Lista de exercícios - Cálculo Numérico

Prof. Rafael Beserra

September 2, 2021

Contents

1 Programação com Numpy e Matplotlib

1. Qual a diferença entre a função np.arange e a função np.linspace?

2. Verifique a diferença no tempo de execução dos seguintes códigos:

   - Código 1:

   ```
   import numpy as np
   import math

   x = np.arange(0, 10, 0.00001)
   y = []
   for i in x:
       y.append(math.sin(i)*math.cos(i))
   ```

   - Código 2:

   ```
   import numpy as np

   x = np.arange(0, 10, 0.00001)
   y = np.sin(x)*np.cos(x)
   ```

3. Plote a função $f(x) = x^2$ no intervalo $[0, 2]$ utilizando 15 amostras usando segmentos com pontos (vide Figura 1). Não utilize nenhuma estrutura de repetição.

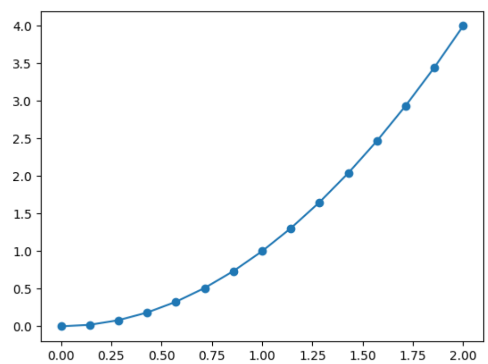


Figure 1: Plot de x^2

4. Plote os pontos contidos no arquivo data.in (cada linha do arquivo contém um par x y) usando scatter plot e a reta $f(x) = 66.48 * x - 53.41$. Adicione: um grid, legenda para os pontos e para a reta. Os pontos devem ter transparência. Vide Figura 2.

5. Em um único programa, plote a função $sin(x)$ em uma figura e $cos(x)$ em outra, como a Figura 3.

6. Podemos encontrar os pontos críticos de uma função, encontrando as raízes da derivada dessa função. Plote a função $x^3 - 10x^2 + 31x - 30$, sua derivada e os pontos críticos, conforme Figura 4.

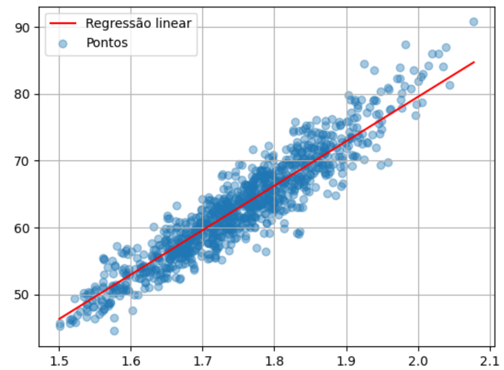


Figure 2: Plot de pontos e funções

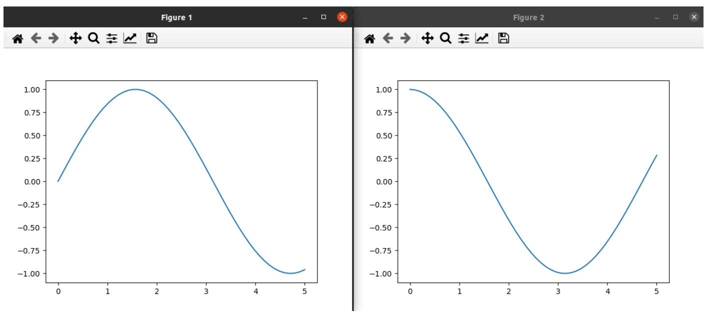


Figure 3: Múltiplas figuras usando matplotlib

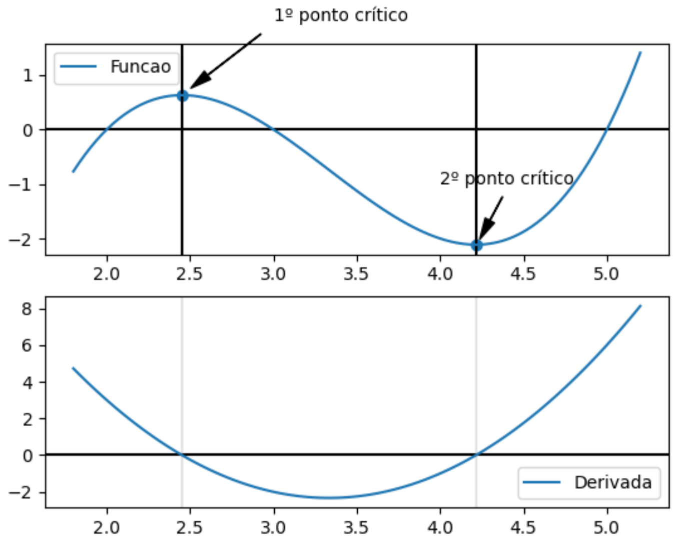


Figure 4: Utilize o subplot para fazer dois plots na mesma figura

2 Introdução

Fique à vontade para escolher as ferramentas para as questões a seguir.

1. Calcule $\sqrt{10}$ usando o método babilônico.

2. ▷ Uma operação bastante comum em processamento de sinais é a convolução. Uma das aplicações mais utilizada é na suavização de sinais para, por exemplo, atenuar ruído.

   a. Crie uma função $f(x) = sen(x) + \eta(x)$, onde $\eta(x)$ é uma função de ruído branco gaussiano. Utilize a função np.random.normal (utilize média 0 e desvio padrão não muito alto como, por exemplo, 0.1).
   b. Calcule a convolução de $f(x)$ com um filtro de média. Utilize a função np.convolve. O primeiro argumento dessa função é o vetor no qual quer aplicar a convolução. O segundo argumento é o chamado kernel. Escolha np.ones(s)/s. Quanto maior o valor de s, maior será a suavização.
   c. Plote uma única figura com os seguintes plots:
      - A função $sen(x)$
      - A função $f(x)$ (a senóide com ruído branco gaussiano)
      - O resultado da convolução
      - O erro: a diferença absoluta entre o resultado da convolução e a função $sen(x)$

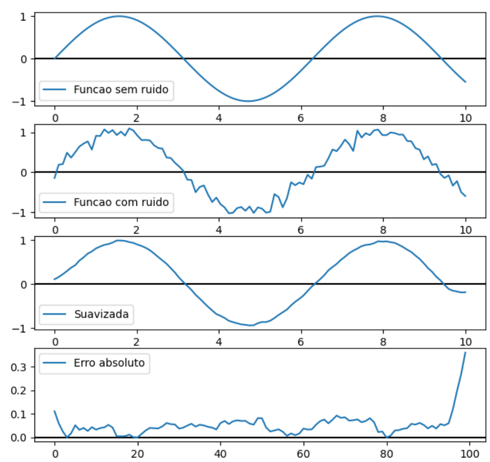


Figure 5: Exemplo de resultado

3. Dado um determinado ponto em uma função contínua, pode-se estimar pontos próximos a partir da derivada nesse ponto. A derivada pode ser calculada como o seguinte limite:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

   Podemos utilizar um valor de h suficientemente pequeno para aproximar $f'(a)$. Utilize esse conceito para calcular dois pontos próximos a um ponto, um à esquerda, outro à direita, na função $f(x) = x^2$. Plote a função $f(x)$, a reta tangente ao ponto escolhido e os dois pontos próximos calculados. Vide Figura 6.

4. ▷ Em algumas aplicações, uma função não é conhecida, mas sua derivada e algum ponto da função são conhecidos. Uma forma de descobrir a função desconhecida, pelo menos em algumas amostras, é o método de Euler (a forma mais simples dos métodos Runge-Kutta). Funciona assim: parte-se do ponto conhecido e, utilizando a derivada (como na questão anterior), calcula-se um segundo ponto da função desconhecida. A partir do segundo ponto, calcula-se um terceiro ponto. Esse processo é repetido tantas vezes quanto se queira.

   Dados:

   - A função desconhecida $f(x) = xcos(x) + 1$ (veja que a função desconhecida está sendo escrita aqui para que você possa comparar o resultado com a função $f(x)$ – na prática essa função não seria conhecida)

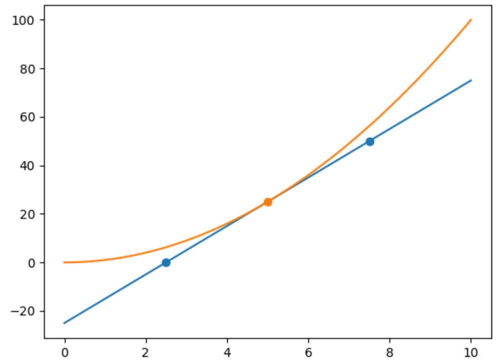


Figure 6: Exemplo de resultado

- $f(0) = 1$ (o ponto conhecido)
- $f'(x) = cos(x) - xsen(x)$ (a derivada conhecida)

Partindo do ponto conhecido desta função $f(0)$, estime outros pontos de $f(x)$ no intervalo $[0, 6]$. Plote em um único gráfico a função $f(x)$ e os pontos estimados, conectando-os com segmentos de reta.

3 Representação Numérica

1. Um sistema numérico é constituído desses 4 algarismos: 0, $\triangle$ (equivalente a 1), $\times$ (equivalente a 2) e $\square$ (equivalente a 3).

   a. Conte até o trigésimo número, fazendo a correspondência com a contagem de inteiros na base decimal e na base hexadecimal
   b. Calcule $\triangle \times + \times \times$ e escreva o resultado no referido sistema e nas bases decimal e hexadecimal
   c. Multiplique $\square$ por $\triangle\triangle$ e escreva o resultado no referido sistema e nas bases decimal e hexadecimal
   d. Calcule $\triangle \triangle \triangle - \square\times$ e escreva o resultado no referido sistema e nas bases decimal e hexadecimal

2. Realize as seguintes conversões de base:

   1. Casos de uma base maior para uma base menor:
      a. $423_5 \to x_3$
      b. $521_6 \to x_2$
      c. $893_{10} \to x_2$
      d. $75254_8 \to x_2$
      e. $FFAACC_{16} \to x_2$
      f. $EA3BA_{16} \to x_4$
      g. $FA3B_{16} \to x_{10}$
   2. Casos de uma base menor para uma base maior:
      a. $21101_3 \to x_5$
      b. $1101_2 \to x_7$
      c. $110111_2 \to x_{10}$
      d. $101011101_2 \to x_8$
      e. $311032_4 \to x_{16}$
      f. $8391_{10} \to x_{16}$
      g. $11001111100110001_2 \to x_{16}$

3. Represente os seguintes números em inteiros de 8 bits utilizando (1) sinal-magnitude, (2) complemento de 1 e (3) complemento de 2.

   a. 74
   b. 119
   c. -15
   d. -119

4. Represente os seguintes números de acordo com o padrão IEEE 754 (precisão simples).

   a. 32.625
   b. -182.55

5. $\triangleright$ Realize as seguintes conversões de base:

   a. $6201_7 \to x_3$
   b. $EBA_{16} \to x_2$
   c. $111000001100010111101_2 \to x_{16}$

6. $\triangleright$ Represente o número -99 em inteiro de 8 bits utilizando (1) sinal-magnitude, (2) complemento de 1 e (3) complemento de 2.

7. $\triangleright$ Represente o número -382.775 de acordo com o padrão IEEE 754 (precisão simples)

8. $\triangleright$ Você está escrevendo um programa que registra em um arquivo os comandos de um controle de playstation. Esse controle possui um total de 14 botões, além do analógico. Mas para os registros, você considerará somente os seguintes 12 botões: $\triangle$, $\times$, $\square$, $\bigcirc$, $\rightarrow$, $\leftarrow$, $\uparrow$, $\downarrow$, LT, LB, RT, RB.

   a. Como você poderia representar uma sequência de comandos como inteiros? Exemplifique.
   b. Como você poderia gravar/recuperar uma sequência de comandos de forma a economizar o máximo possível de espaço no arquivo?

4 Zeros de funções

1. Marque V para verdadeiro, F para falso

    a. Uma desvantagem de usar $|f(x_k)| < \epsilon$ como critério de parada é que a função pode apenas chegar próximo de 0, mas não cruzar o eixo x.
    b. Dado um intervalo [a, b], se f é contínua, f(a) > 0 e f(b) > 0, então não há raiz real no intervalo [a, b].
    c. Dado um intervalo [a, b], se f é contínua, f(a) > 0 e f(b) < 0, então há exatamente uma única raiz real no intervalo [a, b].
    d. O método de Newton terá uma melhor convergência se já estiver próximo da raiz.
    e. Uma desvantagem do método da secante é ter que calcular analiticamente a derivada da função.
    f. O método Regula Falsi (falsa posição) sempre mantém um intervalo cujos extremos possuem sinais opostos na função.
    g. Um ponto fixo p em uma função g(x) é tal que g(p) = 0.
    h. Se f(x) = x - g(x), então os pontos fixos de g(x) são raízes de f(x)

2. Encontre as 3 raízes reais (vide Figura 7) de:

$$f(x) = x^3 + 0.82x^2 - 12.4577x + 4.21686$$

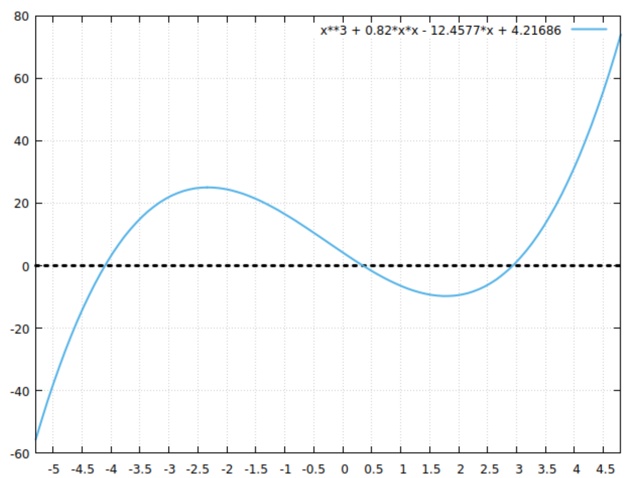


Figure 7: Função f(x)

- Métodos
    a. Bisseção (considere o intervalo inicial $[-4.3, 4.0]$)
    b. Newton-Raphson (considere $x_0 = 1.2$)
    c. Secante (considere $x_0 = 2.8$ e $x_1 = 3.4$)
    d. Regula Falsi (considere $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$)
- Metodologia:
    1. O critério de parada deve ser:
        a. $|f(x_i)| < 0.01$

3. ▷ Encontre computacionalmente as 4 raízes reais (vide Figura 8) de:

$$f(x) = x^4 - 2.36343x^3 - 18.1163x^2 + 20.7595x + 58.8273$$

- Métodos

    a. Bisseção
    b. Newton-Raphson

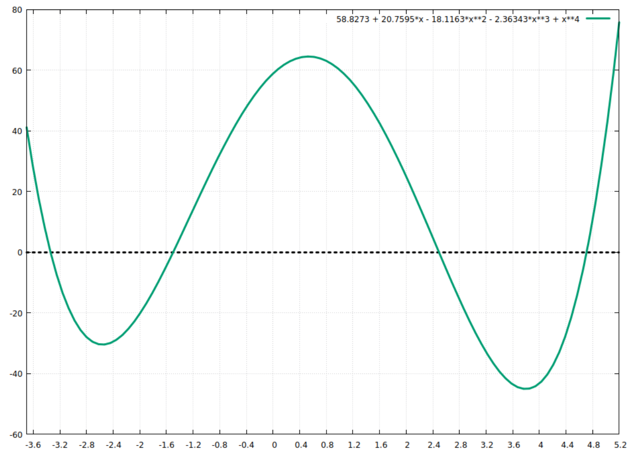
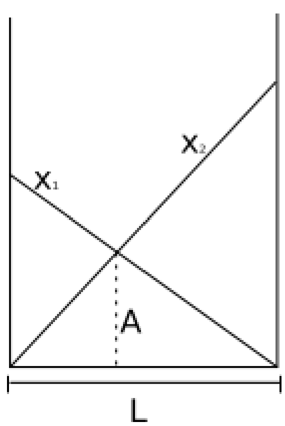


Figure 8: Função f(x)

c. Secante
d. Regula Falsi

- No resolução, compare os métodos em relação ao número de iterações
- Implementar utilizando os templates (em C/python/R) disponíveis no github
- Metodologia:
  1. Você pode utilizar o gráfico para ter uma boa noção do intervalo inicial no caso de (a), x_0 no caso de (b) e x_0, x_1 no caso de (c) e (d).
  2. O critério de parada deve ser:
     a. $|f(x_i)| < 0.001$ (note a mudança em relação à questão anterior)
  3. Basta que cada método encontre uma das raízes, desde que todas as 4 raízes sejam encontradas
  4. A função que implementa o método deve escrever todas as aproximações na tela (uma por linha)

4. ▷ (Burden, pag. 95) Duas escadas se cruzam em um beco de largura L. Cada escada tem uma extremidade apoiada na base de uma parede e a outra extremidade apoia em algum ponto na parede oposta. As escadas se cruzam a uma altura A acima do pavimento. **Calcule L**, sendo $x_1 = 20m$ e $x_2 = 30m$ os respectivos comprimentos das escadas e $A = 8m$. Use um dos métodos para encontrar raízes utilizando como critério de parada $|f(x_i)| < 0.001$.



5 Sistemas lineares

1. Marque V para verdadeiro, F para falso

   a. Um sistema linear com 2 equações e 3 variáveis é subdeterminado
   b. Um sistema linear com 3 equações e 3 variáveis sempre tem uma única solução
   c. Um sistema linear com 10 equações e 2 variáveis é sempre impossível
   d. Dado um sistema linear N x N, o i-ésimo passo da eliminação de Gauss consiste em zerar todos os elementos abaixo do pivô da i-ésima coluna
   e. No método de Gauss-Jordan, o i-ésimo passo compreende zerar completamente a i-ésima coluna
   f. A troca de duas linhas em A|b pode alterar a solução do sistema linear
   g. A decomposição LU consiste em decompor uma matriz quadrada A em L, matriz diagonal e uma matriz U, triangular superior, tal que A = LU
   h. As estratégias de pivotamento diminuem o erro da solução do sistema linear ao escolher como pivô elementos com maior valor em módulo
   i. Dado o vetor resíduo $r = b - A\bar{x}$ o refinamento consiste em obter um vetor de correção y resolvendo-se $Ay = r$ o qual deve ser somado em $\bar{x}$

2. Expresse o seguinte sistema linear na forma de matriz aumentada:

$$\begin{aligned} 3x_0 + 2x_1 + 4x_2 &= 9 \\ -2x_0 + 3x_1 - 2x_2 &= -1 \\ 4x_0 - 3x_1 + 2x_2 &= 3 \end{aligned}$$

3. Resolva o seguinte sistema linear por retrossubstituição:

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

4. Resolva o seguinte sistema linear por:

   a. Eliminação de Gauss
   b. Gauss-Jordan

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 3 \\ 9 & 14 & -2 & 9 \\ 6 & 12 & 4 & 14 \end{bmatrix}$$

5. Dada a matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -3 & -2 & -2 \\ 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

   Cuja decomposição LU é:

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

   Responda: quais são os multiplicadores do 1° e do 2° passo da eliminação de Gauss?

6. Faça a decomposição LU de:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 12 & 18 & -5 \\ 9 & 8 & -10 \end{bmatrix}$$

   Depois encontre a solução x de

$$Ax = \begin{bmatrix} 4 \\ 27 \\ -4 \end{bmatrix}$$

7. Calcule a matriz inversa de:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

8. Nessa questão você deverá aplicar **uma** iteração do refinamento para ter uma melhor aproximação da solução do seguinte sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

   Como é necessário utilizar uma matriz com dimensões consideráveis para os impactos da precisão numérica se tornarem notáveis, utilize de forma forçada uma precisão limitada nos cálculos. Para isso todos os cálculos da eliminação de Gauss deverão ocorrer com apenas **uma** casa decimal de precisão. Por exemplo, 3.45.3 = 18.02, esse resultado deve ser imediatamente arredondado para 18.0. Outro exemplo: 3.75.8 = 21.46, por sua vez, deve ser arredondado para 21.5.

9. ▷ Calcule a matriz inversa de:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & -5 & -6 \\ 3 & 8 & 11 \end{bmatrix}$$

10. ▷ Implemente o algoritmo de eliminação de Gauss-Jordan utilizando os templates (em C ou python) disponíveis no github. Teste com os sistemas lineares disponibilizados pelo professor no repositório. O arquivo de entrada contém um inteiro n, seguido de n linhas com n + 1 números cada (a linha i contém cada a_{ij}, seguidos de b_i). A leitura dessa matriz já é realizada no template. Aplique uma iteração de refinamento e analise o impacto na norma do vetor resíduo.

6 Interpolação

1. Marque V para verdadeiro, F para falso

   a. Se f(x) interpola os pontos $(x_i, y_i) então $f(x_i) = y_i$
   b. Dado que (x_i, y_i) são amostras da função f(x), se g(x) for uma função interpoladora desses pontos, então f(x) = g(x)
   c. Se f(x) interpola linearmente os pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1), então $f(\frac{x_0+x_1}{2}) = \frac{y_0+y_1}{2}$
   d. Por conta da natureza recursiva das diferenças divididas, a interpolação por Newton exige que o número de pontos seja necessariamente potência de 2
   e. O caso base da diferença dividida é definida como $f[x_i] = f(x_i)$
   f. Cada permutação do conjunto de pontos gera um polinômio interpolador diferente

2. Dada uma função $f(x)$, como conferir se essa função interpola o conjunto de pontos (x_i, y_i)?

3. Para cada conjunto de pontos da tabela a seguir:

   a. calcule o polinômio interpolador;
   b. calcule $f(a)$;
   c. plote o gráfico com os pontos, o polinômio interpolador e o ponto $(a, f(a))$.

Conjunto de pontos	Metodo	a (calcule f(a))
{(1, 4), (3, 2)}	Sistemas lineares	2
{(1, 4), (3, 2)}	Newton	2
{(1, 4), (3, 2)}	Lagrange	2
{(-1, 15), (0, 8)}	Qualquer	-0.6
{(1, 3), (2, -1), (3, 4)}	Lagrange	2.5
{(1, 3), (2, -1), (3, 4)}	Newton	2.5
{(1, 3), (2, -1), (3, 4), (4, 2)}	Newton	2.5

4. É possível interpolar $(3, 5)$ e $(3, 7)$? Justifique.

5. Um designer precisa obter vários tons de cinza em um programa de computador. O preto representa o valor 0 na escala de cinza, enquanto o branco representa 255 nessa mesma escala. Represente os tons de cinza em função de um parâmetro k que varia de 0 a 1, isto é, $f(0) = 0$ e $f(1) = 255$.

6. O grau Fahrenheit (°F) é uma escala de temperatura tal que:

   - o ponto de fusão da água é de 32 °F (equivalente a 0 °C) e
   - o ponto de ebulição da água é de 212 °F (equivalente a 100 °C).

   Utilizando o método de Newton ou Lagrange para interpolação linear, calcule a relação entre grau Fahrenheit e grau Celsius.

7. Um biólogo precisa realizar vários experimentos em uma cobaia, calculando sua resposta a certos estímulos. Tanto a resposta como os estímulos podem ser convertidos para um número real. De acordo com teorias, a resposta tem uma relação aproximadamente quadrática em relação ao estímulo fornecido. Os dados já obtidos foram: $(1, 3)$, $(2, 5)$ e $(3, 3)$. Desenhe o gráfico e calcule o valor esperado para o estímulo medido como 3.5.

8. Em uma animação dois quadrados possuem mesmo centro, o segundo quadrado porém está rotacionado 45 graus. Ambos possuem mesmo lado no início da animação (quando k = 0). O animador estabelece que no final da animação (quando k = 1) o lado do primeiro quadrado terá o dobro da sua medida original e o lado do segundo quadrado terá metade da sua medida original. Em que instante de tempo da animação (valor de k) o segundo quadrado estará exatamente encaixado no primeiro quadrado?

9. Deseja-se obter o efeito da segunda imagem na Figura 10. Para isso a intensidade de cada ponto da imagem (x, y) é multiplicada por um valor $m(x)$ que está em função da abscissa do ponto.

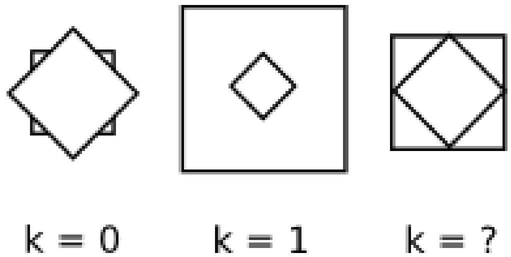


Figure 9: Diferentes instantes de tempo para a animação do quadrado

Figure 10: Imagem original, imagem com efeito e sistema de coordenadas dos pontos da imagem, respectivamente

Quando $x = 0, m = 0$ (parte escura à esquerda), quando $x = \frac{L}{2}, m = 1$ (parte clara no centro) e quando $x = L$, $m = 0$ (parte escura à direita). Utilizando um polinômio interpolador de segundo grau, calcule a função $m(x)$.

10. A interpolação de Lagrange para $n + 1$ pontos é dada por:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) f(x_i)$$

   a. Expresse matematicamente $l_i(x)$
   b. Qual o valor de $l_i(x_i)$ e qual o valor de $l_i(x_j)$ para $j \neq i$? Explique.

11. A interpolação bilinear é bastante utilizada no contexto em que o domínio da função que se deseja obter é o R^2.

   Funciona assim: dados 4 pontos conhecidos (vide Figura 11) $Q_{12}, Q_{22}, Q_{11} e Q_{21}$, o valor de P é obtido pela interpolação linear de R_1 e R_2, onde R_1 é a interpolação linear de Q_{12} e Q_{22}, assim como R_2 é a interpolação linear de Q_{11} e Q_{21}.

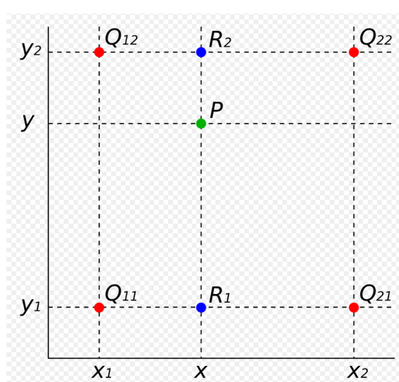


Figure 11: Diagrama para explicação da interpolação bilinear

   A imagem da Figura 12 foi obtida através da interpolação bilinear de cada canal de cor R, G e B.

   Utilizando o arquivo inicial bilinear.py disponível no GitHub, implemente a interpolação bilinear.

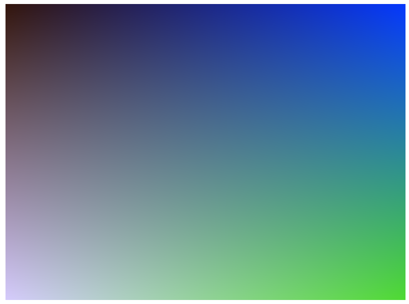


Figure 12: Imagem resultante da interpolação bilinear

12. ▷ Para cada conjunto de pontos da tabela a seguir:

    a. calcule o polinômio interpolador;
    b. calcule $f(a)$;
    c. plote o gráfico com os pontos, o polinômio interpolador e o ponto $(a, f(a))$.

Conjunto de pontos	Metodo	a (calcule f(a))
{(2, 4), (4, 1)}	Sistemas lineares	1
{(0, 1), (2, 3), (4, 2)}	Lagrange	3
{(0, 1), (2, 3), (4, 2)}	Newton	3
{(0, 1), (2, 3), (4, 2), (6, 5)}	Newton	3

13. ▷ Um tanque com capacidade para $10m^3$ de água, inicialmente completamente cheio (tempo $t = 0$), está sendo esvaziado com uma velocidade que varia linearmente com o tempo (logo o volume varia de forma quadrática). Constata-se que o tanque está com $8m^3$ em $t = 1$ min e com $4m^3$ em $t = 2$ min. Utilizando interpolação de Lagrange ou Newton, calcule o instante de tempo em que o tanque estará vazio. Considere $\sqrt{41} \approx 6.4$.

7 Curvas de Bézier

1. Marque V para verdadeiro, F para falso

    a. As curvas de Bézier são mais indicadas para o design de curvas que as curvas obtidas por interpolação polinomial.
    b. As curvas de Bézier são ótimas para o design de curvas, mas são variantes a transformações geométricas.
    c. A curva de Bézier com 2 pontos de controle corresponde a um segmento de reta.
    d. A curva de Bézier com 3 pontos de controle sempre resulta em uma função linear.
    e. Há dois resultados possíveis e distintos pelo algoritmo de De Casteljau: um que é obtido pela abordagem top-down e outro obtido pela abordagem bottom-up.
    f. Na abordagem bottom-up do algoritmo de De Casteljau, começa-se pelos casos base, que são os pontos de controle.
    g. A curva de Bézier calculada pelos polinômios de Bernstein envolve o cálculo do binômio de Newton.
    h. A curva de Bézier é calculada em função de um parâmetro t, tal que, quando t = 0, o ponto resultante é o primeiro ponto de controle e, quanto t = 1, o ponto resultante é o último ponto de controle.
    i. A curva de Bézier é calculada em função de um parâmetro t, tal que, quando t = 0.5, o ponto resultante é geometricamente o ponto médio entre o primeiro e o último ponto.

2. Dado um conjunto de pontos de controle ($P_0, P_1, \dots, P_n$), é possível obter uma curva paramétrica $(x(t), y(t))$ calculando para cada componente uma interpolação polinomial. Uma outra possibilidade para obter uma curva paramétrica é a curva de Bézier dada por:

$$\beta(t) = \sum_{i=0}^{n} b_{i,n}(t) P_i$$

onde $b_{i,n}$ é um Polinômio de Bernstein dado por:

$$b_{i,n} = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

Responda:

    a. Qual a vantagem de utilizar a curva de Bézier em relação à curva obtida por interpolação polinomial?
    b. Qual o intervalo do parâmetro t para o desenho apropriado da curva?
    c. A curva $\beta(t)$ passa necessariamente por dois pontos de controle. Quais e para, respectivamente, qual valor de t?

3. Na Figura 13, dados os pontos de controle P_0, P_1, P_2 e P_3, qual dos pontos refere-se à curva de Bézier para $t = 0.5$? Explique o raciocínio.

4. Considere os pontos de controle $(1, 4)$, $(1, 1)$, $(3, 1)$ e $(3, 4)$.

    a. Calcule a curva de Bézier para $t \in 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$ usando:
        a. Algoritmo de De Casteljau
        b. Polinômios de Bernstein
    b. Apresente um plot ou rascunho com a curva.

5. ▷ Implemente a função bezier1 e bezier2 em uma das duas opções abaixo:

    a. No arquivo bezier_template.c, que escreve na tela vários pontos da curva de Bézier
    b. No arquivo bezier_template.cpp, que renderiza a curva na tela. Neste caso precisa ter as bibliotecas de desenvolvimento do OpenGL, GLU e GLUT. Para compilar use:

```
g++ bezier_template.cpp -lGL -lGLU -lglut
```

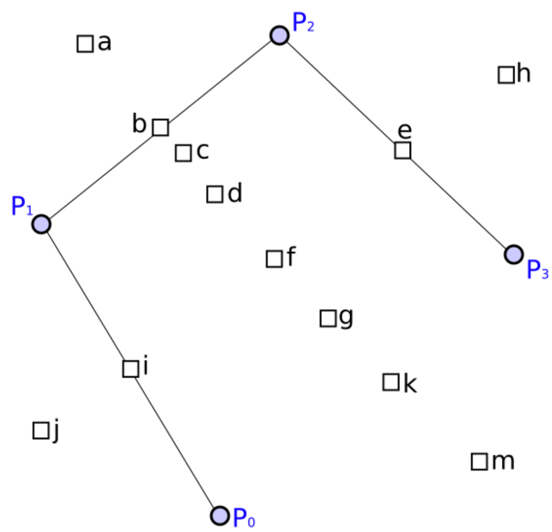


Figure 13: Pontos de controle

8 Integração

1. Marque V para verdadeiro, F para falso

   a. A diferença entre o resultado da regra do trapézio e a integral definida para um mesmo intervalo em uma função linear é zero.

   b. A regra 3/8 de Simpson calcula a integral indefinida de funções polinomiais.

   c. Seja uma função contínua f(x). A regra 1/3 de Simpson aproxima o resultado da integral definida de f(x) de a até b através da integral definida de a até b do polinômio interpolador (a, f(a)), (m, f(m)) e (b, f(b)), onde m = (a+b)/2.

   d. A regra 1/3 de Simpson calcula de forma exata o resultado da integral definida de uma parábola.

   e. Dadas as abscissas x_0, x_1, x_2 utilizadas na regra 1/3 de Simpson, pode-se afirmar que $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = h$.

   f. Deseja-se calcular a integral definida de f(x) no intervalo [2, 10] utilizando a regra 1/3 de Simpson composta em 2 subintervalos. Para tal, h = 4.

2. Seja a integral definida

$$\int_0^3 x^2 dx$$

   Calcule-a (a) de forma analítica, (b) usando a regra do trapézio (c) usando a regra do trapézio composta em 3 subintervalos. Compare e discorra sobre os resultados.

3. A regra 1/3 de Simpson aproxima o valor da integral definida $\int_a^b f(x)dx$ por

$$\frac{h(y_0 + 4y_1 + y_2)}{3}$$

   a. Dado o intervalo $[a, b]$ da integral definida, como obter h, y_0, y_1, y_2?

   b. Dado o intervalo $[a, b]$ da integral definida, como obter h, y_0, y_1, y_2, y_3 e y_4 da regra composta em 2 subintervalos?

   c. Por que a regra calcula de forma exata a integral definida de polinômios de grau até 2?

4. Demonstre a regra 3/8 de Simpson.
5. ▷ Implemente as regras compostas do trapézio, 1/3 de Simpson, 3/8 de Simpson. Utilize-as para integrar a função

$$f(x) = xsen(x)$$

no intervalo $[-5, 5]$.

   a. Calcule o resultado de forma analítica
   b. Seja x o número de intervalos e y a diferença absoluta entre o resultado da regra composta e o resultado obtido de forma analítica:
      a. plote o gráfico $x \times y$, com $x \in [3, 30]$, e compare os 3 métodos
      b. plote o gráfico $x \times y$, com $x \in [30, 60]$, somente para 1/3 de Simpson e 3/8 de Simpson, e compare ambos
   c. plote um gráfico para cada regra composta em 2 subintervalos constando: a função $f(x)$, os polinômios interpoladores e suas respectivas áreas, relativas à integração desses polinômios, hachuradas

6. ▷ É possível obter a distância percorrida por um automóvel do instante de tempo **a** até o instante de tempo **b** calculando-se a integral

$$\int_a^b v(t)dt$$

, onde $v(t)$ é a velocidade em função do tempo. Um automóvel inicia um percurso no instante de tempo 0 com velocidade **v** mantém a aceleração constante, e termina o percurso no instante de tempo **c** com o dobro da velocidade (vide gráfico a seguir). Calcule o instante de tempo, em função do tempo **c** (ou seja, encontre a função $t(c)$), em que o automóvel percorreu **metade** da distância total.

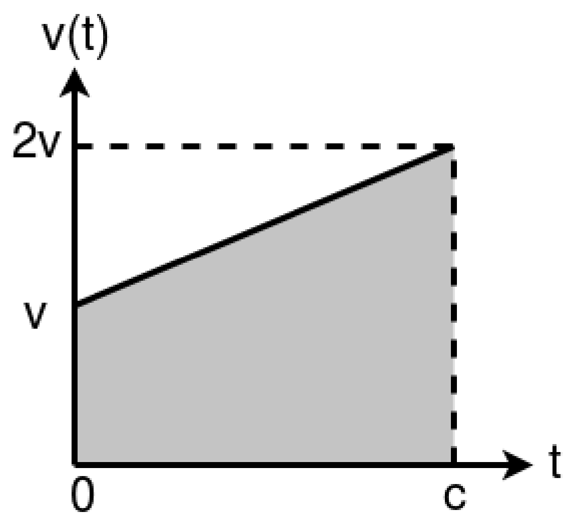


Figure 14: Função v(t), variação da velocidade do automóvel ao longo do tempo

9 Regressão linear/polinomial

1. Marque V para verdadeiro, F para falso

   a. A regressão linear de dois pontos (com abscissas diferentes) é equivalente à interpolação linear
   b. A regressão linear de 100 pontos resulta em um polinômio de grau 99
   c. A regressão linear resulta na mesma função da interpolação linear se todos os pontos forem colineares.
   d. A regressão linear, como foi visto nas aulas, minimiza a distância euclidiana entre os pontos e a reta.
   e. É impossível aplicar regressão polinomial em pontos que se comportam como uma senóide

f. A regressão polinomial usando uma função na forma ax²+bx+c envolve a resolução de um sistema linear 3x3

2. Você está se tornando sócio de uma empresa brasileira de serviços em nuvem que está começando agora no mercado e precisa regularmente investir em novos equipamentos. Grande parte desses equipamentos são importados e, portanto, têm seus preços cotados em dólares. Com as quebras recentes das cadeias produtivas no mundo todo, o repasse de preços se acumularam, fazendo com que a correção dos preços dos equipamentos em real não seja linear. Por exemplo, se o dólar dobrar de valor em relação ao real, pode ser, por exemplo, que o valor do equipamento triplique de valor.

   Com a recente volatilidade do dólar, a empresa precisa fazer uma boa estimativa de custos futuros em função da cotação do dólar. Para construir um modelo que lhe forneça boas estimativas, você coletou dados recentes dos últimos 5 anos que devem refletir a relação entre cotação do dólar e o preço dos equipamentos (precos.txt, disponível no GitHub). As amostras podem ser vistas na Figura 15. Calcule uma função quadrática que represente bem a relação entre cotação do dólar e o preço dos equipamentos. Estime o preço caso o dólar esteja a R$5,50.

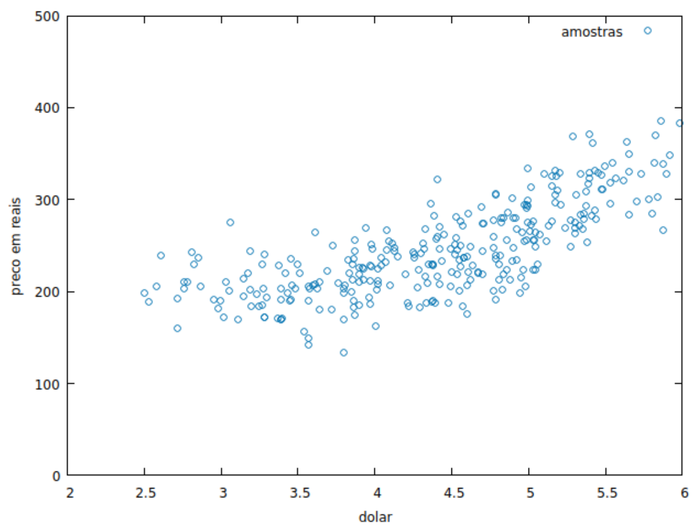


Figure 15: Amostras para o modelo que relaciona cotação do dólar e preço do equipamento

3. ▷ Um levantamento teve como resultado um arquivo (pesos.txt, disponível no GitHub) com altura e peso de adultos de uma determinada região.

   a. Calcule uma função linear que represente bem a relação entre peso e altura.
   b. Plote um gráfico com os pontos e a função obtida.
   c. Estime o peso de uma pessoa com altura $2m10cm$.

4. ▷ Um barco percorre um rio com uma velocidade média, em relação à corrente, aproximadamente constante v_b. A corrente, por sua vez, possui uma velocidade aproximadamente constante de $v_c = 8km/h$. Quando o barco está indo, contra a corrente, o faz com uma velocidade de $v_b - v_c$, sendo $(v_b > v_c)$. Quando o barco está voltando, à favor da corrente, o faz com uma velocidade $v_c + v_b$. Você realizou alguns percursos, anotando a velocidade relativa do barco v_b e o tempo que levou para ir e voltar. Esses dados estão no arquivo barco.txt, disponível no GitHub (cada linha contém uma amostra, sendo o primeiro número a velocidade relativa do barco v_b e, depois, o respectivo tempo).

   a. Calcule uma função não linear que represente bem a relação entre velocidade relativa do barco v_b e tempo de percurso.
   b. Plote um gráfico com os pontos e a função obtida.
   c. Estime o tempo de percurso se o barco estiver a $11km/h$.
   d. Estime o comprimento do rio.

10 Aproximação de funções

10.1 Nota

Algumas questões envolvem sistemas lineares e integração. A seguir explico como utilizar o Wolfram Alpha para obter os valores necessários, mas os mesmos poderiam ser obtidos através dos métodos numéricos vistos. Eu, como professor, utilizei a implementação que tenho de 3/8 de Simpson para resolver parte das integrais e a função np.linalg.solve do numpy para resolver o sistema linear. Fiquem à vontade para escolher os métodos que acharem melhor. O foco deste tópico é a aproximação das funções e não a resolução dos sistemas lineares e integração.

10.1.1 Exemplos de uso do Wolfram Alpha para resolver uma integral e um sistema linear

integrate x*sin(x) from 0 to 5

solve linear equations 41.67x + 156.25y = -2.3772352, 156.25x + 625y= -18.11347301

10.2 Questões

1. Marque V para verdadeiro, F para falso
   a. Duas funções $\phi_0(x)$ e $\phi_1(x)$ são ortogonais entre si em relação a um intervalo [a, b] se $\int_a^b \phi_0(x)\phi_1(x)dx = 1$
   b. É impossível aproximar funções trigonométricas (ex, seno, cosseno) através da combinação linear de polinômios
2. Dado um conjunto de pontos (x_i, y_i) com $i \in 1..n$. Deseja-se realizar uma regressão usando uma função linear na forma $y = ax$, ou seja, uma reta que passa pela origem. Qual a solução dada por mínimos quadrados? Sugestão: expresse o problema na forma de sistema linear e pré-multiplique ambos os lados por A^T conforme visto na aula sobre regressão polinomial.
3. As funções {cos(kx)}, com $k \in 1..n$ são ortogonais entre si no intervalo $[-\pi, pi]$. Supondo que desejamos aproximar uma função f(x) como $\sum_{k=1}^{n} a_k cos(kx)$, qual é o resultado do cálculo dos coeficientes a_k por mínimos quadrados, sabendo que $\int_{-\pi}^{\pi} cos^2(kx)dx = \pi$.
4. Aproxime a função $f(x) = sen(x)$ no intervalo de 0 a 5 utilizando uma combinação linear das funções $\phi_0(x) = x$ e $\phi_1(x) = x^2$.
5. Ortogonalize as funções $\phi_0(x) = 1$, $\phi_1(x) = sen(x)$ e $\phi_2(x) = cos(x)$. Utilize as funções resultantes para aproximar a função $f(x) = x^2$ no intervalo de -1 a 3.
6. ▷ Aproxime a função $f(x) = xcos(x)$ no intervalo de 0 a 4 utilizando uma combinação linear das funções $\phi_0(x) = 1$, $\phi_1(x) = x$ e $\phi_2(x) = x^2$.
7. ▷ Ortogonalize as funções $\phi_0(x) = x$ e $\phi_1(x) = x^2$. Utilize as funções resultantes para aproximar a função $f(x) = x^3 + x^2$ no intervalo de -2 a 3.

11 FFT

1. ▷ Escolha uma das opções a seguir:
   1. Calcular (via implementação ou não) e plotar o polinômio trigonométrico interpolador para uma função de sua escolha (diferentes dos exemplos passados, claro) no intervalo $[-\pi, \pi]$. Deve escolher um m entre 4 e 16.
   2. Assim como na questão anterior, mas calculando os coeficientes via FFT (nesse caso m deve ser potência de 2).

Essa questão vale também 5 pontos na avaliação (considerando 10 pts no total).