Introdução

- Calcule $\sqrt{10}$ usando o método babilônico.

Aqui na resposta irei generalizar para $\sqrt{v} = \bar{x}$. Para tanto, nós teremos, pelo método babilônico, que $(x+e)^2 = v$, onde $x + e = \bar{x}$. Desenvolvendo, temos:

$x_n^2 + 2x_n e + e^2 = v$

$e(2x_n + e) = v - x_n^2$

$e \approx \frac{v - x_n^2}{2x_n} = \frac{v}{2x_n} - \frac{x0}{2}$

$x_{n+1} = \frac{v}{2x_n} + \frac{x_n}{2}$

O seguinte código em Python itera 10 vezes, escrevendo as sucessivas aproximações e seus respectivos erros.

```
import math

v = 10
res = math.sqrt(v)
x = 5

for i in range(10):
    x = x + v/(2*x) - x/2
    print(f'{x}')
    print(f'\tErro absoluto: {abs(res - x)}')
    print(f'\tErro relativo: {abs(res - x)/res}')
```

Representação Numérica

- Um sistema numérico é constituído desses 4 algarismos: 0, $\triangle$ (equivalente a 1), $\times$ (equivalente a 2) e $\square$ (equivalente a 3).

Sistema	Decimal	Hexa
0	0	0
$\triangle$	1	1
$\times$	2	2
$\square$	3	3
$\triangle$ 0	4	4
$\triangle$ $\triangle$	5	5
$\triangle$ $\times$	6	6
$\triangle$ $\square$	7	7
$\times$ 0	8	8
$\times$ $\triangle$	9	9
$\times$ $\times$	10	A
$\times$ $\square$	11	B
$\square$ 0	12	C
$\square$ $\triangle$	13	D
$\square$ $\times$	14	E
$\square$ $\square$	15	F
$\triangle$ 0 0	16	10
$\triangle$ 0 $\triangle$	17	11
$\triangle$ 0 $\times$	18	12
$\triangle$ 0 $\square$	19	13
$\triangle$ $\triangle$ 0	20	14

Sistema	Decimal	Hexa
$\triangle\ \triangle\ \triangle$	21	15
$\triangle\ \triangle\ \times$	22	16
$\triangle\ \triangle\ \square$	23	17
$\triangle\ \times\ 0$	24	18
$\triangle\ \times\ \triangle$	25	19
$\triangle\ \times\ \times$	26	1A
$\triangle\ \times\ \square$	27	1B
$\triangle\ \square\ 0$	28	1C
$\triangle\ \square\ \triangle$	29	1D
$\triangle\ \square\ \times$	30	1E

a. Conforme tabela acima
b. $\times\square$, 11, B
c. $\square\square$, 15, F
d. $\triangle\square$, 7, 7

- Realize as seguintes conversões de base:

1. Casos de uma base maior para uma base menor:
   a. $423_5 \rightarrow x_3$ R: 11012
   b. $521_6 \rightarrow x_2$ R: 11000001
   c. $893_{10} \rightarrow x_2$ R: 1101111101
   d. $75254_8 \rightarrow x_2$ R: 111101010101100
   e. $FFAACC_{16} \rightarrow x_2$ R: 111111111010101011001100
   f. $EA3BA_{16} \rightarrow x_4$ R: 3222032322
   g. $FA3B_{16} \rightarrow x_{10}$ R: 1244
2. Casos de uma base menor para uma base maior:
   a. $21101_3 \rightarrow x_5$ R: 1244
   b. $1101_2 \rightarrow x_7$ R: 16
   c. $110111_2 \rightarrow x_{10}$ R: 55
   d. $101011101_2 \rightarrow x_8$ R: 535
   e. $311032_4 \rightarrow x_{16}$ R: D4E
   f. $8391_{10} \rightarrow x_{16}$ R: 20C7
   g. $11001111100110001_2 \rightarrow x_{16}$ R: 19F31

- Represente os seguintes números em inteiros de 8 bits utilizando (1) sinal-magnitude, (2) complemento de 1 e (3) complemento de 2.

a. 74
   1. Sinal-magnitude: R: 01001010
   2. Complemento de 1: R: 01001010
   3. Complemento de 2: R: 01001010
b. 119
   1. Sinal-magnitude: R: 01110111
   2. Complemento de 1: R: 01110111
   3. Complemento de 2: R: 01110111
c. -15
   1. Sinal-magnitude: R: 10001111
   2. Complemento de 1: R: 11110000
   3. Complemento de 2: R: 11110001
d. -119
   1. Sinal-magnitude: R: 11110111
   2. Complemento de 1: R: 10001000
   3. Complemento de 2: R: 10001001

- Represente os seguintes números de acordo com o padrão IEEE 754 (precisão simples).

  a. 32.625: R: 0 10000100 00000101000000000000000
  b. -182.55: R: 1 10000110 0110110100011001100110(0|1)

Zeros de funções

- Marque V para verdadeiro, F para falso

  a. V Uma desvantagem de usar $|f(x_k)| < \epsilon$ como critério de parada é que a função pode apenas chegar próximo de 0, mas não cruzar o eixo x.
  b. F Dado um intervalo [a, b], se f é contínua, f(a) > 0 e f(b) > 0, então não há raiz real no intervalo [a, b].
  c. F Dado um intervalo [a, b], se f é contínua, f(a) > 0 e f(b) < 0, então há exatamente uma única raiz real no intervalo [a, b].
  d. V O método de Newton terá uma melhor convergência se já estiver próximo da raiz.
  e. F Uma desvantagem do método da secante é ter que calcular analiticamente a derivada da função.
  f. V O método Regula Falsi (falsa posição) sempre mantém um intervalo cujos extremos possuem sinais opostos na função.
  g. F Um ponto fixo p em uma função g(x) é tal que g(p) = 0.
  h. V Se f(x) = x - g(x), então os pontos fixos de g(x) são raízes de f(x)

- Encontre as 3 raízes reais de $f(x) = x^3 + 0.82x^2 - 12.4577x + 4.21686$

  As raízes são: 0.35, 2.935 e -4.105

  A seguir as iterações de cada um dos métodos.

  a. Método da bisseção:

     1. Primeira iteração:
        a. Intervalo: $[a, b] = [-4.3, -4.0]$
        b. A média das abscissas é $m = -4.15$
        c. Como $|f(m)| \geq 0.01$, vamos continuar.
        d. Analisando os sinais temos: $f(a) \approx -6.56$ (negativo), $f(m) \approx -1.43$ (negativo) e $f(b) \approx 3.17$ (positivo)
        e. O novo intervalo $[a, b]$ será o que mantém os sinais da função opostos: $[m, b]$
     2. Segunda iteração:
        a. Intervalo: $[a, b] = [-4.15, -4.0]$
        b. A média das abscissas é $m = -4.075$
        c. Como $|f(m)| \geq 0.01$, vamos continuar.
        d. Analisando os sinais temos: $f(a) \approx -1.43$ (negativo), $f(m) \approx 0.93$ (positivo) e $f(b) \approx 3.17$ (positivo)
        e. O novo intervalo $[a, b]$ será o que mantém os sinais da função opostos: $[a, m]$
     3. Terceira iteração:
        a. Intervalo: $[a, b] = [-4.15, -4.075]$
        b. A média das abscissas é $m = -4.1125$
        c. Como $|f(m)| \geq 0.01$, vamos continuar.
        d. Analisando os sinais temos: $f(a) \approx -1.43$ (negativo), $f(m) \approx -0.23$ (negativo) e $f(b) \approx 0.93$ (positivo)
        e. O novo intervalo $[a, b]$ será o que mantém os sinais da função opostos: $[m, b]$
     4. Quarta iteração:
        a. Intervalo: $[a, b] = [-4.1125, -4.075]$
        b. A média das abscissas é $m = -4.09375$
        c. Como $|f(m)| \geq 0.01$, vamos continuar.
        d. Analisando os sinais temos: $f(a) \approx -0.23$ (negativo), $f(m) \approx 0.35$ (positivo) e $f(b) \approx 0.93$ (positivo)

e. O novo intervalo $[a,b]$ será o que mantém os sinais da função opostos: $[a,m]$

5. Quinta iteração:
   a. Intervalo: $[a,b] = [-4.1125, -4.09375]$
   b. A média das abscissas é $m = -4.103125$
   c. Como $|f(m)| \geq 0.01$, vamos continuar.
   d. Analisando os sinais temos: $f(a) \approx -0.23$ (negativo), $f(m) \approx 0.05$ (positivo) e $f(b) \approx 0.35$ (positivo)
   e. O novo intervalo $[a,b]$ será o que mantém os sinais da função opostos: $[a,m]$
6. Sexta iteração:
   a. Intervalo: $[a,b] = [-4.1125, -4.103125]$
   b. A média das abscissas é $m = -4.1078125$
   c. Como $|f(m)| \geq 0.01$, vamos continuar.
   d. Analisando os sinais temos: $f(a) \approx -0.23$ (negativo), $f(m) \approx -0.08$ (negativo) e $f(b) \approx 0.05$ (positivo)
   e. O novo intervalo $[a,b]$ será o que mantém os sinais da função opostos: $[m,b]$
7. Sétima iteração:
   a. Intervalo: $[a,b] = [-4.1078125, -4.103125]$
   b. A média das abscissas é $m = -4.10546875$
   c. Como $|f(m)| \geq 0.01$, vamos continuar.
   d. Analisando os sinais temos: $f(a) \approx -0.08$ (negativo), $f(m) \approx -0.01$ (negativo) e $f(b) \approx 0.05$ (positivo)
   e. O novo intervalo $[a,b]$ será o que mantém os sinais da função opostos: $[m,b]$
8. Oitava iteração:
   a. Intervalo: $[a,b] = [-4.10546875, -4.103125]$
   b. A média das abscissas é $m = -4.104296875$
   c. Como $|f(m)| \geq 0.01$, vamos continuar.
   d. Analisando os sinais temos: $f(a) \approx -0.01$ (negativo), $f(m) \approx 0.02$ (positivo) e $f(b) \approx 0.05$ (positivo)
   e. O novo intervalo $[a,b]$ será o que mantém os sinais da função opostos: $[a,m]$
9. Nona iteração:
   a. Intervalo: $[a,b] = [-4.10546875, -4.104296875]$
   b. A média das abscissas é $m = -4.1048828125$
   c. Como $|f(m)| < 0.01$, vamos parar o algoritmo e considerar $m = -4.1048828125$ como raiz.

b. Método de Newton

1. Iteração 1:
   a. $x_0 = 1.2$, $f(x_0) \approx -7.82$ e $f'(x_0) \approx -6.17$
   b. Como $|f(x_0)| \geq 0.01$, vamos continuar.
   c. $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0) =$ -0.06806489780702463
2. Iteração 2:
   a. $x_1 = -0.06806489780702463$, $f(x_1) \approx 5.07$ e $f'(x_1) \approx -12.56$
   b. Como $|f(x_1)| \geq 0.01$, vamos continuar.
   c. $x_2 = x_1 - f(x_1)/f'(x_1) = 0.33560717842769233$
3. Iteração 3:
   a. $x_2 = 0.33560717842769233$, $f(x_2) \approx 0.17$ e $f'(x_2) \approx -11.57$
   b. Como $|f(x_2)| \geq 0.01$, vamos continuar.
   c. $x_3 = x_2 - f(x_2)/f'(x_2) = 0.34996616822018756$
4. Iteração 4:
   a. $x_3 = 0.34996616822018756$ e $f(x) \approx 0.0004$
   b. Como $|f(x_3)| < 0.01$, vamos parar o algoritmo e considerar $x_3 = 0.35$ como raiz.

c. Método da Secante

1. Iteração 1:
   a. $x_0 = 2.8$ e $f(x_0) \approx -2.2839$

b. $x_1 = 3.4$ e $f(x_1) \approx 10.64388$
c. $x_2 = x_1 - f(x_1)(x_1 - x_0)/(f(x_1) - f(x_0)) \approx 2.906$
d. $f(x_2) = -0.51976$
e. Como $|f(x_2)| \geq 0.01$, vamos continuar.

2. Iteração 2:
   a. $x_1 = 3.4$ e $f(x_1) \approx 10.64388$
   b. $x_2 = 2.9059996379888893$ e $f(x_2) \approx -0.51976$
   c. $x_3 = x_2 - f(x_2)(x_2 - x_1)/(f(x_2) - f(x_1)) \approx 2.929$
   d. $f(x_3) = -0.10893$
   e. Como $|f(x_3)| \geq 0.01$, vamos continuar.
3. Iteração 3:
   a. $x_2 = 2.9059996379888893$ e $f(x_2) \approx -0.51976$
   b. $x_3 = 2.9289996046398064$ e $f(x_3) \approx -0.10893$
   c. $x_4 = x_3 - f(x_3)(x_3 - x_2)/(f(x_3) - f(x_2)) \approx 2.9351$
   d. $f(x_4) = 0.0017$
   e. Como $|f(x_4)| < 0.01$, vamos parar o algoritmo e considerar $x_4 = 2.935$ como raiz.

d. Regula Falsi

1. Iteração 1:
   a. $x_0 = 0$ e $f(x_0) \approx 4.21686$
   b. $x_1 = 1$ e $f(x_1) \approx -6.42084$
   c. $x_2 = x_1 - f(x_1)(x_1 - x_0)/(f(x_1) - f(x_0)) \approx 0.39641$
   d. $f(x_2) = -0.53032$
   e. Como $|f(x_2)| \geq 0.01$, vamos continuar.
   f. Escolhemos x_0 e x_2 para a próxima iteração, pois $f(x_0)f(x_2) < 0$
2. Iteração 2:
   a. $x_0 = 0$ e $f(x_0) \approx 4.21686$
   b. $x_2 = 0.39640711808003604$ e $f(x_2) \approx -0.53032$
   c. $x_3 = x_2 - f(x_2)(x_2 - x_0)/(f(x_2) - f(x_0)) \approx 0.35212$
   d. $f(x_3) = -0.02446$
   e. Como $|f(x_3)| \geq 0.01$, vamos continuar.
   f. Escolhemos x_0 e x_3 para a próxima iteração, pois $f(x_0)f(x_3) < 0$
3. Iteração 3:
   a. $x_0 = 0$ e $f(x_0) \approx 4.21686$
   b. $x_3 = 0.35212369738020044$ e $f(x_3) \approx -0.02446$
   c. $x_4 = x_3 - f(x_3)(x_3 - x_0)/(f(x_3) - f(x_0)) \approx 0.35009$
   d. $f(x_4) = -0.00108$
   e. Como $|f(x_4)| < 0.01$, vamos parar o algoritmo e considerar $x_4 = 0.35$ como raiz.

e. Regula Falsi (exemplo adicional, com $x_0 = 2.5$ e $x_1 = 3.3$):

1. Iteração 1:
   a. $x_0 = 2.5$ e $f(x_0) \approx -6.17739$
   b. $x_1 = 3.3$ e $f(x_1) \approx 7.97325$
   c. $x_2 = x_1 - f(x_1)(x_1 - x_0)/(f(x_1) - f(x_0)) \approx 2.84924$
   d. $f(x_2) = -1.49068$
   e. Como $|f(x_2)| \geq 0.01$, vamos continuar.
   f. Escolhemos x_2 e x_1 para a próxima iteração, pois $f(x_2)f(x_1) < 0$
2. Iteração 2:
   a. $x_2 = 2.84923593561846$ e $f(x_2) \approx -1.49068$
   b. $x_1 = 3.3$ e $f(x_1) \approx 7.97325$
   c. $x_3 = x_1 - f(x_1)(x_1 - x_2)/(f(x_1) - f(x_2)) \approx 2.92024$
   d. $f(x_3) = -0.26665$
   e. Como $|f(x_3)| \geq 0.01$, vamos continuar.
   f. Escolhemos x_3 e x_1 para a próxima iteração, pois $f(x_3)f(x_1) < 0$

3. Iteração 3:
   a. $x_3 = 2.92023638813417733$ e $f(x_3) \approx -0.26665$
   b. $x_1 = 3.3$ e $f(x_1) \approx 7.97325$
   c. $x_4 = x_1 - f(x_1)(x_1 - x_3)/(f(x_1) - f(x_3)) \approx 2.93253$
   d. $f(x_4) = -0.04504$
   e. Como $|f(x_4)| \geq 0.01$, vamos continuar.
   f. Escolhemos x_4 e x_1 para a próxima iteração, pois $f(x_4)f(x_1) < 0$
4. Iteração 4:
   a. $x_4 = 2.9325260178918064$ e $f(x_4) \approx -0.04504$
   b. $x_1 = 3.3$ e $f(x_1) \approx 7.97325$
   c. $x_5 = x_1 - f(x_1)(x_1 - x_4)/(f(x_1) - f(x_4)) \approx 2.93459$
   d. $f(x_5) = -0.00753$
   e. Como $|f(x_5)| < 0.01$, vamos parar o algoritmo e considerar $x_5 = 2.9346$ como raiz.

Sistemas Lineares

- Marque V para verdadeiro, F para falso

  a. V Um sistema linear com 2 equações e 3 variáveis é subdeterminado
  b. F Um sistema linear com 3 equações e 3 variáveis sempre tem uma única solução
  c. F Um sistema linear com 10 equações e 2 variáveis é sempre impossível
  d. V Dado um sistema linear N x N, o i-ésimo passo da eliminação de Gauss consiste em zerar todos os elementos abaixo do pivô da i-ésima coluna
  e. F No método de Gauss-Jordan, o i-ésimo passo compreende zerar completamente a i-ésima coluna (observação: todos, exceto o elemento da diagonal)
  f. F A troca de duas linhas em A|b pode alterar a solução do sistema linear
  g. F A decomposição LU consiste em decompor uma matriz quadrada A em L, matriz diagonal e uma matriz U, triangular superior, tal que A = LU
  h. V As estratégias de pivotamento diminuem o erro da solução do sistema linear ao escolher como pivô elementos com maior valor em módulo
  i. V Dado o vetor resíduo $r = b - A\bar{x}$ o refinamento consiste em obter um vetor de correção y resolvendo-se $Ay = r$ o qual deve ser somado em $\bar{x}$

- Expresse o seguinte sistema linear na forma de matriz aumentada:

$$\begin{aligned} 3x_0 + 2x_1 + 4x_2 &= 9 \\ -2x_0 + 3x_1 - 2x_2 &= -1 \\ 4x_0 - 3x_1 + 2x_2 &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 9 \\ -2 & 3 & -2 & -1 \\ 4 & -3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

- Resolva o seguinte sistema linear por retrossubstituição:

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$$

- Resolva o seguinte sistema linear por:

a. Eliminação de Gauss
b. Gauss-Jordan

[...]

$$x_1 = 3, x_2 = -1, x_3 = 2$$

- Dada a matriz A: [...] Responda: quais são os multiplicadores do 1º e do 2º passo da eliminação de Gauss?
  - No primeiro passo:
    * $m_2 = -1, m_3 = 2$
  - No segundo passo:
    * $m_3 = -2$
- Calcule a matriz inversa de:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 3 & -4 & -1 \\ -7 & 9 & 3 \end{bmatrix}$$

- Nessa questão você deverá aplicar uma iteração do refinamento para ter uma melhor aproximação da solução do seguinte sistema linear: [...]

  Observação: a resposta final depende da regra de arredondamento utilizada. Segue uma solução possível.

$$\begin{bmatrix} 2.0 & 4.0 & 3.0 & 5.0 \\ 1.0 & 4.0 & -1.0 & 3.0 \\ -2.0 & 3.0 & 1.0 & 2.0 \end{bmatrix}$$

$$m_2 = 0.5, m_3 = -1.0$$

$$\begin{bmatrix} 2.0 & 4.0 & 3.0 & 5.0 \\ 0.0 & 2.0 & -2.5 & 0.5 \\ 0.0 & 7.0 & 4.0 & 7.0 \end{bmatrix}$$

$$m_1 = 2.0, m_3 = 3.5$$

$$\begin{bmatrix} 2.0 & 0.0 & 8.0 & 4.0 \\ 0.0 & 2.0 & -2.5 & 0.5 \\ 0.0 & 0.0 & 12.8 & 5.2 \end{bmatrix}$$

$$m_1 = 0.6, m_2 = -0.2$$

$$\begin{bmatrix} 2.0 & 0.0 & 0.3 & 0.9 \\ 0.0 & 2.0 & 0.1 & 1.5 \\ 0.0 & 0.0 & 12.8 & 5.2 \end{bmatrix}$$

Observe que a matriz dos coeficientes não está diagonal. Isso ocorreu por conta da precisão numérica limitada. Mas assim como iríamos considerar como diagonal utilizando IEEE754, aqui também consideraremos.

$$\bar{x} = [0.5, 0.8, 0.4]^T$$

O vetor resíduo fica:

$$r = [-0.4, -0.3, 0.2]^T$$

$$|r| = 0.5$$

Agora aplicando a primeira iteração do refinamento, teremos:

$$\begin{bmatrix} 2.0 & 4.0 & 3.0 & -0.4 \\ 1.0 & 4.0 & -1.0 & -0.3 \\ -2.0 & 3.0 & 1.0 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$m_2 = 0.5, m_3 = -1.0$$

$$\begin{bmatrix} 2.0 & 4.0 & 3.0 & -0.4 \\ 0.0 & 2.0 & -2.5 & -0.1 \\ 0.0 & 7.0 & 4.0 & -0.2 \end{bmatrix}$$

$$m_1 = 2.0, m_3 = 3.5$$

$$\begin{bmatrix} 2.0 & 0.0 & 8.0 & -0.2 \\ 0.0 & 2.0 & -2.5 & -0.1 \\ 0.0 & 0.0 & 12.8 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$m_1 = 0.6, m_2 = -0.2$$

$$\begin{bmatrix} 2.0 & 0.0 & 0.3 & -0.3 \\ 0.0 & 2.0 & 0.1 & -0.1 \\ 0.0 & 0.0 & 12.8 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$y = [-0.2, -0.1, 0.0]$$

Agora somando y a $\bar{x}$, obtemos:

$$\bar{x} + y = [0.3, 0.7, 0.4]^T$$

O novo vetor resíduo fica:

$$r = [-0.4, -0.3, 0.2]^T$$

$$|r| = 0.5$$

Interpolação

- Marque V para verdadeiro, F para falso

  a. V Se f(x) interpola os pontos $(x_i, y_i) então $f(x_i) = y_i$
  b. F Dado que (x_i, y_i) são amostras da função f(x), se g(x) for uma função interpoladora desses pontos, então f(x) = g(x)
  c. V Se f(x) interpola linearmente os pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1), então $f(\frac{x_0+x_1}{2}) = \frac{y_0+y_1}{2}$
  d. F Por conta da natureza recursiva das diferenças divididas, a interpolação por Newton exige que o número de pontos seja necessariamente potência de 2
  e. V O caso base da diferença dividida é definida como $f[x_i] = f(x_i)$
  f. F Cada permutação do conjunto de pontos gera um polinômio interpolador diferente

- Para cada conjunto de pontos da tabela a seguir: [...]

  - {(1, 4), (3, 2)} R: $P_1(x) = -x + 5$
  - {(-1, 15), (0, 8)} R: $P_1(x) = -7x + 8$
  - {(1, 3), (2, -1), (3, 4)} R:

  $$P_2(x) = \frac{9x^2}{2} - \frac{35x}{2} + 16$$

  - {(1, 3), (2, -1), (3, 4), (4, 2)} R:

  $$P_3(x) = -\frac{8x^3}{3} + \frac{41x^2}{2} - \frac{281x}{6} + 32$$

- É possível interpolar $(3, 5)$ e $(3, 7)$? Justifique.

  Como uma função $y = f(x)$ não, uma vez que há pelo menos dois pontos com a mesma abscissa.

- Um designer precisa obter vários tons de cinza em um programa de computador. [...]

  $$f(k) = 255k$$

- O grau Fahrenheit (ºF) é uma escala de temperatura tal [...]

  $$c(f) = \frac{5f - 160}{9}$$

- Um biólogo precisa realizar vários experimentos em uma cobaia, calculando sua resposta [...]

  $$f(x) = -2x^2 + 8x - 3, f(3.5) = 0.5$$

- Em uma animação dois quadrados possuem mesmo centro, o segundo quadrado [...]

  R: $k \approx 0.32$

- Deseja-se obter o efeito da segunda imagem na Figura [...]

  R:

  $$m(x) = \frac{4x(L - x)}{L^2}$$

Curvas de Bézier

1. Marque V para verdadeiro, F para falso

   a. V As curvas de Bézier são mais indicadas para o design de curvas que as curvas obtidas por interpolação polinomial.
   b. F As curvas de Bézier são ótimas para o design de curvas, mas são variantes a transformações geométricas. São invariantes
   c. V A curva de Bézier com 2 pontos de controle corresponde a um segmento de reta.
   d. F A curva de Bézier com 3 pontos de controle sempre resulta em uma função linear. Somente se os 3 pontos forem colineares
   e. F Há dois resultados possíveis e distintos pelo algoritmo de De Casteljau: um que é obtido pela abordagem top-down e outro obtido pela abordagem bottom-up. Os resultados não são distintos
   f. V Na abordagem bottom-up do algoritmo de De Casteljau, começa-se pelos casos base, que são os pontos de controle.
   g. V A curva de Bézier calculada pelos polinômios de Bernstein envolve o cálculo do binômio de Newton.
   h. V A curva de Bézier é calculada em função de um parâmetro t, tal que, quando t = 0, o ponto resultante é o primeiro ponto de controle e, quanto t = 1, o ponto resultante é o último ponto de controle.
   i. F A curva de Bézier é calculada em função de um parâmetro t, tal que, quando t = 0.5, o ponto resultante é geometricamente o ponto médio entre o primeiro e o último ponto. Pode acontecer, como no caso de apenas dois pontos de controle ou em alguma disposição específica dos pontos, mas essa não é a regra.

2. Dado um conjunto de pontos de controle $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$, é possível obter uma curva paramétrica $(x(t), y(t))$ calculando para cada componente uma interpolação polinomial. Uma outra possibilidade para obter uma curva paramétrica é a curva de Bézier dada por:

$$\beta(t) = \sum_{i=0}^{n} b_{i,n}(t)P_i$$

   onde $b_{i,n}$ é um Polinômio de Bernstein dado por:

$$b_{i,n} = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

   Responda:

   a. Qual a vantagem de utilizar a curva de Bézier em relação à curva obtida por interpolação polinomial? R: na curva de Bézier temos mais controle sobre o design da curva e algumas garantias, como a de que a curva estará contida no fecho convexo dos pontos de controle. A curva a ser obtida já é esperada por quem está desenhando a curva. Já nas curvas obtidas por interpolação polinomial, uma vez que a função deva passar necessariamente pelos pontos de controle, não há nenhuma expectativa quanto à localização dos pontos intermediários.
   b. Qual o intervalo do parâmetro t para o desenho apropriado da curva? [0, 1]
   c. A curva $\beta(t)$ passa necessariamente por dois pontos de controle. Quais e para, respectivamente, qual valor de t? No primeiro ponto para $t = 0$ e no último ponto para $t = 1$.

3. Na Figura [...], dados os pontos de controle P_0, P_1, P_2 e P_3, qual [...]

   R: ponto c

4. Considere os pontos de controle $(1, 4)$, $(1, 1)$, $(3, 1)$ e $(3, 4)$.

   a. Calcule a curva de Bézier para $t \in 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$ usando:

a. Algoritmo de De Casteljau

Nos cálculos a seguir foram utilizadas duas casas decimais.

Para $t = 0.00$:

$$P_0^{(0)} = [1.00\ 4.00]$$

$$P_1^{(0)} = [1.00\ 1.00]$$

$$P_2^{(0)} = [3.00\ 1.00]$$

$$P_3^{(0)} = [3.00\ 4.00]$$

$$P_0^{(1)} = (1 - 0.00)[1.00\ 4.00] + (0.00)[1.00\ 1.00] = [1.00\ 4.00]$$

$$P_1^{(1)} = (1 - 0.00)[1.00\ 1.00] + (0.00)[3.00\ 1.00] = [1.00\ 1.00]$$

$$P_2^{(1)} = (1 - 0.00)[3.00\ 1.00] + (0.00)[3.00\ 4.00] = [3.00\ 1.00]$$

$$P_0^{(2)} = (1 - 0.00)[1.00\ 4.00] + (0.00)[1.00\ 1.00] = [1.00\ 4.00]$$

$$P_1^{(2)} = (1 - 0.00)[1.00\ 1.00] + (0.00)[3.00\ 1.00] = [1.00\ 1.00]$$

$$P_0^{(3)} = (1 - 0.00)[1.00\ 4.00] + (0.00)[1.00\ 1.00] = [1.00\ 4.00]$$

$$\beta(0.00) = P_0^{(3)} = [1.00\ 4.00]$$

Para $t = 0.25$:

$$P_0^{(0)} = [1.00\ 4.00]$$

$$P_1^{(0)} = [1.00\ 1.00]$$

$$P_2^{(0)} = [3.00\ 1.00]$$

$$P_3^{(0)} = [3.00\ 4.00]$$

$$P_0^{(1)} = (1 - 0.25)[1.00\ 4.00] + (0.25)[1.00\ 1.00] = [1.00\ 3.25]$$

$$P_1^{(1)} = (1 - 0.25)[1.00\ 1.00] + (0.25)[3.00\ 1.00] = [1.50\ 1.00]$$

$$P_2^{(1)} = (1 - 0.25)[3.00\ 1.00] + (0.25)[3.00\ 4.00] = [3.00\ 1.75]$$

$$P_0^{(2)} = (1 - 0.25)[1.00\ 3.25] + (0.25)[1.50\ 1.00] = [1.12\ 2.69]$$

$$P_1^{(2)} = (1 - 0.25)[1.50\ 1.00] + (0.25)[3.00\ 1.75] = [1.88\ 1.19]$$

$$P_0^{(3)} = (1 - 0.25)[1.12\ 2.69] + (0.25)[1.88\ 1.19] = [1.31\ 2.31]$$

$$\beta(0.25) = P_0^{(3)} = [1.31\ 2.31]$$

Para $t = 0.50$:

$$P_0^{(0)} = [1.00\ 4.00]$$

$$P_1^{(0)} = [1.00\ 1.00]$$

$$P_2^{(0)} = [3.00\ 1.00]$$

$$P_3^{(0)} = [3.00\ 4.00]$$

$$P_0^{(1)} = (1 - 0.50)[1.00\ 4.00] + (0.50)[1.00\ 1.00] = [1.00\ 2.50]$$

$$P_1^{(1)} = (1 - 0.50)[1.00\ 1.00] + (0.50)[3.00\ 1.00] = [2.00\ 1.00]$$

$$P_2^{(1)} = (1 - 0.50)[3.00\ 1.00] + (0.50)[3.00\ 4.00] = [3.00\ 2.50]$$

$$P_0^{(2)} = (1 - 0.50)[1.00\ 2.50] + (0.50)[2.00\ 1.00] = [1.50\ 1.75]$$

$$P_1^{(2)} = (1 - 0.50)[2.00\ 1.00] + (0.50)[3.00\ 2.50] = [2.50\ 1.75]$$

$$P_0^{(3)} = (1 - 0.50)[1.50\ 1.75] + (0.50)[2.50\ 1.75] = [2.00\ 1.75]$$

$$\beta(0.50) = P_0^{(3)} = [2.00\ 1.75]$$

Para $t = 0.75$:

$$P_0^{(0)} = [1.00\ 4.00]$$

$$P_1^{(0)} = [1.00\ 1.00]$$

$$P_2^{(0)} = [3.00\ 1.00]$$

$$P_3^{(0)} = [3.00\ 4.00]$$

$$P_0^{(1)} = (1 - 0.75)[1.00\ 4.00] + (0.75)[1.00\ 1.00] = [1.00\ 1.75]$$

$$P_1^{(1)} = (1 - 0.75)[1.00\ 1.00] + (0.75)[3.00\ 1.00] = [2.50\ 1.00]$$

$$P_2^{(1)} = (1 - 0.75)[3.00\ 1.00] + (0.75)[3.00\ 4.00] = [3.00\ 3.25]$$

$$P_0^{(2)} = (1 - 0.75)[1.00\ 1.75] + (0.75)[2.50\ 1.00] = [2.12\ 1.19]$$

$$P_1^{(2)} = (1 - 0.75)[2.50\ 1.00] + (0.75)[3.00\ 3.25] = [2.88\ 2.69]$$

$$P_0^{(3)} = (1 - 0.75)[2.12\ 1.19] + (0.75)[2.88\ 2.69] = [2.69\ 2.31]$$

$$\beta(0.75) = P_0^{(3)} = [2.69\ 2.31]$$

Para $t = 1.00$:

$$P_0^{(0)} = [1.00\ 4.00]$$

$$P_1^{(0)} = [1.00\ 1.00]$$

$$P_2^{(0)} = [3.00\ 1.00]$$

$$P_3^{(0)} = [3.00\ 4.00]$$

$$P_0^{(1)} = (1 - 1.00)[1.00\ 4.00] + (1.00)[1.00\ 1.00] = [1.00\ 1.00]$$

$$P_1^{(1)} = (1 - 1.00)[1.00\ 1.00] + (1.00)[3.00\ 1.00] = [3.00\ 1.00]$$

$$P_2^{(1)} = (1 - 1.00)[3.00\ 1.00] + (1.00)[3.00\ 4.00] = [3.00\ 4.00]$$

$$P_0^{(2)} = (1 - 1.00)[1.00\ 1.00] + (1.00)[3.00\ 1.00] = [3.00\ 1.00]$$

$$P_1^{(2)} = (1 - 1.00)[3.00\ 1.00] + (1.00)[3.00\ 4.00] = [3.00\ 4.00]$$

$$P_0^{(3)} = (1 - 1.00)[3.00\ 1.00] + (1.00)[3.00\ 4.00] = [3.00\ 4.00]$$

$$\beta(1.00) = P_0^{(3)} = [3.00\ 4.00]$$

b. Polinômios de Bernstein

Por polinômios de Bernstein em 4 pontos teremos:

$$\beta(t) = \sum_{i=0}^{3} \binom{3}{i} t^i (1-t)^{3-i} P_i$$

Ou seja:

$$\beta(t) = \binom{3}{0} t^0 (1-t)^3 P_0 + \binom{3}{1} t^1 (1-t)^2 P_1 + \binom{3}{2} t^2 (1-t)^1 P_2 + \binom{3}{3} t^3 (1-t)^0 P_3$$

$$\beta(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t) P_2 + t^3 P_3$$

Agora substituindo os valores de t, teremos:

$$\beta(0) = P_0 = [1.00\ 4.00]$$

$$\beta(0.25) = 0.75^3 P_0 + 3 \times 0.25 \times 0.75^2 P_1 + 3 \times 0.25^2 \times 0.75 P_2 + 0.25^3 P_3 = [1.31\ 2.31]$$

$$\beta(0.5) = 0.5^3 P_0 + 3 \times 0.5 \times 0.5^2 P_1 + 3 \times 0.5^2 \times 0.5 P_2 + 0.5^3 P_3 = [2.00\ 1.75]$$

$$\beta(0.75) = 0.25^3 P_0 + 3 \times 0.75 \times 0.25^2 P_1 + 3 \times 0.75^2 \times 0.25 P_2 + 0.75^3 P_3 = [2.69\ 2.31]$$

$$\beta(1) = P_3 = [3.00\ 4.00]$$

b. Apresente um plot ou rascunho com a curva.

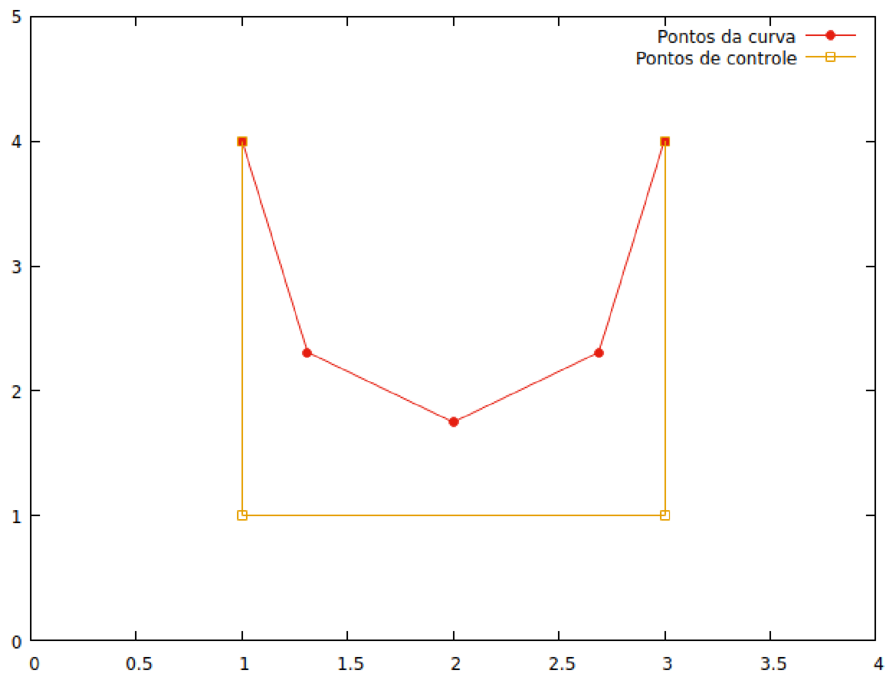

Figure 1: Esboço da curva com os 5 pontos

Integração

1. Marque V para verdadeiro, F para falso

   a. V A diferença entre o resultado da regra do trapézio e a integral definida para um mesmo intervalo em uma função linear é zero.
   b. F A regra 3/8 de Simpson calcula a integral indefinida de funções polinomiais.
   c. V Seja uma função contínua f(x). A regra 1/3 de Simpson aproxima o resultado da integral definida de f(x) de a até b através da integral definida de a até b do polinômio interpolador (a, f(a)), (m, f(m)) e (b, f(b)), onde m = (a+b)/2.
   d. V A regra 1/3 de Simpson calcula de forma exata o resultado da integral definida de uma parábola.
   e. V Dadas as abscissas x_0, x_1, x_2 utilizadas na regra 1/3 de Simpson, pode-se afirmar que $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = h$.

f. F Deseja-se calcular a integral definida de f(x) no intervalo [2, 10] utilizando a regra 1/3 de Simpson composta em 2 subintervalos. Para tal, h = 4.

2. Seja a integral definida

$$\int_0^3 x^2 dx$$

Calcule-a (a) de forma analítica, (b) usando a regra do trapézio (c) usando a regra do trapézio composta em 3 subintervalos. Compare e discorra sobre os resultados.

a.
$$\frac{x^3}{3} de 0 a 3 = \frac{27}{3} = 9$$

b. Pela regra do trapézio temos os pontos:

$$(x_0, y_0) = (0, 0)$$

$$(x_1, y_1) = (0, 9)$$

O h é calculado como a diferença entre x_0 e x_1:

$$h = x_1 - x_0 = 3$$

Agora basta aplicar a regra do trapézio:

$$\int_0^3 x^2 dx \approx \frac{h(y_0 + y_1)}{2} = \frac{3(0+9)}{2} = 13.5$$

c. Para a regra composta em 3 subintervalos, verifiquemos primeiro os subintervalos. Cada subintervalo terá tamanho $\frac{b-a}{m} = \frac{3}{3} = 1$ A regra composta neste caso será dada por:

$$\int_0^3 x^2 dx \approx \frac{h(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + y_3)}{2}$$

Como estamos usando a regra do trapézio, o h é simplesmente o tamanho do subintervalo, ou seja, $h = 1$ Agora precisamos calcular as ordenadas dos pontos que compõem a regra composta através da obtenção das abscissas. Começamos por a e seguimos somando h até chegar em b:

$$x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$$

Logo, substituindo tais abscissas na função, obtemos:

$$y_0 = 0, y_1 = 1, y_2 = 4, y_3 = 9$$

Aplicando tais valores na regra composta, obtemos:

$$\int_0^3 x^2 dx \approx \frac{1(0 + 2 \times 1 + 2 \times 4 + 9)}{2} = 9.5$$

d. Comparando os valores, observamos que a regra composta em 3 subintervalos chegou bem mais próxima do resultado analítico em comparação à regra simples. Isso é esperado uma vez que o conjunto de funções lineares na regra composta tende a se aproximar mais da função original.

3. A regra 1/3 de Simpson aproxima o valor da integral definida $\int_a^b f(x)dx$ por

$$\frac{h(y_0 + 4y_1 + y_2)}{3}$$

a. Dado o intervalo $[a, b]$ da integral definida, como obter h, y_0, y_1, y_2? h é obtido como $\frac{b-a}{2}$
b. Dado o intervalo $[a, b]$ da integral definida, como obter h, y_0, y_1, y_2, y_3 e y_4 da regra composta em 2 subintervalos? h é obtido como $\frac{b-a}{2\times 2}$. Já as ordenadas são obtidas através da aplicação da função em $x_0, x_1, x_2, x_3 e x_4$, respectivamente. Por sua vez, uma forma de obter essas abscissas é partindo-se de a e ir somando h para obter a abscissa seguinte.
c. Por que a regra calcula de forma exata a integral definida de polinômios de grau até 2? A regra 1/3 de Simpson é baseada na integral definida de um polinômio que interpola 3 pontos pertencentes à função. Como a interpolação desses 3 pontos resulta em um polinômio de grau até 2 e só existe um único polinômio de mesmo grau que passa por esses pontos, logo o polinômio interpolador coincide com a função da qual queremos integrar e, portanto, resulta na mesma integral definida.

4. É possível obter a distância percorrida por um automóvel [...]

Queremos encontrar um instante de tempo k tal que:

$$\int_0^k v(t)dt = \int_k^c v(t)dt$$

Vamos denominar o lado esquerdo de A e o lado direto da equação de B. Antes disso, vamos calcular $v(t)$ através da interpolação dos dois pontos conhecidos da função que são: $(0, v)$ e $(c, 2v)$:

$$v(t) = v[t_0] + (t - t_0)v[t_0, t_1]$$

$$v(t) = v + t\frac{v}{c}$$

Aplicando a regra do trapézio em A, obtemos:

$$A = \frac{h(v_0 + v_1)}{2} = \frac{k(v + v + k\frac{v}{c})}{2} = \frac{vk(2c + k)}{2c}$$

Aplicando a regra do trapézio em B, obtemos:

$$B = \frac{h(v_1 + v_2)}{2} = \frac{(c - k)(v + k\frac{v}{c} + 2v)}{2} = \frac{(c - k)(3vc + kv)}{2c}$$

Igualando A = B e multiplicando ambos os lados por 2c, já que é um denominador em ambos, obtemos:

$$vk(2c + k) = (c - k)(3vc + kv)$$

Reordenando os termos chegamos a:

$$2k^2 + 4kc - 3c^2 = 0$$

Por Bhaskara, temos:

$$\Delta = 16c^2 + 24c^2 = 40c^2$$

$$k = \frac{-4c + 2c\sqrt(10)}{4} = \frac{c(\sqrt{10} - 2)}{2}$$

Sendo que neste último passo consideramos apenas a raiz positiva, já que $k > 0$

Regressão linear/polinomial

1. Marque V para verdadeiro, F para falso

    a. V A regressão linear de dois pontos (com abscissas diferentes) é equivalente à interpolação linear
    b. F A regressão linear de 100 pontos resulta em um polinômio de grau 99
    c. V A regressão linear resulta na mesma função da interpolação linear se todos os pontos forem colineares.
    d. F A regressão linear, como foi visto nas aulas, minimiza a distância euclidiana entre os pontos e a reta.
    e. F É impossível aplicar regressão polinomial em pontos que se comportam como uma senóide
    f. V A regressão polinomial usando uma função na forma ax²+bx+c envolve a resolução de um sistema linear 3x3

2. Você está se tornando sócio de uma empresa brasileira [...]

    Como a própria questão sugere ser uma relação quadrática, podemos utilizar regressão com um polinômio de segundo grau para resolver.

    Em R poderia fazer de duas formas:

    - Resolvendo o sistema linear:

    Passo a passo no R:

    1. File, Import Dataset, From Text (base), escolhe o arquivo disponibilizado (supondo que o nome do arquivo é pts)

    2. Preparando a matriz A de coeficientes

    ```
    A = matrix(c(length(pts$V1), sum(pts$V1), sum(pts$V1^2), sum(pts$V1),
        sum(pts$V1^2), sum(pts$V1^3), sum(pts$V1^2), sum(pts$V1^3),
        sum(pts$V1^4)), 3, 3)
    ```

    3. Preparando o vetor b de termos independentes

    ```
    b = matrix(c(sum(pts$V2), sum(pts$V2*pts$V1), sum(pts$V2*pts$V1^2)), 3, 1)
    ```

    4. Resolvendo o sistema linear $Ax = b$:

    ```
    c = solve(A)%*%b
    ```

    5. Plotando:

    ```
    plot(pts)
    curve(c[3]*x*x+c[2]*x+c[1], add=True, lwd=3, col='blue')
    ```

    - Usando as funções do R:

    ```
    c = lm(pts$V2~pts$V1+I(pts$V1^2))$coefficients
    plot(pts)
    curve(c[3]*x*x+c[2]*x+c[1], add=True, lwd=3, col='blue')
    ```

    A matriz de coeficientes e vetor de termos independentes ficam assim para esta questão:

$$A = \begin{bmatrix} 356 & 1582.785 & 7310.07 \\ 1582.785 & 7310.07 & 34885.77 \\ 7310.07 & 34885.772 & 171176.03 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 89224.52 \\ 409949.7 \\ 1952546 \end{bmatrix}$$

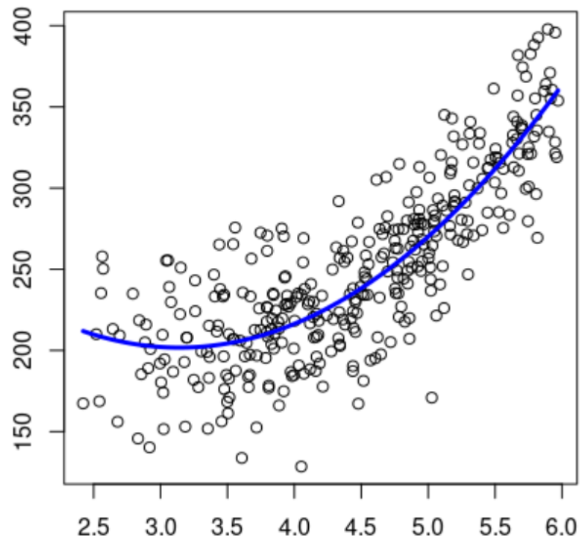

Figure 2: Resultado da regressão

Aproximação de funções

1. Marque V para verdadeiro, F para falso

   a. F Duas funções $\phi_0(x)$ e $\phi_1(x)$ são ortogonais entre si em relação a um intervalo [a, b] se $\int_a^b \phi_0(x)\phi_1(x)dx = 1$

   b. F É impossível aproximar funções trigonométricas (ex, seno, cosseno) através da combinação linear de polinômios

2. Dado um conjunto de pontos (x_i, y_i) com $i \in 1..n$. Deseja-se realizar [. . .]

$$a = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i / \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

3. As funções {cos(kx)}, com $k \in 1..n$ são ortogonais entre si [. . .]

$$a_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(kx)dx/\pi$$

4. Aproxime a função $f(x) = sen(x)$ no intervalo de 0 a 5 utilizando uma combinação linear das funções $\phi_0(x) = x$ e $\phi_1(x) = x^2$.

   Para resolver essa questão utilizaremos o sistema linear visto na aula de aproximação de funções:

$$\begin{bmatrix} \int \phi_0\phi_0 & \int \phi_0\phi_1 & \dots & \int \phi_0\phi_n \\ \int \phi_1\phi_0 & \int \phi_1\phi_1 & \dots & \int \phi_1\phi_n \\ \vdots & & & \vdots \\ \int \phi_n\phi_0 & \int \phi_n\phi_1 & \dots & \int \phi_n\phi_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int f(x)\phi_0 \\ \int f(x)\phi_1 \\ \vdots \\ \int f(x)\phi_n \end{bmatrix}$$

   Para este caso ficamos com:

$$\begin{bmatrix} \int x^2 & \int x^3 \\ \int x^3 & \int x^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int x sen(x) \\ \int x^2 sen(x) \end{bmatrix}$$

com a notação simplificada por:

$$\int_0^5 \phi_i(x)\phi_j(x)dx \rightarrow \int \phi_i\phi_j$$

Substituindo os valores das integrais no sistema linear ficamos com:

$$\begin{bmatrix} 41.67 & 156.25 \\ 156.25 & 625 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.3772352 \\ -18.11347301 \end{bmatrix}$$

cuja solução é: $a_0 = 0.82603509$ e $a_1 = -0.23549033$.

A aproximação torna-se então:

$$f(x) \approx a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x)$$

$$f(x) \approx 0.82603509x - 0.23549033x^2$$

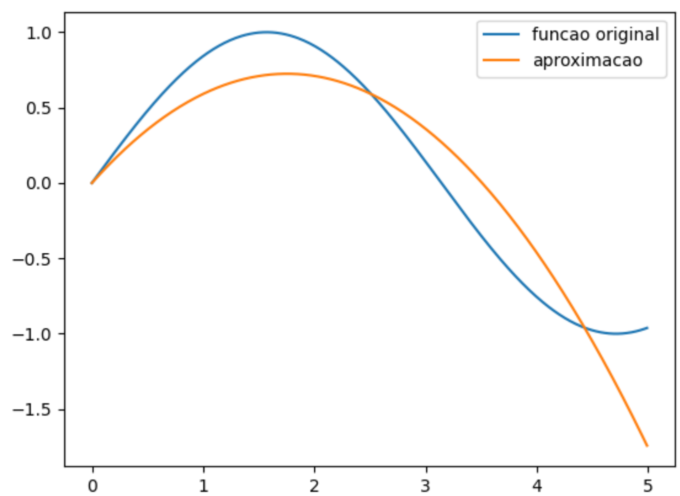

Figure 3: Aproximação da função sen(x) por $0.82603509x - 0.23549033x^2$

5. Ortogonalize as funções $\phi_0(x) = 1$, $\phi_1(x) = sen(x)$ e $\phi_2(x) = cos(x)$. Utilize as funções resultantes para aproximar a função $f(x) = x^2$ no intervalo de -1 a 3.

   Primeiro vamos ortogonalizar as funções no intervalo dado utilizando o processo de Gram-Schmidt:

$$\phi'_k(x) = \phi_k(x) - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{< \phi'_i(x), \phi_k(x) > \phi'_i(x)}{< \phi'_i(x), \phi'_i(x) >}$$

$$\phi'_0(x) = \phi_0(x) = 1$$

$$\phi'_1(x) = sen(x) - (\frac{\int_{-1}^{3} sen(x) \times 1dx}{\int_{-1}^{3} 1^2 dx}) \times 1 = sen(x) - 0.382575$$

$$\phi'_2(x) = cos(x) - (\frac{\int_{-1}^{3} cos(x) \times 1dx}{\int_{-1}^{3} 1^2 dx}) \times 1 - (\frac{\int_{-1}^{3} cos(x)[sen(x) - 0.382575]dx}{\int_{-1}^{3}[sen(x) - 0.382575]^2}) \times (sen(x) - 0.382575)$$

$$= cos(x) + 0.57276 sen(x) - 0.46477$$

Podemos conferir se os cálculos estão corretos integrando qualquer par $\phi'_i(x)\phi'_j(x)$ no intervalo dado e verificando se o resultado é 0 (ou muito próximo por conta da falta de precisão numérica).

Agora que sabemos que as funções são ortogonais, os cálculos dos coeficientes são simplificados para:

$$a_k = \frac{\int_a^b f(x)\phi'_k(x)dx}{\int_a^b [\phi'_k(x)]^2 dx}$$

Substituindo para obter a_0, a_1 e a_2, temos:

$$a_0 = \frac{\int_{-1}^{3} x^2 dx}{\int_{-1}^{3} 1^2 dx} = \frac{7}{3}$$

$$a_1 = \frac{\int_{-1}^{3} x^2(sen(x) - 0.382575)dx}{\int_{-1}^{3}(sen(x) - 0.382575)^2 dx} = 1.57725$$

$$a_2 = \frac{\int_{-1}^{3} x^2(cos(x) + 0.57276 sen(x) - 0.46477)dx}{\int_{-1}^{3}(cos(x) + 0.57276 sen(x) - 0.46477)^2 dx} = -3.90368$$

Você pode argumentar, claro, que o trabalho poupado na resolução do sistema linear foi substituído pelo trabalho de realizar o processo de Gram-Schmidt. De fato foi, mas a vantagem é quando a família de funções já é ortogonal entre si e o processo de Gram-Schmidt não é necessário, como será o caso das funções trigonométricas no estudo da transformada de Fourier (somente a turma de computação verá este tópico, os alunos de outras turmas também estão convidados a assistir).

A aproximação torna-se então:

$$f(x) \approx a_0\phi'_0(x) + a_1\phi'_1(x) + a_2\phi'_2(x)$$

$$f(x) \approx \frac{7}{3} + 1.57725(sen(x) - 0.382575) - 3.90368(cos(x) + 0.57276 sen(x) - 0.46477)$$

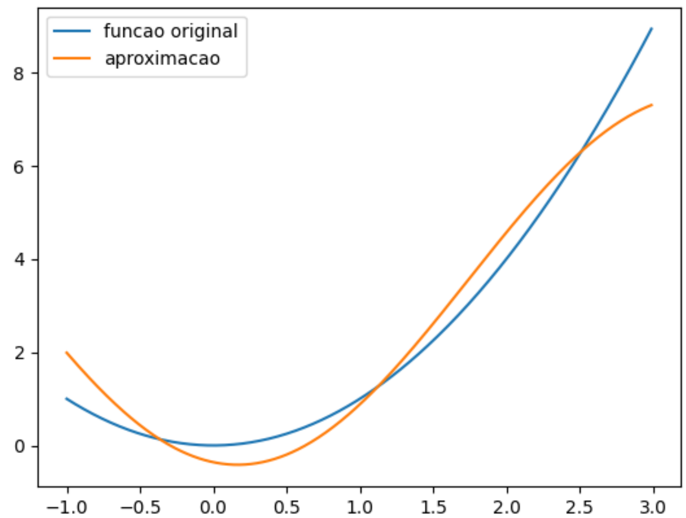

Figure 4: Aproximação da função x^2