma solução ao problema de sua independência: primeiro buscamos um *menor número total* de matrizes para o conjunto dos axiomas, em seguida buscamos matrizes *menores* para axiomas específicos.

$C_n(1)$

Para verificar que o axioma $C_n(1)$: $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ é independente dos demais, façamos uso das seguintes matrizes:

∧	♈	♉	♊	♋
♈	♈	♈	♈	♋
♉	♈	♈	♈	♋
♊	♈	♈	♈	♋
♋	♋	♋	♋	♋

∨	♈	♉	♊	♋
♈	♈	♈	♈	♈
♉	♈	♈	♈	♈
♊	♈	♈	♈	♈
♋	♈	♈	♈	♋

→	♈	♉	♊	♋
♈	♈	♈	♊	♋
♉	♈	♈	♋	♋
♊	♈	♈	♈	♋
♋	♈	♈	♈	♈

	¬
♈	♋
♉	♊
♊	♉
♋	♈

onde { ♈, ♉, ♊ } são os valores distinguidos. Agora basta tomar os valores ♊ em A e ♉ em B.

C_n(2)

Para a independência do axioma $\boldsymbol{C_n}$**(2)**: $\boldsymbol{(A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))}$, tomemos as matrizes

∧	♈	♉	♊
♈	♈	♊	♊
♉	♊	♊	♊
♊	♊	♊	♊

∨	♈	♉	♊
♈	♈	♈	♈
♉	♈	♊	♊
♊	♈	♊	♊

→	♈	♉	♊
♈	♈	♊	♊
♉	♈	♊	♈
♊	♈	♈	♈

	¬
♈	♊
♉	♈
♊	♈

onde ♈ é o único valor distinguido. Basta tomar o valor ♉ em A e em C, e ♈ ou ♊ em B.

C_n(3), C_n(4) e C_n(5)

✪ A independência de $\boldsymbol{C_n}$**(3)**: $\boldsymbol{A \to (B \to (A \wedge B))}$, pode ser verificada mediante as matrizes

∧	♈	♉	♊
♈	♉	♊	♊
♉	♊	♊	♊
♊	♊	♊	♊

∨	♈	♉	♊
♈	♈	♈	♈
♉	♈	♉	♉
♊	♈	♉	♊

→	♈	♉	♊
♈	♈	♉	♊
♉	♈	♈	♈
♊	♈	♈	♈

	¬
♈	♊
♉	♈
♊	♈

onde ♈ é o único valor distinguido. Basta tomar o valor ♈ em A e em B.

✪ Para a independência de $\boldsymbol{C_n}$**(4)**: $\boldsymbol{(A \wedge B) \to A}$, podemos usar as mesmas matrizes acima, trocando apenas a conjunção por

∧	♈	♉	♊
♈	♈	♉	♊
♉	♈	♉	♊
♊	♊	♊	♊

e tomando os valores ♉ em A e ♈ em B.

✪ Já para a independência de C_n**(5)**: $(A \wedge B) \to B$, podemos mais uma vez usar as mesmas matrizes acima, trocando agora a conjunção por

∧	♈	♉	♊
♈	♈	♈	♊
♉	♉	♉	♊
♊	♊	♊	♊

e tomando os valores ♈ em *A* e ♉ em *B*.

✪ Alternativamente, podemos mostrar a independência de C_n**(3)** usando as matrizes da disjunção, da implicação e da negação clássicas, e trocando apenas a matriz da conjunção pela matriz à direita. ♈ é o valor distinguido. Tomamos este valor em *A* e em *B*.

∧	♈	♉
♈	♉	♉
♉	♉	♉

✪ Podemos fazer essencialmente o mesmo para mostrar a independência de C_n**(4)**. Neste caso a matriz da conjunção é esta à esquerda. ♈ é o valor distinguido. Tomamos os valores ♉ em *A* e ♈ em *B*.

∧	♈	♉
♈	♈	♉
♉	♈	♉

C_n(6), C_n(7) e C_n(8)

✪ As matrizes abaixo nos mostram a independência de C_n**(8)**: $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$.

∧	♈	♉	♊	♋
♈	♈	♈	♋	♋
♉	♈	♈	♋	♋
♊	♋	♋	♋	♋
♋	♋	♋	♋	♋

∨	♈	♉	♊	♋
♈	♈	♈	♈	♈
♉	♈	♈	♈	♈
♊	♈	♈	♈	♋
♋	♈	♈	♋	♋

→	♈	♉	♊	♋
♈	♈	♈	♋	♋
♉	♈	♈	♋	♋
♊	♈	♈	♈	♈
♋	♈	♈	♈	♈

	¬
♈	♋
♉	♉
♊	♈
♋	♈

onde { ♈, ♉ } são os valores distinguidos. Basta tomar os valores ♊ em *A* e em *B*, e ♊ ou ♋ em *C*.

✪ Para a independência de C_n**(6)**: $A \to (A \vee B)$, tomamos a conjunção, a implicação e a negação acima, e trocamos a disjunção pela matriz abaixo à esquerda.

✪ Para C_n**(7)**: $B \to (A \vee B)$, fazemos essencialmente o mesmo, trocando a disjunção acima pela matriz abaixo à direita.

∨	♈	♉	♊	♋
♈	♈	♈	♈	♈
♉	♈	♈	♈	♋
♊	♈	♈	♋	♋
♋	♈	♈	♋	♋

∨	♈	♉	♊	♋
♈	♈	♈	♈	♈
♉	♈	♈	♈	♈
♊	♈	♈	♋	♋
♋	♈	♋	♋	♋

Em ambos os casos, basta tomar os valores ♉ em *A* e ♋ em *B*.

✪ Alternativamente, com matrizes trivalentes, podemos mostrar a independência de C_n**(7)** e C_n**(8)**. Para o caso de C_n**(7)**, as seguintes matrizes se prestam:

∧	♈	♉	♊
♈	♈	♉	♊
♉	♉	♉	♊
♊	♊	♊	♊

∨	♈	♉	♊
♈	♈	♈	♈
♉	♈	♉	♉
♊	♈	♊	♊

→	♈	♉	♊
♈	♈	♉	♊
♉	♈	♈	♊
♊	♈	♈	♈

	¬
♈	♊
♉	♊
♊	♈

onde {♈, ♉} são os valores distinguidos. Basta tomar os valores ♊ em *A* e ♉ em *B*.

✪ No caso de C_n**(8)**, podemos usar as matrizes a seguir:

∧	♈	♉	♊
♈	♈	♉	♊
♉	♉	♉	♊
♊	♊	♊	♊

∨	♈	♉	♊
♈	♈	♈	♈
♉	♈	♈	♉
♊	♈	♉	♊

→	♈	♉	♊
♈	♈	♉	♊
♉	♈	♈	♈
♊	♈	♈	♈

	¬
♈	♊
♉	♈
♊	♈

onde ♈ é o único valor distinguido. Basta tomar os valores ♉ em *A* e em *B*, e o valor ♉ ou ♊ em *C*.

C_n(9)

Para verificar a independência do axioma C_n**(9)**: $B^{(n)} \to ((A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A))$, podemos usar as matrizes a seguir:

∧	♈	♉	♊
♈	♈	♉	♊
♉	♉	♉	♊
♊	♊	♊	♊

∨	♈	♉	♊
♈	♈	♈	♈
♉	♈	♉	♉
♊	♈	♉	♊

→	♈	♉	♊
♈	♈	♉	♊
♉	♈	♈	♊
♊	♈	♈	♈

	¬
♈	♊
♉	♉
♊	♈

onde {♈, ♉} são os valores distinguidos. Basta tomar o valor ♈ em *A* e o valor ♉ em *B*.

C_n(10)

A independência do axioma $\boldsymbol{C_n}$ **(10)**: $\boldsymbol{(A^{(n)} \wedge B^{(n)}) \to ((A \wedge B)^{(n)} \wedge (A \vee B)^{(n)} \wedge (A \to B)^{(n)})}$, pode ser demonstrada com o uso das seguintes matrizes:

∧	♈	♉	♊
♈	♉	♈	♊
♉	♈	♈	♊
♊	♊	♊	♊

∨	♈	♉	♊
♈	♉	♈	♈
♉	♈	♈	♈
♊	♈	♈	♊

→	♈	♉	♊
♈	♉	♈	♊
♉	♈	♈	♊
♊	♈	♈	♈

	¬
♈	♊
♉	♉
♊	♈

onde {♈, ♉} são os valores distinguidos. Basta tomar o valor ♈ em *A* e em *B*.

C_n(11) e C_n(12)

	¬
♈	♉
♉	♉

Usando as matrizes binárias do cálculo proposicional clássico e a negação à direita, e considerando ♈ o valor distinguido, temos imediatamente assegurada a independência do axioma $\boldsymbol{C_n}$ **(11)**: $\boldsymbol{A \vee \neg A}$.

	¬
♈	♈
♉	♈

Usando a negação à esquerda, asseguramos a independência do axioma $\boldsymbol{C_n}$ **(12)**: $\boldsymbol{\neg\neg A \to A}$.

Em ambos os casos acima, basta tomar o valor ♉ em *A*.

EM TEMPO: Deve-se observar que todos os resultados de independência problemáticos encontrados em Alves, 1976, isto é, de $\boldsymbol{C_n}$ **(3)** a $\boldsymbol{C_n}$ **(8)**, foram creditados a Arruda. As tabelas apresentadas para estes axiomas não funcionam, pois: no caso de $\boldsymbol{C_n}$ **(3)**, apenas este axioma deveria tomar valores não-distinguidos, mas, ao invés, isto acontece com $\boldsymbol{C_n}$ **(4)**, $\boldsymbol{C_n}$ **(7)**, $\boldsymbol{C_n}$ **(10)**, $\boldsymbol{C_n}$ **(11)**; no caso de $\boldsymbol{C_n}$ **(4)**, falham $\boldsymbol{C_n}$ **(5)**, $\boldsymbol{C_n}$ **(7)**, $\boldsymbol{C_n}$ **(9)**, $\boldsymbol{C_n}$ **(10)**, $\boldsymbol{C_n}$ **(11)**; no caso de $\boldsymbol{C_n}$ **(5)**, falham $\boldsymbol{C_n}$ **(3)**, $\boldsymbol{C_n}$ **(7)**, $\boldsymbol{C_n}$ **(9)**, $\boldsymbol{C_n}$ **(11)**; no caso de $\boldsymbol{C_n}$ **(6)**, falha $\boldsymbol{C_n}$ **(6)** mas também $\boldsymbol{C_n}$ **(9)** e $\boldsymbol{C_n}$ **(11)**; no caso de $\boldsymbol{C_n}$ **(7)**, falha $\boldsymbol{C_n}$ **(7)** mas também $\boldsymbol{C_n}$ **(9)** e $\boldsymbol{C_n}$ **(11)**; por fim, no caso de $\boldsymbol{C_n}$ **(8)**, falha $\boldsymbol{C_n}$ **(8)** mas também $\boldsymbol{C_n}$ **(9)**.

Da independência dos axiomas de $C_n^{\neg\neg}$

Acrescentando a cada C_n o axioma **(AN)**: $\boldsymbol{A \to \neg\neg A}$ construímos o cálculo $C_n^{\neg\neg}$ (vide **5.2**), e neste novo cálculo toda a questão acerca da independência dos axiomas tem lugar mais uma vez.

Em primeiro lugar, para cada axioma de C_n devemos agora encontrar matrizes que o falsifiquem ao mesmo tempo em que atribuem a todos os outros axiomas, inclusive o novo, **(AN)**, valores distinguidos. Já pensamos nisso ao escolher as matrizes que mostram a independência de cada axioma de C_n frente aos demais, e o fizemos de tal modo que **(AN)** também sempre recebesse um valor distinguido.

★ Graças a este cuidado especial, todas as matrizes acima exibidas funcionam, com apenas uma exceção: aquelas que mostram a independência de $\boldsymbol{C_n}$ **(11)**: $A \vee \neg A$. Mas neste caso sugerimos substituí-las pelas seguintes matrizes:

$\wedge$	♈	♉	♊	♋
♈	♈	♈	♋	♋
♉	♈	♈	♋	♋
♊	♋	♋	♋	♋
♋	♋	♋	♋	♋

$\vee$	♈	♉	♊	♋
♈	♈	♈	♈	♈
♉	♈	♈	♈	♈
♊	♈	♈	♋	♋
♋	♈	♈	♋	♋

$\to$	♈	♉	♊	♋
♈	♈	♈	♋	♋
♉	♈	♈	♋	♋
♊	♈	♈	♈	♈
♋	♈	♈	♈	♈

	$\neg$
♈	♊
♉	♉
♊	♈
♋	♋

onde { ♈, ♉ } são os valores distinguidos. Basta tomar o valor ♊ em A, e temos demostrada a independência de $\boldsymbol{C_n^{\neg\neg}}$**(12)** dos demais axiomas de $C_n^{\neg\neg}$.

O passo que falta é demonstrar a independência do próprio axioma **(AN)**. Para tanto sugerimos as matrizes a seguir:

$\wedge$	♈	♉	♊
♈	♈	♈	♊
♉	♈	♈	♊
♊	♊	♊	♊

$\vee$	♈	♉	♊
♈	♈	♈	♈
♉	♈	♈	♈
♊	♈	♈	♊

$\rightarrow$	♈	♉	♊
♈	♈	♈	♊
♉	♈	♈	♊
♊	♈	♈	♈

	$\neg$
♈	♊
♉	♈
♊	♈

onde {♈, ♉} são os valores distinguidos. Basta tomar o valor ♉ em *A*.

A um passo da lógica clássica

★ Será que este acréscimo de **(AN)** a C_1, por exemplo, não nos remete à lógica clássica? Não. O princípio da não-contradição, na forma $\neg(A \wedge \neg A)$ continua indemonstrável em cada $C_n^{\neg\neg}$. Para verificar isto, basta usar as mesmas matrizes acima, trocando apenas a negação por esta à direita.

	$\neg$
♈	♊
♉	♉
♊	♈

Tomamos o valor ♉ em *A*.

Da substituição de axiomas

Um dado cálculo pode ser axiomatizado de diversas formas equivalentes. Não raro, ao com ele trabalharmos, descobrimos algumas destas formas, descobrimos que a substituição de um dado axioma por um outro, na presença dos demais, produz o mesmo resultado, isto é, resulta no mesmo conjunto de teoremas demonstráveis.

De fato, desde o princípio deste trabalho já vimos fazendo uso de uma axiomatização para C_1 cuja apresentação (vide **2.1**, **Figura 1**) difere em alguns pontos da original (cf. da Costa, 1963). A axiomatização original contava com um axioma a mais, $A^\circ \rightarrow (\neg A)^\circ$, que já se mostrou ser derivável a partir dos demais, e trazia dividido em três o axioma de propagação de bom-comportamento, C_1**(10)**, que apresentamos aqui. Como é fácil verificar, esta nova apresentação equivale à original. Analisaremos a seguir alguns outros *Teoremas de Substituição de Axiomas*.

$(C_n \backslash \{\neg\neg A \to A\}) \cup \{B^{(n)} \to (B \to (\neg B \to A))\} \nVdash \neg\neg A \to A$

Em Alves & Queiroz, 1991, trabalho no qual baseamos a **Figura 1**, encontramos algumas propostas para uma possível substituição de axiomas de C_1. Uma delas (id., p.73 e 75), e que é na realidade aquela que os autores representam em seu diagrama, seria a de substituir o axioma da redução das negações, C_1**(12)**: $\neg\neg A \to A$, pelo *esquema de trivialização* (**ET**[1]): $B^\circ \to (B \to (\neg B \to A))$. Logo, a proposta é:

Substituição I. Em C_1 podemos substituir C_1**(12)** por (**ET**[1]).

Não é tarefa difícil verificar que em C_1 podemos deduzir (**ET**[1]). Tomemos como hipóteses B°, B, $\neg B$. De C_1**(9)** temos $B^\circ \to ((\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to \neg\neg A))$, donde, a partir da primeira hipótese, B°, e **(MP)** temos $((\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to \neg\neg A))$. De C_1**(1)** e C_1**(2)** temos, usando as duas outras hipóteses e **(MP)**, $\neg\neg A$, e de C_1**(12)** e **(MP)** temos, finalmente, A.

★ Devemos notar que o esquema C_1**(12)** tem um papel decisivo na dedução acima. De fato, não é possível derivar (**ET**[1]) de $C_1 \backslash \{C_1\textbf{(12)}\}$ (isto é, de C_1**(1)** - C_1**(11)** e **(MP)**). Para ver isto basta usar as mesmas matrizes recém-exibidas que mostram a independência de C_1**(12)**, tomando o valor ♉ em *A* e o valor ♈ em *B*. Temos, portanto:

Teorema I. (**ET**[1]) *não é dedutível de* $C_1 \backslash \{C_1\textbf{(12)}\}$.

✪ Mas será possível demonstrar a recíproca, isto é, que de $(C_1 \backslash \{C_1\textbf{(12)}\}) \cup \{(\textbf{ET}^1)\}$ podemos inferir C_1**(12)**? Já veremos que não. Consideremos as matrizes seguintes:

∧	♈	♉	♊
♈	♈	♈	♊
♉	♈	♈	♊
♊	♊	♊	♊

∨	♈	♉	♊
♈	♈	♈	♈
♉	♈	♈	♈
♊	♈	♈	♊

→	♈	♉	♊
♈	♈	♈	♊
♉	♈	♈	♊
♊	♈	♈	♈

	¬
♈	♊
♉	♈
♊	♉

onde {♈, ♉} são os valores distinguidos. Tomando o valor ♊ em *A* verificamos que C_1**(12)** é independente de $(C_1 \backslash \{C_1\textbf{(12)}\}) \cup \{(\textbf{ET}^1)\}$. Daí:

Teorema II. C_1**(12)** *não é dedutível de* $(C_1\backslash\{C_1\textbf{(12)}\})\cup\{(\mathrm{ET}^1)\}$.

O **Teorema II** nos mostra que a **SUBSTITUIÇÃO I** é, por conseguinte, simplesmente **falsa**.

★ Os **Teoremas I** e **II** podem ser facilmente generalizados. Tomando (ET^{1*}) como $B^{(n)}\to(B\to(\neg B\to A))$, podemos igualmente usar as mesmas matrizes que mostram a independência de C_n**(12)**, tomando o valor ♉ em A e o valor ♈ em B para verificar que (ET^{1*}) não é derivável de $C_n\backslash\{C_n\textbf{(12)}\}$, e em seguida usar as mesmas matrizes acima para verificar que $(C_n\backslash\{C_n\textbf{(12)}\})\cup\{(\mathrm{ET}^{1*})\}\nvdash C_n$**(12)**.

$(C_1\backslash\{\neg\neg A\to A\})\cup\{A^\circ\to(\neg A)^\circ\}\nvdash\neg\neg A\to A$

É curioso observar que um engano muito semelhante à **Substituição I** já pode ser encontrado em Alves, 1976 (p.28), que afirma:

SUBSTITUIÇÃO II. (Arruda) *em* C_n, $1\leq n<\omega$, *podemos substituir o postulado* C_n**(12)**: $\neg\neg A\to A$ *por* $A^{(n)}\to(\neg A)^{(n)}$.

✪ Ora, para verificar que a dedução de C_n**(12)** a partir de $(C_n\backslash\{C_n\textbf{(12)}\})\cup\{A^{(n)}\to(\neg A)^{(n)}\}$ é impossível basta notar que nas matrizes que mostram a independência do axioma C_n**(12)** frente aos demais axiomas de C_n, também o esquema $A^{(n)}\to(\neg A)^{(n)}$ assume apenas o valor distinguido ♈. A **SUBSTITUIÇÃO II** também é, portanto, falsa.

O erro na demonstração ocorre exatamente no ponto em que se faz uso do fato de que "a negação forte, ~, tem todas as propriedades da negação clássica". Ora, a falha da **SUBSTITUIÇÃO I** nos mostra que isto só é verdade na presença de C_n**(12)**, a redução das negações. Vimos por exemplo que o esquema de trivialização, (ET^{1*}), o qual se invoca na prova da **SUBSTITUIÇÃO II**, não era demonstrável em $(C_n\backslash\{C_n\textbf{(12)}\})$.

Enfraquecendo um teorema correto

É realmente muito estranho que se tenha sequer cogitado a **SUBSTITUIÇÃO I**, já que também em Alves, 1976 (p.27) se afirma a

SUBSTITUIÇÃO III: *em* C_n, $1 \leq n < \omega$, *podemos substituir o postulado* $\boldsymbol{C_n}$**(9)**: $B^{(n)} \to ((A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A))$ *por* (ET^2): $(B^{(n)} \wedge B \wedge \neg B) \to A$.

Ora, para mostrar que

Teorema III. (ET^{1*}) *e* (ET^2) *são intersubstituíveis,*

não são necessários mais do que os cinco primeiros axiomas do Cálculo Positivo Intuicionista. Com que então C_1**(9)** poderia ser substituído por (ET^2), como afirma a **SUBSTITUIÇÃO III**, e simultaneamente, como afirma a **SUBSTITUIÇÃO I**, C_1**(12)** poderia ser substituído por (ET^1), uma vez que C_1**(9)** e C_1**(12)** são axiomas independentes! A **SUBSTITUIÇÃO I** e a **SUBSTITUIÇÃO III** são claramente incompatíveis…

★ Mas se a **SUBSTITUIÇÃO I** era indemonstrável, tal já não acontece com a **SUBSTITUIÇÃO III**. Gostaríamos contudo de propor um refinamento de seu enunciado. Notemos em primeiro lugar que também na **SUBSTITUIÇÃO III** o axioma de redução das negações, $\boldsymbol{C_n}$**(12)**, é imprescindível, pelo menos na demonstração de (ET^2) a partir da axiomática completa de C_n. Com efeito, isto é atestado se usarmos mais uma vez as matrizes que mostram a independência de $\boldsymbol{C_n}$**(12)**, e tomarmos o valor ♈ em *A* e o valor ♉ em *B*. Concluímos que $(C_n \setminus \{\boldsymbol{C_n}\mathbf{(12)}\}) \nvdash (\mathrm{ET}^2)$.

★ Se retirarmos de C_n ambos os axiomas $\boldsymbol{C_n}$**(9)** e $\boldsymbol{C_n}$**(12)**, o que poderíamos afirmar? Denominemos por $\boldsymbol{C_n}$**(9*)** a sentença $\boldsymbol{B^{(n)} \to ((\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to A))}$, e denominemos por ($\mathrm{ET}^3$) a sentença $(B^{(n)} \wedge B \wedge \neg B) \to \neg A$. Então podemos demonstrar a

SUBSTITUIÇÃO IV. *Ao cálculo* $C_n \setminus \{\boldsymbol{C_n}\mathbf{(9)}, \boldsymbol{C_n}\mathbf{(12)}\}$, $1 \leq n < \omega$

(α) *tem o mesmo efeito acrescentar como axioma* $\boldsymbol{C_n}$**(9)** *ou* (ET^3)*;*

(β) *tem o mesmo efeito acrescentar como axioma* $\boldsymbol{C_n}$**(9*)** *ou* (ET^2).

(Quando afirmamos que "tem o mesmo efeito", queremos dizer, claro, que os mesmos teoremas são demonstráveis a partir de ambos os acréscimos, isto é, ambos estendem de igual maneira o cálculo original.)

Este resultado faz-se interessante se recordamos, por exemplo, que (ET^3) é um teorema do Cálculo Minimal de Johánsson (vide **2.1**, **Figura 1**), que, como é sabido, só "trivializa" a parte negativa do cálculo, enquanto que (ET^2) não é teorema deste cálculo, mas sim do Cálculo Intuicionista de Heyting, que o contém.

A demonstração da **SUBSTITUIÇÃO IV** é essencialmente a mesma da **SUBSTITUIÇÃO III**, exceto o passo, agora desnecessário, em que se faz uso de C_n **(12)**. Demonstremos, para $n=1$, sua primeira parcela, **(α)**:

(⇒) Acrescentemos o esquema C_1**(9)** ao cálculo $C_1\backslash\{C_1\textbf{(9)}, C_1\textbf{(12)}\}$. Tomemos agora como hipótese $(B^\circ \wedge B \wedge \neg B)$. De C_1**(4)** e C_1**(5)** temos $B^{(n)}$, B e $\neg B$. Mas, de C_1**(9)** temos $B^\circ \to ((A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A))$, donde, por **(MP)** temos $((A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A))$. De C_1**(1)** e C_1**(2)** temos, por **(MP)**, $\neg A$.

(⇐) Acrescentemos agora o esquema (ET^3) ao cálculo $C_1\backslash\{C_1\textbf{(9)}, C_1\textbf{(12)}\}$. Como hipóteses temos desta vez B°, $A \to B$ e $(A \to \neg B)$. De (ET^3) temos $(B^\circ \wedge B \wedge \neg B) \to \neg A$, do cálculo positivo concluímos $B^\circ \to (B \to (\neg B \to \neg A))$, e de **(MP)** $B \to (\neg B \to \neg A)$. Disto, e da segunda hipótese, concluímos $A \to (\neg B \to \neg A)$. Mas C_1**(1)** nos garante que $\neg A \to (\neg B \to \neg A)$. De C_1**(8)** e C_1**(11)** (terceiro excluído) temos, por **(MP)**, $\neg B \to \neg A$. Daí, e da terceira hipótese, temos $A \to \neg A$. Mas $\neg A \to \neg A$ é um teorema "positivo". Novamente por C_1**(8)** e C_1**(11)** temos, por **(MP)**, $\neg A$.

Que espécie de dedução é esta, que faz uso do cálculo positivo, do terceiro excluído e acrescenta a forma paraconsistente de redução ao absurdo, mas não a redução das negações? Acabamos de assistir a uma dedução que poderia ter sido feita no interior do Cálculo Minimal Paraconsistente, **CMP**. (vide **Figura 1**)

A demonstração de **(β)**, a segunda parte da **SUBSTITUIÇÃO IV**, para $n=1$ é em tudo similar a esta, só que não poderia ter sido feita em **CMP**, mas em C_1. Em conclusão, temos aqui duas possibilidades diferentes de estender o cálculo $C_1\backslash\{C_1\textbf{(9)}, C_1\textbf{(12)}\}$: pela adição do esquema C_1**(9)**, e pela adição do esquema C_1**(9*)**. Denominemo-las, nesta ordem, Ext_1 e Ext_2. Sabemos que o conjunto de teoremas de Ext_2 contém estritamente o conjunto de teoremas de Ext_1. O próprio C_1**(9*)** é um exemplo de teorema em Ext_2 mas não em Ext_1.

Acreditamos que isto talvez ajude a compreender melhor o verdadeiro problema por trás da falha da **SUBSTITUIÇÃO I**. Em passos:

- o axioma C_1**(9)** pode ser substituído em **CMP** pelo esquema ($\mathbf{ET}^3$) — da **SUBSTITUIÇÃO IV(α)**;
- o esquema ($\mathbf{ET}^1$) não é demonstrável em **CMP** — do **TEOREMA I**;
- na presença dos cinco primeiros axiomas do Cálculo Positivo Intuicionista, ($\mathbf{ET}^1$) e ($\mathbf{ET}^2$) são intersubstituíveis — do **TEOREMA III**;
- o axioma C_1**(12)** não é demonstrável em **CMP** $\cup$ ($\mathbf{ET}^1$) — do **TEOREMA II**.

Denominemos por **CMP*** o cálculo **CMP** $\cup$ ($\mathbf{ET}^1$). Sabemos que ($\mathbf{ET}^3$) é teorema de **CMP**, mas não ($\mathbf{ET}^2$), ou ($\mathbf{ET}^1$). Supôs-se, na **SUBSTITUIÇÃO I**, que **CMP*** e C_1 fossem cálculos equivalentes. Isso não é verdade, pois C_1**(12)** não é demonstrável em **CMP***. Na realidade, **CMP*** é um cálculo intermediário, entre **CMP** e C_1.

Bolas e quadrados

Considere as fórmulas

$$\boldsymbol{B}^{\square} \overset{\text{def}}{=} \neg(\neg B \wedge B)$$

$$\boldsymbol{B}^{\circ} \overset{\text{def}}{=} \neg(B \wedge \neg B)$$

★ Para provar que $B^{\square} \to B^{\circ}$ não é teorema de C_1, consideremos as matrizes

∧	♈	♉	♊
♈	♈	♉	♊
♉	♈	♈	♊
♊	♊	♊	♊

∨	♈	♉	♊
♈	♈	♈	♈
♉	♈	♈	♈
♊	♈	♈	♊

→	♈	♉	♊
♈	♈	♈	♊
♉	♈	♈	♊
♊	♈	♈	♈

	¬
♈	♊
♉	♈
♊	♈

onde {♈, ♉} são os valores distinguidos. Basta tomar o valor ♉ em B.

É fácil verificar que os axiomas de C_1 em sua formulação original, que consideram apenas fórmulas do tipo B°, mas não do tipo $B^{\square}$ sempre tomam o valor distinguido ♈. Contudo, a fórmula $B^{\square}\rightarrow B^{\circ}$ toma o valor não-distinguido ♊ quando B toma o valor intermediário ♉, e é portanto independente dos axiomas de C_1.

Na sua formulação original, portanto, poderíamos dizer que C_1 é tão-somente *paraconsistente à esquerda*, ou *levoparaconsistente*, pois apenas fórmulas do tipo B° são bem-comportadas. É imediato propor uma nova lógica “simétrica” a C_1, que seja apenas *paraconsistente à direita*, ou *dextroparaconsistente*, na qual apenas fórmulas do tipo $B^{\square}$ seriam bem-comportadas.

Uma formulação mais simples e interessante, contudo, a qual também tratamos neste trabalho (vide **5.1**), é obtida ao acrescentarmos novos axiomas à formulação original de C_1, a fim de obter uma lógica *paraconsistente à direita e à esquerda*, ou *biparaconsistente*, evitando assim ambas as formulações do princípio da não-contradição, e estendendo a exigência **dC[i]** de da Costa (vide **2.**). Tendo em vista que $B^{\circ}\rightarrow B^{\square}$ já é um teorema da versão original de C_1 (vide o ex. **c** em **2.2.2.1** e o ex. **c** em **2.3.3.6**) para obter a versão biparaconsistente de C_1 poderíamos acrescentar a este cálculo, por exemplo, o axioma

C_1**(PNC)** $\quad B^{\square}\rightarrow B^{\circ}$

Neste trabalho optamos por outro caminho, que mantém a estrutura da formulação original de da Costa: acrescentamos simplesmente o axioma C_1**(9**$^{\square}$**)**: $B^{\square}\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow((A\rightarrow\neg B)\rightarrow\neg A))$. Nesta nova axiomatização, C_1**(PNC)** é um princípio demonstrável.

É claro que as observações anteriores são igualmente aplicáveis a cada um dos C_n. Usando as mesmas matrizes acima podemos demonstrar que, em um dado cálculo C_n, $B^{(n)}$ não é equivalente a $B^{[n]}$. A solução que propomos nestes casos é exatamente a mesma.

C_ω *versus* C_{min}

Independência de Peirce e Dummett em C_ω

Alves (1976) mostrou que a Lei de Peirce **(LP)**, $((A\rightarrow B)\rightarrow A)\rightarrow A$, não é válida em C_ω, usando as seguintes matrizes:

∧	♈	♉	♊
♈	♈	♉	♊
♉	♉	♉	♊
♊	♊	♊	♊

∨	♈	♉	♊
♈	♈	♈	♈
♉	♈	♉	♉
♊	♈	♉	♊

→	♈	♉	♊
♈	♈	♉	♊
♉	♈	♈	♊
♊	♈	♈	♈

	¬
♈	♊
♉	♈
♊	♈

onde ♈ é o único valor distinguido. Basta tomar em A o valor ♉ e em B o valor ♊. Estes mesmos valores mostram que também a Lei de Dummett **(LD)**, $A \vee (A \to B)$, independe dos axiomas de C_ω.

Já sabemos (vide **3.2**) que **(LP)** se demonstra a partir de $C_\omega \cup \{$**(LD)**$\}$. Será que a recíproca também vale? Conjeturamos que não, embora ainda não tenhamos encontrado matrizes que demonstrassem que **(LD)** é independente de $C_\omega \cup \{$**(LP)**$\}$. Uma alternativa ainda melhor seria a seguinte: como sabemos também que todo teorema clássico puramente positivo é válido em $C_\omega \cup \{$**(LD)**$\}$ (vide **3.2**), poderíamos tentar encontrar matrizes que demonstrassem que há algum outro teorema clássico puramente positivo qualquer que não seja porém demonstrável em $C_\omega \cup \{$**(LP)**$\}$.

Nem C_ω nem C_{min} são finitamente trivializáveis

Em Alves, 1976, podemos encontrar ainda uma elegante prova geral de que o Cálculo Positivo Intuicionista, o Cálculo Positivo Clássico e C_ω não são *finitamente trivializáveis*, isto é, de que não há uma fórmula F (ou conjunto de fórmulas, que podemos tomar em conjunção) que acrescentada à axiomática destes cálculos ocasione a sua trivialização.

Lema I. *Em toda matriz correta para C_n, a relação $\leq$ entre seus valores definida por "$a \leq b$ sse $a \to b$ toma um valor distinguido" é uma pré-ordem.*

Basta verificar que esta relação é reflexiva e transitiva.

Lema II. *Se C_ω fosse finitamente trivializável, a relação de pré-ordem do* **Lema I** *admitiria um menor elemento.*

De fato, suponhamos que exista uma fórmula F tal que, para toda fórmula G, $C_\omega \cup \{F\} \vdash G$. Do Teorema da Dedução, temos que $C_\omega \vdash F \to G$. Para alguma valoração v e algum valor a temos que $v(F)=a$. Sejam p uma variável proposicional que não ocorre em F e v' uma valoração tal que $v'(p)=b$, para algum valor b e $v'(q)=v(q)$ para toda variável $q\neq p$. Então $v'(F)=a$. Ora, temos em particular que $C_\omega\vdash F\to p$, donde $v'(F\to p)=a\to b$. Mas $a\to b$ toma um valor distinguido, logo $a\leq b$ para todo b.

Lema III. *Existe uma matriz correta para* C_ω *que não apresenta a propriedade do* **Lema II**. Definimo-la assim:

Seus valores de verdade são todos os subconjuntos dos números naturais ($\mathbb{N}$) com complementar finito, e o próprio $\mathbb{N}$ é seu único valor distinguido. Os conectivos são definidos como[5]

$$v(A\to B)=A^C\cup B; \qquad v(A\vee B)=A\cup B; \qquad v(A\wedge B)=A\cap B;$$

$$v(\neg A)=\begin{cases}A^C\cup\{n\in\mathbb{N}: n\geq max(A^C)+2\}, \text{caso } A\subset\mathbb{N};\\ \mathbb{N}\setminus\{0\}, \text{caso } A=\mathbb{N}.\end{cases}$$

Basta verificar agora que todos os axiomas de C_ω assumem apenas o valor distinguido $\mathbb{N}$, para toda valoração dada. Como exemplo, se A é o conjunto $\mathbb{N}\setminus\{0, 1, 2, 4, 6, 7\}$, $\neg A$ é $\mathbb{N}\setminus\{3, 5, 8\}$, e $\neg\neg A$ é o conjunto $\mathbb{N}\setminus\{0, 1, 2, 4, 6, 7, 9\}$ e daí fácil ver que valem tanto $A\vee\neg A$ quanto $\neg\neg A\to A$.

A pré-ordem $\leq$ neste caso é a própria relação de inclusão, $\subseteq$, que, como é claro, não possui elemento mínimo no conjunto de valores em questão.

Teorema. C_ω *não é finitamente trivializável*. Consequência imediata dos lemas precedentes.

Corolário I. *Nem o Cálculo Positivo Intuicionista nem o Cálculo Positivo Clássico são finitamente trivializáveis*. Com efeito, eles são subsistemas de C_ω.

Corolário II. C_{min} *não é finitamente trivializável*. Basta notar que também **(LD)** assume apenas valores distinguidos nas matrizes do **Lema III**.

---

[5] A definição de $v(\neg A)$ em Alves, 1976, se encontra, infelizmente, completamente ilegível. Não é difícil verificar contudo que a definição que aqui apresentamos funciona.

Incaracterizabilidade por matrizes finitas

Não serão os cálculos paraconsistentes de da Costa cálculos polivalentes (como J_3 e $\mathcal{P}^1$)? Mais ainda, não serão estes cálculos *caracterizáveis por matrizes finitas*, isto é, dado um cálculo da hierarquia C_n, não haverá matrizes de dimensões finitas tais que os teoremas deste cálculo coincidam exatamente com as tautologias das matrizes consideradas? Arruda (1975) apresentou uma prova bastante simples de que nenhum dos cálculos C_n, $1 \le n \le \omega$, é caracterizável por matrizes finitas.

Teo A. *Em C_n, $1 \le n \le \omega$, a redução das negações é impossível, isto é, não valem os esquemas*

$$A \equiv \neg_{\boldsymbol{i}} A \qquad\qquad \neg_{2\boldsymbol{i}} A \equiv \neg_{2\boldsymbol{j}} A, \quad \boldsymbol{i} \neq \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{i} > 0,\ \boldsymbol{j} > 0$$

$$\neg_{2\boldsymbol{i}-1} \mathrm{A} \equiv \neg_{2\boldsymbol{j}-1} A, \quad \boldsymbol{i} \neq \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{i} > 0,\ \boldsymbol{j} > 0 \qquad\qquad \neg_{2\boldsymbol{i}} \mathrm{A} \equiv \neg_{2\boldsymbol{j}-1} A, \quad \boldsymbol{i} > 0,\ \boldsymbol{j} > 0$$

*onde $\neg_{\boldsymbol{i}}$ abrevia **i** ocorrências da negação $\neg$.*

Para verificar este fato, consideremos as matrizes infinitas que tomam como valores de verdade todos os números naturais, nas quais os valores distinguidos são todos os naturais não-nulos, e definir os conectivos como

$$v(A \wedge B) = \begin{cases} 1, \text{caso } v(A) > 0 \text{ e } v(B) > 0 \\ 0, \text{em caso contrário} \end{cases} \qquad v(A \vee B) = \begin{cases} 1, \text{caso } v(A) > 0 \text{ ou } v(B) > 0 \\ 0, \text{em caso contrário} \end{cases}$$

$$v(A \to B) = \begin{cases} 0, \text{caso } v(A) > 0 \text{ e } v(B) = 0 \\ 1, \text{em caso contrário} \end{cases} \qquad v(\neg A) = \begin{cases} 1, \text{caso } v(A) = 0 \\ v(A) - 1, \text{em caso contrário} \end{cases}$$

Não é difícil verificar que estas matrizes validam todos os axiomas de C_n mas não validam nenhuma das quatro "reduções das negações" acima apresentadas.

Corolário A. *Nenhum dos cálculos C_n, $1 \le n \le \omega$, é caracterizável por matrizes finitas.* Com efeito, dadas matrizes finitas com *i* valores de verdade, ao avaliarmos os termos da sequência $\neg_{\mathbf{1}} A$, $\neg_{\mathbf{2}} A$, $\neg_{\mathbf{3}} A$, $\ldots$, $\neg_{\boldsymbol{i}-\mathbf{1}} A$, $\neg_{\boldsymbol{i}} A$, $\neg_{\boldsymbol{i}+\mathbf{1}} A$, havemos de encontrar ao menos um valor repetido. Daí, deve forçosamente valer algum dos quatro esquemas do enunciado de **Teo A**.

Esta mesma demonstração vale para diversos outros cálculos paraconsistentes. Das hierarquias tratadas no presente trabalho (vide o apêndice ω, **Quem é quem**), o raciocínio acima se presta a mostrar que C_n^{ℓ}, C_n^{d}, C_n^{b}, $C_n^{+\ell}$, C_n^{+d}, C_n^{+b}, para $1 \le n \le \omega$, e C_{min} não são caracterizáveis por matrizes finitas – os axiomas de todos estes cálculos tomam apenas valores distinguidos nas matrizes de **Teo A** – mas não serve para mostrar o mesmo fato para as hierarquias $C_n^{\neg\neg\ell}$, $C_n^{\neg\neg d}$, $C_n^{\neg\neg b}$, $C_n^{+\neg\neg\ell}$, $C_n^{+\neg\neg d}$, $C_n^{+\neg\neg b}$ e para $C_{min}^{\neg\neg}$, pois nestes cálculos vale uma forma de redução das negações: $A \equiv \neg\neg A$.

Carnielli[6] propôs uma outra demonstração de incaracterizabilidade por matrizes finitas, a seguir:

Teo B. *O cálculo C_1 não é caracterizável por matrizes finitas.*

Consideremos desta feita as matrizes infinitas cujos valores de verdade são os ordinais pertencentes ao conjunto $\mathbb{N} \cup \{\omega\}$, cujos valores distinguidos são os ordinais finitos e cujos conectivos são definidos por

$$v(A \vee B) = min(v(A), v(B))$$

$$v(A \wedge B) = \begin{cases} 0, \text{caso } v(B) = v(A)+1 \\ max(v(A), v(B)), \text{em caso contrário} \end{cases}$$

$$v(A \to B) = \begin{cases} \omega, \text{caso } v(A) \in \mathbb{N} \text{ e } v(B) = \omega \\ v(B), \text{caso } v(A) = \omega \text{ e } v(B) \in \mathbb{N} \\ 0, \text{caso } v(A) = v(B) = \omega \\ max(v(A), v(B)), \text{em caso contrário} \end{cases}$$

$$v(\neg A) = \begin{cases} \omega, \text{caso } v(A) = 0 \\ 0, \text{caso } v(A) = \omega \\ v(A)+1, \text{em caso contrário} \end{cases}$$

A verificação de que todos os axiomas de C_1 tomam apenas valores distinguidos nestas matrizes é imediata. Notamos ainda que para a fórmula B° vale $v(B^{\circ}) = \omega$ sse $0 < v(B) < \omega$.

---

[6] Comunicação pessoal, correção à demonstração sugerida para o sistema META em Carnielli, 1990.

Seja p_1, p_2, …, p_n, … uma enumeração das fórmulas atômicas de C_1. Definamos agora as fórmulas seguintes:

$$D(p_i, p_j) \stackrel{\text{def}}{=} \neg(p_i \wedge \neg p_j) \wedge p_i \wedge \neg p_j, \text{ para } p_i \neq p_j;$$

$$D^n \stackrel{\text{def}}{=} \bigvee_{1 \leq i < j \leq n} (D(p_i, p_j) \rightarrow p_{n+1}).$$

Assim, por exemplo, temos

$$D^4 = (D(p_1, p_2) \rightarrow p_5) \vee (D(p_1, p_3) \rightarrow p_5) \vee (D(p_1, p_4) \rightarrow p_5) \vee$$
$$(D(p_2, p_3) \rightarrow p_5) \vee (D(p_2, p_4) \rightarrow p_5) \vee (D(p_3, p_4) \rightarrow p_5).$$

É muito fácil ver que toda fórmula D^n toma um valor não distinguido nas matrizes acima: para cada D^n dado, basta tomar $v(p_i) = i$, para $1 \leq i \leq n$, e tomar $v(p_{n+1}) = \omega$. Desta forma, observando as matrizes para a conjunção e para a negação, notamos que cada $D(p_i, p_j)$ assume um valor finito, uma vez que $p_i \neq p_j$, daí concluímos da matriz para a implicação que $v(D(p_i, p_j) \rightarrow p_{n+1}) = \omega$, e da matriz da disjunção temos $v(D^n) = \omega$.

Por outro lado, a fórmula D^n é uma tautologia em todo conjunto *m*-valente de matrizes adequado a C_1 e tal que $m < n$. De fato, se $m < n$, então existem p_i e p_j tais que $v(p_i) = v(p_j)$. No entanto, a fórmula $(\neg(A \wedge \neg A) \wedge A \wedge \neg A) \rightarrow B$, para *A* e *B* quaisquer, é um teorema de C_1, devendo portanto ser validada em qualquer conjunto de matrizes adequado a C_1. O mesmo ocorre com a fórmula $C \rightarrow (C \vee D)$. Obviamente as duas fórmulas anteriores são suficientes para garantir que a fórmula D^n seja validada em todo conjunto *m*-valente de matrizes adequado a C_1 e tal que $m < n$, muito embora, como mostramos no parágrafo anterior, nenhuma fórmula D^n seja um teorema de C_1.

A demonstracão desenvolvida em **Teo B** é válida para cada cálculo das hierarquias C_n^{ℓ}, C_n^{d}, C_n^{b}, $C_n^{+\ell}$, C_n^{+d}, C_n^{+b}, $C_n^{\neg\neg\ell}$, $C_n^{\neg\neg d}$, $C_n^{\neg\neg b}$, $C_n^{+\neg\neg\ell}$, $C_n^{+\neg\neg d}$, $C_n^{+\neg\neg b}$, para $1 \leq n < \omega$ – basta mudar convenientemente a definição de cada um dos disjuntos $D(p_i, p_j)$. Observe que ela não funciona para os casos em que $n = \omega$, nem para C_{min} ou $C_{min}^{\neg\neg}$, pois nestes cálculos não é possível definir uma negação forte – e, portanto, nenhuma fórmula do tipo $D(p_i, p_j)$ pode ser um teorema.

Juntando as duas demonstrações anteriores apenas o cálculo $C_{min}^{\neg\neg}$ fica de fora. Permanece em aberto o problema de se verificar se também este cálculo seria incaracterizável por matrizes finitas, ou ainda elaborar uma prova mais geral que cubra simultaneamente todas as hierarquias de cálculos paraconsistentes abordadas no presente trabalho. Será que a incaracterizabilidade por matrizes finitas de $C_{min}^{\neg\neg}$ é uma consequência do fato de que há cálculos que o estendem – quais sejam, $C_n^{\neg\neg\,\ell}$, $C_n^{\neg\neg\,d}$, $C_n^{\neg\neg\,b}$, $C_n^{+\,\neg\neg\,\ell}$, $C_n^{+\,\neg\neg\,d}$ e $C_n^{+\,\neg\neg\,b}$ – e que são eles próprios incaracterizáveis por matrizes finitas?

ω^ω Referências

Bibliografia das seções *n*, *n*≤1

ARISTÓTELES *Metafísica*. Trad. Hernán Zucchi. Buenos Aires: Editorial Sudamericana, 1986. 630p. [obra citada nas páginas 21 e 22 da presente dissertação]

ARRINGTON, R. L. Wittgenstein on contradiction. *Southern Journal of Philosophy*, v.7, n.1, p.37-43, 1969. [cit. p.30]

ARRUDA, A. I. On the imaginary logic of N. A. Vasil'év. In: A. I. Arruda, N. C. A. da Costa, A. M. Sette (Ed.) NON-CLASSICAL LOGICS, MODEL THEORY AND COMPUTABILITY. North-Holland, 1977. p.3-24. [p.23]

BÉZIAU, J.-Y. Théorie Legislative de la Négation Pure, *Logique & Analyse*, v.37, n.147-8, p.209-25, 1994. [p.8]

— What is paraconsistent logic? A aparecer em: D. Batens, C. Mortensen, G. Priest, J. P. Van Bendegem (Ed.), *Frontiers in paraconsistent logic*: Proceedings of the I WORLD CONGRESS ON PARACONSISTENCY, Ghent, julho-agosto de 1998. Londres: King's College Publications, 1999. 23p. [p.8]

BOBENRIETH M., A. *Inconsistencias ¿por qué no?* un estudio filosófico sobre la lógica paraconsistente. Santafé de Bogotá: Tercer Mundo, 1996. 569p. [p.2, 23, 24, 25]

BURKHARDT, H., SMITH, B. *Handbook of metaphysics and ontology*. 2v. Munique: Philosophia Verlag, 1991. [p.27]

CARNIELLI, W. A. Calea logică către inconsistenţă. *Krisis*, n.7, p.12-31, 1998. Tradução em interlíngua: Le via logic verso inconsistentia. [p.7]

CURRY, H. The inconsistency of certain formal logics. *The Journal of Symbolic Logic*, v.7, n.3, p.115-7, 1942. [p.xvi, 5]

— *Leçons de Logique Algébrique*. Paris: Gauthiers-Villars, 1952. 163p. [p.8]

— *Combinatory Logic*, v.I. Amsterdã: North-Holland, 1958. [p.32]

— *Foundations of Mathematical Logic*. McGraw-Hill, 1963. Reimpr. em Nova Iorque: Dover, 1977. 408p. [p.15]

DA COSTA, N. C. A. Nota sobre o conceito de contradição. *Anais da Sociedade Paranaense de Matemática*, s.2, v.1, p.6-8, 1958. [p.26]

— Observações sobre o conceito de existência em matemática. *Anais da Sociedade Paranaense de Matemática*, s.2, v.2, p.16-9, 1959. [p.10]

— On the theory of inconsistent formal systems. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, v.15, n.4, p.497-510, 1974. [p.24-5]

— The philosophical import of paraconsistent logic. *The Journal of Non-Classical Logic*, v.1, n.1, p.1-19, 1982. [p.27]

— *Ensaio sobre os fundamentos da lógica*. 2.ed. São Paulo: Hucitec, 1994. 268p. [p.25]

DA COSTA, N. C. A., MARCONI, D. An overview of paraconsistent logic in the 80s. *The Journal of Non-Classical Logic*, v.6, n.1, p.5-32, 1989. [p.10]

DA COSTA, N. C. A., BÉZIAU, J. Y., BUENO, O. What is semantics? A brief note on a huge question. *Sorites*, n.3, p.43-7, 1995a. [p.26]

— *Elementos de Teoria Paraconsistente de Conjuntos*. Campinas: Coleção CLE, v.23, 1998. 204p. [p.6]

D'OTTAVIANO, I. M. L. A lógica clássica e o surgimento das lógicas não-clássicas. In: COLÓQUIO DE HISTÓRIA DA CIÊNCIA, 7, 1991, Campinas. F. R. R. Évora (Ed.) *Século XIX:* o nascimento da ciência contemporânea. Campinas: Coleção CLE, v.11, 1992, cap.VI, p.65-93. [p.23]

D'OTTAVIANO, I. M. L., DA COSTA, N. C. A. Sur un problème de Jaśkowski. *Comptes Rendus de l'Academie de Sciences de Paris*, Séries A-B, t.270, p.1349-53, 1970. [p.xix, 24]

FRAENKEL, K. A., BAR-HILLEL, Y. *Foundations of Set Theory*. North-Holland, 1958. 415p. [p.1]

FREGE, G. *The Basic Laws of Arithmetic:* exposition of the system. Berkeley: University of California Press, 1967. 142p. [p.25]

GLOCK, H. J. *Dicionário Wittgenstein*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1998. 400p. [p.3, 29, 30, 32, 38]

GOLDSTEIN, L. Resenha de L. Wittgenstein, *Lectures*, C. Diamond (Org.). *The Philosophical Quarterly*, v.27, n.109, p.370-1, 1977. [p.11]

— Wittgenstein and the logico-semantical paradoxes. *Ratio*, v.25, n.2, p.137-53, 1983. [p.11]

— The development of Wittgenstein's views on contradiction. *History and Philosophy of Logic*, v.7, p.43-56, 1986. [p.35-6]

— Wittgenstein and paraconsistency. In: G. Priest, R. Routley, J. Norman (Ed.) *Paraconsistent Logic:* essays on the inconsistent. Munique: Philosophia Verlag, 1989. cap.XIX, p.540-62. [p.8, 10, 26]

GRANGER, G. G. *L'Irrationnel*. Paris: Éditions Odile Jacob, 1998. [p.10, 11]

HALLETT, G. *A Companion to Wittgenstein's* "Philosophical Investigations". Ithaca: Cornell University Press, 1977. 801p. [p.14]

HILBERT, D. Über das Unendliche. *Mathematische Annalen*, v.95, p.161-190, 1926. [p.4]

HINTIKKA, M. B., HINTIKKA, J. *Investigating Wittgenstein*. Basil Blackwell, 1986. 326p. [p.34-5, 36, 38]

JAŚKOWSKI, S. Propositional calculus for contradictory deductive systems. *Studia Logica*, v.24, p.143-57, 1969. Tradução de: Rachunek zdan dla systemów dedukcyjnych sprzecznych, 1948. [p.23-4]

KOTAS, J., DA COSTA, N. C. A. On the problem of Jaśkowski and the logics of Łukasiewicz. In: BRAZILIAN CONFERENCE ON MATHEMATICAL LOGIC, 1. A. I. Arruda, N. C. A. da Costa, R. Chuaqui (Ed.) *Proceedings*… Nova Iorque: Marcel Dekker, 1978. p.127-39. [p.24]

ŁUKASIEWICZ, J. On the principle of contradiction in Aristotle. *Review of Metaphysics*, v.24, p.485-509, 1971. [p.21-2, 23, 27]

MARCONI, D. Wittgenstein on contradiction and the philosophy of paraconsistent logic. *History of Philosophy Quarterly*, v.1, n.3, p.333-52, 1984. [p.10]

MONK, R. *Wittgenstein:* o dever do gênio. São Paulo: Companhia das Letras, 1995. 572p. [p.3]

MORENO, A. R. *Wittgenstein:* através das imagens. Campinas: Editora da Unicamp, 1993. 142p. [p.28-9, 36, 150]

PARIS, J., HARRINGTON, L. A mathematical incompleteness in Peano arithmetic. In: J. Barwise (Ed.) *Handbook of Mathematical Logic*. North-Holland, cap.D.8, p.1133-42, 1977. [p.40]

PRIEST, G. The logic of paradox. *Journal of Philosophical Logic*, v.8, n.2, p.219-41, 1979. [p.1]

PRIEST, G., ROUTLEY, R. First historical introduction: a preliminary history of paraconsistent and dialethic approaches. In: G. Priest, R. Routley, J. Norman (Ed.) *Paraconsistent Logic:* essays on the inconsistent. Munique: Philosophia Verlag, 1989. cap.I, p.3-75. [p.26, 27]

QUINE, W. V. O. *From a Logical Point of View*. Cambridge: Harvard University Press, 1953. 184p. [p.27]

REID, C. *Hilbert*. Nova Iorque: Springer-Verlag, 1996. 268p. [p.4]

RUSSELL, B. *The Principles of Mathematics*. Nova Iorque: W.W. Norton & Company, 1996. 574p. [p.1, 3]

TARSKI, A. The semantic conception of truth and the foundation of semantics. *Philosophy and Phenomenological Research*, v.4, p.341-76, 1944. [p.17]

VAN HEIJENOORT, J. Logic as language and logic as calculus. *Revue Internationale de Philosophie*, v.17, p.324-30, 1967. [p.34]

WITTGENSTEIN, L. [*Tractatus*] *Tractatus Logico-Philosophicus*. Trad. L. H. Lopes dos Santos, São Paulo: Edusp, 1994. 296p. [p.xvi, 8, 11, 20, 35, 40]

— [*Remarks*] *Philosophical Remarks*. R. Rhees (Ed.), University of Chicago Press, 1980. 357p. [p.xvi, 5, 14, 17, 19, 20, 30, 32, 33, 36]

— [*Grammar*] *Philosophical Grammar*. R. Rhees (Ed.), University of California Press, 1978. [p.3, 13, 14, 29]

— [*Foundations*] *Remarks on the Foundations of Mathematics*. G. H. von Wright, R. Rhees, G. E. M. Anscombe (Ed.). Cambridge: MIT, 1967. 196p. [p.xv, xvi, e cap.**1** *passim*]

— [*Investigações*] *Investigações Filosóficas*. G. E. M. Anscombe, R. Rhees (Ed.), trad. J. C. Bruni. São Paulo: Nova Cultural, coleção Os Pensadores, 5.ed., 1991. 242p. [p.xvi, 4, 8, 16, 29, 30, 31, 32, 36, 37]

— [*Zettel*] *Zettel*. G. E. M. Anscombe, G. H. von Wright (Ed.), Basil Blackwell, 1981. 124p. [p.7, 11, 29]

— [*Certainty*] *On Certainty*. G. E. M. Anscombe, G. H. von Wright (Ed.), Basil Blackwell, 1969. 97p. [p.36]

— [*Vienna*] *Ludwig Wittgenstein and the Vienna Circle:* conversations recorded by Friedrich Waismann. B. F. McGuinness (Ed.), Basil Blackwell, 1979. [p.5, 11, 13, 14, 18, 32]

— [*1932-1935*] *Wittgenstein's Lectures:* Cambridge, 1932-1935. A. Ambrose (Ed.), Basil Blackwell, 1979. 236p. [p.25]

— [*Lectures*] *Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics:* Cambridge, 1939. C. Diamond (Org.), The University of Chicago Press, 1976. 300p. [p.xvi, e cap.**1** *passim*]

WRIGHT, C. *Wittgenstein on the Foundations of Mathematics*. Londres: Duckworth, 1980. 500p. [p.3, 9, 26]

Bibliografia das seções *n*, $n \neq 1$

ACKERMANN, R. *An Introduction to Many-Valued Logics*. Londres: Routledge & Kegan Paul, 1967. 90p. [obra citada nas páginas 178 e 180 da presente dissertação]

ALVES, E. H. *Lógica e inconsistência:* um estudo dos cálculos C_n, $1 \leq n \leq \omega$. São Paulo, 1976. 137p. Tese (Mestrado em Filosofia) – Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas, Universidade de São Paulo. [cit. p.xix, xx, xxvi, 45, 46, 49, 88, 91, 94, 98, 198, 202, 206, 210, 211, 212]

ALVES, E. H., QUEIROZ, G. S. The construction of the calculi C_n of da Costa. *The Journal of Non-Classical Logic*, v.8, n.2, p.67-78, 1991. [p.xviii, 42-3, 44, 198, 205]

ARRUDA, A. I. Remarques sur les systèmes C_n. *Comptes Rendus de l'Academie de Sciences de Paris*, Séries A-B, t.280, p.1253-56, 1975. [p.213]

— A survey of paraconsistent logic. In: LATIN AMERICAN SYMPOSIUM ON MATHEMATICAL LOGIC, 4, 1978, Santiago. A. I. Arruda, R. Chuaqui, N. C. A. da Costa (Ed.) *Mathematical Logic in Latin America*. Amsterdã: North-Holland, 1980a. p.1-41. [p.42]

— The Russell paradox in the systems NF_n. In: BRAZILIAN CONFERENCE ON MATHEMATICAL LOGIC, 3. A. I. Arruda, N. C. A. da Costa, A. M.

Sette (Ed.) *Proceedings*… São Paulo: Sociedade Brasileira de Lógica, 1980b. p.1-12. [p.42]

ARRUDA, A. I., ALVES, E. H. Some remarks on the logic of vagueness. *Polish Academy of Sciences. Institute of Philosophy and Sociology. Bulletin of the Section of Logic*, v.8, n.3, p.133-8, 1979a. [p.162]

— A semantical study of some systems of vagueness logic. *Polish Academy of Sciences. Institute of Philosophy and Sociology. Bulletin of the Section of Logic*, v.8, n.3, p.139-44, 1979b. [p.162]

AVRON, A. On an implication connective of **RM**. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, v.27, n.2, p.201-9, 1986. [p.166, 178-9]

BAAZ, M. Kripke-type semantics for da Costa's paraconsistent logic C_ω. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, v.27, n.4, p.523-7, 1986. [p.54, 158]

BÉZIAU, J.-Y. Logiques construites suivant les méthodes de da Costa, I. *Logique et Analyse*, v.33, n.131-2, p.259-72, 1990. [p.xxiii, 116, 136]

— *Recherches sur la logique universelle:* excessivité, négation, séquents. Paris, 1995. 179p. Tese (Doutorado) – U.F.R. de Mathématiques, Université Denis Diderot (Paris 7). [p.137]

— Logic may be simple: logic, congruence and algebra. *Logic and Logical Philosophy*, n.5, p.129-47, 1997. Idem in: da Costa, Béziau, Bueno, 1998, *Elementos de Teoria Paraconsistente de Conjuntos*. Campinas: Coleção CLE, v.23, 1998. 204p. Apêndice 3, p.151-80. [p.136-7]

— Idempotent full paraconsistent negations are not algebraizable. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, v.39, n.1, p.135-9, 1998a. [p.154]

— Recherches sur la logique abstraite: les logiques normales. *Acta Universitatis Wratislaviensis, Serie Logika*, v.18, p.105-14, 1998b. [p.156]

BLACKBURN, P., DE RIJKE, M. Zooming in, zooming out. *Journal of Logic, Language and Information*, v.6, n.1, p.5-31, 1997a. [p.xiv, 134]

— Why combine logics? In: D. M. Gabbay, F. Pirri (Ed.) *Combining Logics* I. *Studia Logica*, v.59, n.1, p.5-27, 1997b. [p.xiv, 139]

BOURBAKI, N. The architecture of mathematics. *American Mathematical Monthly*, v.57, p.221-32. [p.136-7]

BROUWER, L. E. J. On the foundations of mathematics. In: A. Heyting (Ed.) *Collected Works*. Amsterdã: North-Holland, 1975. v.I, p.11-101. Tradução de: Over de Grondslagen der Wiskunde, 1907. [p.53, 144]

CÂNDIDO, S. L. *Sobre a lógica não-alética*. São Paulo, 1992. 127p. Tese (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. [p.183]

CARNIELLI, W. A. Many-valued logics and plausible reasoning. In: INTERNATIONAL CONGRESS ON MANY-VALUED LOGICS, 20. *Proceedings*… IEEE Computer Society, Universidade de Charlotte, Carolina do Norte, 1990. p.328-35. [p.xiii, 214]

— Non-deterministic semantics. In: MULTIPLE-VALUED LOGIC DAGSTUHL SEMINAR, 1997, Alemanha. D. Mundici, P. H. Schmitt, L. Zadeh, (Ed.) *Seminar Report 194*. Internationales Begegnungs und Forschungszentrum fürs Informatik, p.5. [p.xiv]

— Possible-translations semantics for paraconsistent logics. A aparecer em: D. Batens, C. Mortensen, G. Priest, J. P. Van Bendegem (Ed.), *Frontiers in Paraconsistent Logic*: Proceedings of the I WORLD CONGRESS ON PARACONSISTENCY, Ghent, julho-agosto de 1998. Londres: King's College Publications, 1999. 16p. [p.xix, xxiv, 42, 116, 139]

CARNIELLI, W. A., DE ALCÂNTARA, L. P. Paraconsistent algebras. *Studia Logica*, v.43, p.79-88, 1984. [p.153]

CARNIELLI, W. A., D'OTTAVIANO, I. M. L. Translations between logical systems: a manifesto. *Logique & Analyse*, v.40, n.157, p.67-81, 1997. [p.xiii, xiv, 82, 152]

CARNIELLI, W. A., LIMA-MARQUES, M. Society semantics and multiple-valued logics. W. A. Carnielli, I. M. L. D'Ottaviano (Ed.) *Advances in contemporary logic and computer science*: Proceedings of the XI BRAZILIAN CONFERENCE ON MATHEMATICAL LOGIC, Salvador, maio de 1996. American Mathematical Society, 1999. 20p. [p.xxiii, xxv, 125-6, 127, 129, 145-7, 158-9]

CARNIELLI, W. A., MARCOS, J. Possible-translations semantics and dual logics. A aparecer em *Soft Computing*, 199?a, 16p. [p.xix, 42, 54, 71, 87, 101, 142]

— Limits for paraconsistent calculi. Submetido a publicação, 199?b, 13p. [p.xxii, 108, 142-3, 158]

CIGNOLI, R. L. O., D'OTTAVIANO, I. M. L., MUNDICI, D. *Álgebras das Lógicas de Łukasiewicz*. Campinas: Coleção CLE, v.12, 1995. 268p. [p.155]

CONIGLIO, M. E., CARNIELLI, W. A. A categorial approach to the combination of logics. A aparecer em *Manuscrito*, v.22, n.2, outubro de 1999, Campinas: CLE. [p.137-8]

CRAWFORD, J. M., ETHERINGTON, D. W. A non-deterministic semantics for tractable inference. AAAI-98/IAAI-98 Proceedings. Proceedings of the 15TH NATIONAL CONFERENCE ON ARTIFICIAL INTELLIGENCE and the 10TH CONFERENCE ON INNOVATIVE APPLICATIONS OF ARTIFICIAL INTELLIGENCE, Madison, Wisconsin, julho de 1998. *Proceedings*… Cambridge: MIT Press, 1998. p.286-291. [p.xiv]

DA COSTA, N. C. A. *Sistemas formais inconsistentes*. Curitiba, 1963. Tese (Cátedra em Análise Matemática e Análise Superior) – Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras, Universidade Federal do Paraná. Curitiba: Editora UFPR, 1993. 68p. [p.xiii, xx, 41, 45, 87, 88, 94, 98, 107, 110, 165, 204]

— On the theory of inconsistent formal systems. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, v.15, n.4, p.497-510, 1974. [p.41]

— On paraconsistent set theory. *Logique et Analyse*, v.29, n.115, p.361-71, 1986. [p.42]

DA COSTA, N. C. A., ALVES, E. H. A semantical analysis of the calculi C_n. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, v.18, n.4, p.621-30, 1977. [p.xix, 46, 48, 49, 89, 91]

DA COSTA, N. C. A., BÉZIAU, J-Y. Théorie de la valuation. *Logique et Analyse*, v.37, n.146, p.95-117, 1994. [p.156]

— Overclassical logic. In: J-Y. Béziau, M. Tsuji (Ed.) *Contemporary Brazilian Research in Logic:* part II. *Logique et Analyse*, v.40, n.157, p.31-44, 1997. [p.153-4]

DA COSTA, N. C. A., WOLF, R. Studies in paraconsistent logic I: the dialectical principle of the unity of opposites. *Philosophia (Philosophical Quarterly of Israel)*, v. 9, n.2, p.189-217, 1980. [p.137]

DA COSTA, N. C. A., BÉZIAU, J.-Y., BUENO, O. A. Aspects of paraconsistent logic, *Bulletin of the IGPL*, v.3, n.4, p.597-614, 1995b. [p.xv, 116-7]

DA SILVA, J. J., D'OTTAVIANO, I. M. L., SETTE, A. M. Translations between logics. In: X. Caicedo, C. H. Montenegro (Ed.), *Models, algebras and proofs*: Proceedings of the X LATIN AMERICAN SYMPOSIUM ON MATHEMATICAL LOGIC, Bogotá, julho de 1995. Nova Iorque: Marcel Dekker, 1998, p.435-48. (Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics) [p.xiii, 82]

DE ARAÚJO, A. L., ALVES, E. H., GUERZONI, J. A. D. Some relations between modal and paraconsistent logic. *The Journal of Non-Classical Logic*, v.4, n.2, p.33-44, 1987. [p.129]

D'OTTAVIANO, I. M. L. The completeness and compactness of a three-valued first-order logic. In: LATIN AMERICAN SYMPOSIUM ON MATHEMATICAL LOGIC, 5. *Proceedings*… Bogotá, 1981. Idem in: *Revista Colombiana de Matemáticas*, v.19, n.1-2, p.77-94, 1985. [p.59]

— *Sobre uma teoria de modelos trivalente.* Campinas, 1982. 98p. Tese (Doutorado em Matemática) – Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, Universidade Estadual de Campinas. [p.57, 59, 166, 176]

— On the development of paraconsistent logic and da Costa's work. *The Journal of Non-Classical Logic*, v.7, n.1/2, p.89-152, 1990. [p.42]

— A lógica clássica e o surgimento das lógicas não-clássicas. In: COLÓQUIO DE HISTÓRIA DA CIÊNCIA, 7, 1991, Campinas. F. R. R. Évora (Ed.) *Século XIX:* o nascimento da ciência contemporânea. Campinas: Coleção CLE, v.11, 1992, cap.VI, p.65-93. [p.42]

D'OTTAVIANO, I. M. L., DA COSTA, N. C. A. Sur un problème de Jaśkowski. *Comptes Rendus de l'Academie de Sciences de Paris*, Séries A-B, t.270, p.1349-53, 1970. [p.xix, 57, 59, 154]

DUMMETT, M. *Truth and other enigmas*. Cambridge: Harvard University Press, 1978. 470p. [p.152]

EPSTEIN, R. L. *The semantic foundations of logic*. *Volume* 1*:* Propositional logics. Dordrecht: Kluwer, 1990. 388p. [p.83, 86]

FEITOSA, H. A. *Traduções conservativas*. Campinas, 1997. 161p. Tese (Doutorado em Lógica e Filosofia da Ciência) – Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas. [p.xxv, 82, 86, 147, 149, 152]

FINGER, M., GABBAY, D. Combining temporal logic systems. In: M. De Rijke, P. Blackburn (Ed.) *Combining Logics*. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, v.37, n.2, p.204-32, 1996. [p.139]

GABBAY, D. M. Fibred semantics and the weaving of logics part 1: modal and intuitionistic logics. *The Journal of Symbolic Logic*, v.61, n.4, p.1057-120, 1996a. [p.139]

— An overview of fibred semantics and the combination of logics. In: F. Baader, K. U. Schulz (Ed.) *Frontiers of combining systems*: Proceedings of the I INTERNATIONAL WORKSHOP, FroCoS'96, Munique, março de 1996. Dordrecht: Kluwer, 1996b. p.1-55. (Applied Logic Series, v.3) [p.139]

GOGUEN, J. A. Sheaf semantics for concurrent interacting objects. *Mathematical Structures in Computer Science*, v.2, n.2, p.159-91, 1992. [p.138]

HEYTING, A. *Intuitionism:* an introduction. Amsterdã: North-Holland, 1956. 132p. [p.53]

HUGHES, G. E., CRESSWELL, M. J. *A New Introduction to Modal Logic*. Nova Iorque: Routledge, 1996. 422p. [p.130]

JAŚKOWSKI, S. Propositional calculus for contradictory deductive systems. *Studia Logica*, v.24, p.143-57, 1969. [p.41, 125]

KLEENE, S. C. *Introduction to metamathematics*. Princeton: Van Nostrand, 1952. 550p. [p.44]

KOTAS, J., DA COSTA, N. C. A. On the problem of Jaśkowski and the logics of Łukasiewicz. In: BRAZILIAN CONFERENCE ON MATHEMATICAL LOGIC, 1. A. I. Arruda, N. C. A. da Costa, R. Chuaqui (Ed.) *Proceedings*… Nova Iorque: Marcel Dekker, 1978. p.127-39. [p.154]

KRIPKE, S. Semantical analysis of intuitionistic logic I. In: J. Crossley, M. Dummett (Ed.) *Formal Systems and Recursive Functions*. Amsterdã: North-Holland, p.92-129, 1963. [p.139-40]

LEWIN, R. A., MIKENBERG, I. F., SCHWARZE, M. G. Algebraization of paraconsistent logic $\mathcal{P}^1$. *The Journal of Non-Classical Logic*, v.7, n.1/2, p.79-88, 1990. [p.153]

LOPARIĆ, A. The method of valuations in modal logic. In: BRAZILIAN CONFERENCE ON MATHEMATICAL LOGIC, 1. A. I. Arruda, N. C. A. da Costa, R. Chuaqui (Ed.) *Proceedings*… Nova Iorque: Marcel Dekker, 1978. p.141-57. [p.157]

— A semantical study of some propositional calculi. *The Journal of Non-Classical Logic*, v.3, n.1, p.73-95, 1986 (artigo escrito em 1976). [p.95]

LOPARIĆ, A., ALVES, E. H. The semantics of the systems C_n of da Costa. In: BRAZILIAN CONFERENCE ON MATHEMATICAL LOGIC, 3, 1980. A. I. Arruda, N. C. A. da Costa, A. M. Sette (Ed.) *Proceedings*… São Paulo: Sociedade Brasileira de Lógica, 1980. p.161-72. [p.89, 91]

LOPARIĆ, A., DA COSTA, N. C. A. Paraconsistency, paracompleteness, and valuations. *Logique et Analyse*, v.27, n.106, p.119-31, 1984. [p.156]

MARCOS, J. On a problem of da Costa, 199?a. A aparecer. [p.xxiv, 132, 195]

— Many values, many semantics, 199?b. A aparecer. [p.161]

McGILL, V. J., PARRY, W. T. The unity of opposites: a dialectical principle, *Science and Society*, v.12, n.4, p.418-44, 1948. [p.137]

MENDELSON, E. *Introduction to Mathematical Logic*. Princeton: Van Nostrand, 1964. 300p. [p.44, 48]

MORTENSEN, C. Every quotient algebra for C_1 is trivial. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, v.21, p.694-700, 1980. [p.45]

PFALZGRAF, J. On geometric and topological reasoning in robotics. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, v.19, n.3-4, p.279-318, 1997. [p.138]

PFALZGRAF, J., SIGMUND, U. C., STOKKERMANS, K. Towards a general approach for modeling actions and change in cooperating agents scenarios. *Logic Journal of the IGPL*, v.4, n.3, p.445-72, 1996. [p.138]

PRIEST, G., ROUTLEY, R. Systems of paraconsistent logic. In: G. Priest, R. Routley, J. Norman (Ed.) *Paraconsistent Logic:* essays on the inconsistent. Munique: Philosophia Verlag, 1989. cap.V, p.151-86. [p.135-6, 154]

QUEIROZ, G. S. *Sobre a dualidade entre intuicionismo e paraconsistência*. Campinas, 1997. 150p. Tese (Doutorado em Lógica e Filosofia da Ciência) – Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas. [p.xiv, 83, 142, 149, 154]

RESCHER, N. *Many-Valued Logic*. Grã-Bretanha: McGraw-Hill, 1969. 360p. [p.173]

SERNADAS, A., SERNADAS, C., CALEIRO, C. Synchronization of logics. In: D. M. Gabbay, F. Pirri (Ed.) *Combining Logics* I. *Studia Logica*, v.59, n.2, p.217-47, 1997. [p.138]

SETTE, A. M. On the propositional calculus $\mathcal{P}^1$. *Mathematica Japonicae*, v.18, p.173-80, 1973. [p.xxiii, xxv, xxvi, 123, 124, 183]

SETTE, A. M., CARNIELLI, W. A. Maximal weakly-intuitionistic logics. *Studia Logica*, v.55, p.181-203, 1995. [p.xxiv, 144]

SLATER, B. H. Paraconsistent logics? *Journal of Philosophical Logic*, v.24, n.4, p.451-4, 1995. [p.154]

SUSZKO, R. Remarks on Łukasiewicz's three-valued logic. *Polish Academy of Sciences. Institute of Philosophy and Sociology. Bulletin of the Section of Logic*, v.4, n.3, p.87-90, 1975. [p.161]

URBAS, I. *On Brazilian paraconsistent logics*. Canberra, 1987. Tese (Doutorado) – Research School of Social Sciences, Australian National University. [p.153]

— Paraconsistency and the C-systems of da Costa. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, v.30, n.4, p.583-97, 1989. [p.153]

— Dual-intuitionistic logic. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, v.37, n.3, p.440-51, 1996. [p.154]

VAN DALEN, D. Intuitionistic Logic. In: D. Gabbay, F. Ghenthner (Ed.) *Handbook of Philosophical Logic*. Dordrecht: D. Reidel, 1986. v.III, p.225-339. (Studies in Epistemology, Logic, Methodology, and Philosophy of Science, v.166) [p.53]

Índice remissivo

MARCOS de Almeida, J. *Possible-translations semantics.* Campinas, agosto de 1999. xxviii + 240p. Tese (Mestrado em Lógica e Filosofia da Ciência) – Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas.

ABSTRACT

Possible-translations semantics were devised by Walter Carnielli as a generalization of the notion of formal semantics. Given an uninterpreted logic **L**, the idea is to base an interpretation of **L** on the combination of an appropriate set of translations of the formulas of **L** into a class of logics with known semantics. In this dissertation we concentrate mainly on paraconsistent logics, i.e., those logics capable of dealing with inconsistent yet non-trivial theories. Paraconsistent logics allow us to explore the effects of contradiction in formal calculi. The philosophy of Wittgenstein reveals highly unorthodox opinions concerning the role of contradiction in mathematics. The possible relations between Wittgenstein and paraconsistency are investigated in the first part of this study. In what follows, we investigate more technical questions, in particular, possible-translations semantics based on three-valued logics are provided for all of the calculi which constitute the first hierarchy of paraconsistent logics, devised by Newton da Costa, and known as C_n, $1 \leq n < \omega$. We also provide possible-translations semantics for eleven other related hierarchies. Making use of possible-translations semantics, we construct, for each of these hierarchies, calculi which are lower/upper deductive limits. As most of these calculi are non-characterizable by finite matrices, any bivalued semantics characterizing them are bound to be non-truth-functional. However, based on many-valued logics, their possible-translations semantics may restore truth-functionality, if we only allow each formula to be interpreted by means of its possible translations. Several other problems and results concerning possible-translations semantics, many-valued logics and paraconsistent logics are presented and commented on.

Keywords: Possible-translations semantics; translations between logical systems; paraconsistent logic; many-valued logic; combination of logics.

Autorizo a reprodução deste trabalho.

Campinas, agosto de 1999.

JOÃO MARCOS DE ALMEIDA
<vegetal@cle.unicamp.br>