DIM0436

9. Lógica

Richard Bonichon

20140819

Outline

Notações

Proposições

- Frases declarativas
- Proposições abstratas $P, Q, R, A, B, \varphi, \Psi, \Phi, \ldots$
- Conjuntos de proposições: $\Gamma, \Delta, \Delta_i, \ldots$

Sintaxe especifica

- $\perp$ é a proposição sempre falsa
- $\top$ é a proposição sempre verdadeira

Sintaxe

Proposição atômica

Literais são o conjunto de letras $\{P, Q, R, A, B, \varphi, \Psi, \Phi, \ldots\}$

Proposições

O conjunto das proposições é o menor conjunto $\mathcal{S}_P$ tal que

1. Se P é um literal $P \in \mathcal{S}_P$
2. Se $P \in \mathcal{S}_P$, $\neg P \in \mathcal{S}_P$
3. Se $P, Q \in \mathcal{S}_P$, $P \diamond Q \in \mathcal{S}_P$, com $\diamond \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$

Subfórmulas

Definição (Subfórmulas imediatas)

O conjunto *IS* de subfórmulas imediatas de uma fórmula é definido como:

$$
\begin{array}{rcl}
IS(A) & = & \emptyset \text{ if } A \text{ atomic} \\
IS(\neg\Phi) & = & \{\Phi\} \\
IS(\Phi \circ \Psi) & = & \{\Phi, \Psi\}
\end{array}
$$

Definição (Subfórmulas)

Seja Φ uma fórmula. O conjunto *Sub* de subfórmulas de Φ é definido como:

$$
\begin{array}{rcl}
Sub(\Phi) & = & \emptyset \text{ se } \Phi \text{ é um literal} \\
Sub(\neg\Phi) & = & \{\Phi\} \cup Sub(\Phi) \\
Sub(\Phi \circ \Psi) & = & \{\Phi, \Psi\} \cup Sub(\Phi) \cup Sub(\Psi)
\end{array}
$$

Primeira semântica

Nome	Símbolo	Semântica informal
Conjuncão	$\wedge$	$P \wedge Q = \top \iff P = \top$ é $Q = \top$
Disjuncão	$\vee$	$P \vee Q = \top \iff P = \top$ ou $Q = \top$
Implicação	$\Rightarrow$ (or $\rightarrow, \supset$)	$P \Rightarrow Q = \top \iff Q = \top$ ou $P = \bot$
Negação	$\neg$	$\neg P = \top \iff P = \bot$

Tabelas de verdade

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$\neg P$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	0

Valoração booleana

Definição

Uma valoração booleana é um mapeamento $v : \mathcal{S}_P \rightarrow \mathbb{B}$:

$$\begin{aligned} v(\bot) &= 0 \\ v(\top) &= 1 \\ v(\neg\Phi) &= \neg v(\Phi) \\ v(\Phi \circ \Psi) &= v(\Phi) \circ v(\Psi) \end{aligned}$$

Valoração enraizada

$\forall f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{B}, \exists v : \mathcal{S}_P \rightarrow \mathbb{B}, \forall A \in \mathcal{A}, f(A) = v(A)$

Unicidade

Seja $\mathcal{S}_{P_\mathcal{A}}$ o conjunto de fórmulas proposicionais gerado por proposições em $\mathcal{A}$
$\forall v_1, v_2 : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{B}, \forall A \in \mathcal{A}\ v_1(A) = v_2(A), \forall \Phi \in \mathcal{S}_{P_\mathcal{A}}\ v_1(\Phi) = v_2(\Phi)$

Exemplo

Seja $v : \mathcal{S}_P \to \mathbb{B}$ tal que

- $v(P) = 1$
- $v(Q) = 0$,
- $v(R) = 0$,
- $\forall A \in \mathcal{A} \setminus \{P, Q, R\}, v(A) = 0$.

Sabemos que existe uma valoração satisfazendo essas condições, e que ela é única.

$$\begin{array}{rcl}
v((P \land \neg Q) \Rightarrow R) & = & v(P \land \neg Q) \Rightarrow v(R) \\
& = & (v(P) \land v(\neg Q)) \Rightarrow v(R) \\
& = & (v(P) \land \neg v(Q)) \Rightarrow v(R) \\
& = & (1 \land \neg 0) \Rightarrow 0 \\
& = & (1 \land 1) \Rightarrow 0 \\
& = & 1 \Rightarrow 0 \\
& = & 0
\end{array}$$

Tautologia e satisfazibilidade

Tautologia

Uma fórmula proposicional Φ é uma tautologia se $v(\Phi) = 1$ para toda valoração booleana v

Satisfazibilidade

Uma fórmula proposicional Φ é satisfazível se $v(\Phi) = 1$ para alguma valoração booleana v

Ler uma regra de dedução

Definição (Sequente)

Um sequente tem a forma geral $\Gamma \vdash \Phi$ onde

- Γ é o conjunto de hipóteses: é uma conjunção de proposição
- Φ é o conjunto de proposições deduzidas a partir das hipóteses: é uma disjunção de proposições.

Definição (Regra de dedução)

- Um conjunto de premissas $P = \cap \mathcal{P}_i$.
- Uma conclusão $\mathcal{C}$
- Significado $\mathcal{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{C}$

Exemplo

$$\frac{\Gamma \vdash \Phi \qquad \Delta \vdash \Psi}{\Gamma, \Delta \vdash \Phi \wedge \Psi} \wedge_I$$

Axioma

$$\Gamma, \Phi \vdash \Phi$$

Conjunção

$$\frac{\Gamma \vdash \Phi \qquad \Delta \vdash \Psi}{\Gamma, \Delta \vdash \Phi \wedge \Psi} \wedge_I$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi} \wedge_{EL}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi} \wedge_{ER}$$

Disjunção

$$\frac{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi \qquad \Delta_1, \Phi \vdash \chi \qquad \Delta_2, \Psi \vdash \chi}{\Gamma, \Delta_1, \Delta_2 \vdash \chi} \vee_E$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi} \vee_{IL}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi} \vee_{IR}$$

Demonstração

Goal

$$(P \wedge Q) \wedge R \vdash P$$

Rule

Proof

Demonstração

Goal

$$(P \land Q) \land R \vdash P$$

Rule

$$\Gamma, \Phi \vdash \Phi$$

Proof

$$(P \land Q) \land R \vdash (P \land Q) \land R$$

Demonstração

Goal

$$(P \wedge Q) \wedge R \vdash P$$

Rule

$$\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi} \wedge_{EL}$$

Proof

$$\frac{(P \wedge Q) \wedge R \vdash (P \wedge Q) \wedge R}{(P \wedge Q) \wedge R \vdash P \wedge Q} \wedge_{EL}$$

Demonstração

Goal

$$(P \wedge Q) \wedge R \vdash P$$

Rule

$$\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi} \wedge_{EL}$$

Proof

$$\cfrac{\cfrac{(P \wedge Q) \wedge R \vdash (P \wedge Q) \wedge R}{(P \wedge Q) \wedge R \vdash P \wedge Q} \wedge_{EL}}{(P \wedge Q) \wedge R \vdash P} \wedge_{EL}$$

Regras adicionais

$$\frac{\Gamma \vdash \Phi \Rightarrow \Psi \qquad \Delta \vdash \Phi}{\Gamma, \Delta \vdash \Psi} \Rightarrow_E$$

$$\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \Rightarrow \Psi} \Rightarrow_I$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \neg\neg\Phi} \neg\neg_I$$

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg\Phi}{\Gamma \vdash \Phi} \neg\neg_E$$

Regras finais

$$\frac{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi \qquad \Delta \vdash \neg\Psi}{\Gamma, \Delta \vdash \Phi}\ \mathrm{Syll}_L$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi \qquad \Delta \vdash \neg\Phi}{\Gamma, \Delta \vdash \Psi}\ \mathrm{Syll}_R$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Phi \Rightarrow \Psi \qquad \Delta \vdash \neg\Psi}{\Gamma, \Delta \vdash \Phi}\ \mathrm{MT}$$

$$\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi \vee \neg\Psi}{\Gamma \vdash \neg\Phi}\ \mathrm{RAA}$$

Outra demonstração

Goal

$$\neg(P \to Q) \vdash \neg Q$$

Rule

Proof

Outra demonstração

Goal

$$\neg(P \to Q) \vdash \neg Q$$

Rule

$$\Gamma, \Phi \vdash \Phi$$

Proof

$$P \vdash P$$

Outra demonstração

Goal

$$\neg(P \to Q) \vdash \neg Q$$

Rule

$$\frac{\Gamma \vdash \Phi \qquad \Delta \vdash \Psi}{\Gamma, \Delta \vdash \Phi \land \Psi} \land_I$$

Proof

$$\frac{P \vdash P \qquad Q \vdash Q}{Q, P \vdash P \land Q}$$

Outra demonstração

Goal

$$\neg(P \to Q) \vdash \neg Q$$

Rule

$$\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi} \wedge_{EL}$$

Proof

$$\dfrac{\dfrac{P \vdash P \qquad Q \vdash Q}{Q, P \vdash P \wedge Q}}{Q, P \vdash Q}$$

Outra demonstração

Goal

$$\neg(P \to Q) \vdash \neg Q$$

Rule

$$\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \Rightarrow \Psi} \Rightarrow_I$$

Proof

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{P \vdash P \qquad Q \vdash Q}{Q, P \vdash P \wedge Q}}{Q, P \vdash Q}}{Q \vdash P \to Q}$$

Outra demonstração

Goal

$$\neg(P \to Q) \vdash \neg Q$$

Rule

$$\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \Rightarrow \Psi} \Rightarrow_I$$

Proof

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{P \vdash P \qquad Q \vdash Q}{Q, P \vdash P \land Q}}{Q, P \vdash Q}}{Q \vdash P \to Q}}{\vdash Q \to (P \to Q)}$$

Outra demonstração

Goal

$$\neg(P \rightarrow Q) \vdash \neg Q$$

Rule

$$\frac{\Gamma \vdash \Phi \Rightarrow \Psi \qquad \Delta \vdash \neg\Psi}{\Gamma, \Delta \vdash \Phi}\ \mathrm{MT}$$

Proof

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P \vdash P \qquad Q \vdash Q}{Q, P \vdash P \wedge Q}}{Q, P \vdash Q}}{Q \vdash P \rightarrow Q}}{\vdash Q \rightarrow (P \rightarrow Q)} \qquad \neg(P \rightarrow Q) \vdash \neg(P \rightarrow Q)}{\neg(P \rightarrow Q) \vdash \neg Q}$$

Exercícios

Mostre que:

1. $(B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow A \Rightarrow C$
2. $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
3. $(A \Rightarrow B \Rightarrow C) \Rightarrow B \Rightarrow A \Rightarrow C$
4. $(A \Rightarrow A \Rightarrow B) \Rightarrow A \Rightarrow B$

Sintaxe adicional

Extensão da sintaxe proposicional

Toda proposição da lógica proposicional é uma fórmula da lógica da primeira ordem.

Ingredientes adicionais

Variáveis $x, y, \ldots$

Quantificadores $\forall$ e $\exists$

Dois mundos

- Termos
- Fórmulas

Símbolos lógicos

Variáveis $\mathcal{V} = \{x, y, z, x_1, \ldots\}$

Conectivos $\{\wedge, \vee, \Rightarrow\}, \neg$

Quantificadores $\forall, \exists$

Parênteses $()$

Símbolo de igualdade $=$

Símbolos não lógicos

Símbolos de função

$$\mathcal{F} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_i$$

$\mathcal{F}_0$ é o conjunto de símbolos constantes

Símbolos de predicados

$$\mathcal{R} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}*} \mathcal{R}_i$$

Uma linguagem de primeira ordem é completamente determinado por $L = \mathcal{F} \cup \mathcal{R}$

Exemplos

Exemplo

\$ $\mathrm{L_d} = \{\ \mathrm{c,\ f,\ g,\ R}\ \}$ \$

- $\mathcal{F}_o = \{c\}$
- \$$\mathrm{F_1} = \{\ \mathrm{f}\ \}$ \$
- $F_2 = \{g\}$
- $R_2 = \{R\}$

Exemplo (Aritmética)

$L_a = \{0, S, +, *, <\}$

- $\mathcal{F}_o = \{0\}$
- \$$\mathrm{F_1} = \{\ \mathrm{S}\ \}$ \$
- $F_2 = \{+, *\}$
- $R_2 = \{<\}$

Termos

Definição (Termos)

O conjunto $\mathcal{T}$ de termos é definido indutivamente:

- $\forall x \in \mathcal{V}, x \in \mathcal{T}$
- $(t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}) \wedge f \in \mathcal{F}_n \Rightarrow f(t_0, \ldots, t_n) \in \mathcal{T}$

Exemplo

- $g(f(c), c), c$ and $ g(g(c, c), f(c))$ são termos válidos de L_d
- $(x + y) * z$, $((x * x) * x + S(0) * x) + S(S(0))$ são termos para L_{ar}

Posição em um termo

Definição

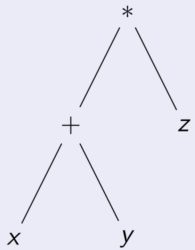
A posição p em um termo t é uma sequência $s \in [1|2]^*$

Posições

$(x + y) * z$

- $pos(*) = \varepsilon$
- $pos(x) = 11$
- $pos(z) = 2$

AST



Subtermos e substituições

Ocorrência & subtermos

- Um termo s é um subtermo de um termo t se existe uma posição p de t tal que $t_{|p} = s$.
- s *ocorre$ na posição p no termo t

Substituição

Uma substituição é um mapeamento $\sigma : \mathcal{V} \to \mathcal{T}$

Substituição

Definição (Notação da substituição)

Seja t um termo, $x_1, \ldots, x_n$ subtermos distintos de t e $u_1, \ldots, u_n$ termos.

$$t_\sigma \hat{=} t[x_1 \mapsto u_1, \ldots, x_n \mapsto u_n]$$

é o resultado da substituição da cada variável x_i de t por u_i. t_s é também um termo.

Exemplo

Seja $t(x, y) = f(g(x), h(a, y))$.

$$t[x \mapsto g(a), y \mapsto h(a, x)] = f(g(g(a)), h(a, h(a, x)))$$

Fórmulas atômicas

Definição (Fórmula atômica)

Seja $t_1, \ldots, t_n$ termos, é $R \in \mathcal{R}_n$

$$R(t_1, \ldots, t_n)$$

é uma fórmula atômica

Exemplo

P é uma fórmula atômica para L_{ar}

$$P \hat{=} (x + y) * z = ((x * x) * x + S(0) * x) + S(S(0))$$

Fórmulas bem formadas

Definição (Fórmulas bem formadas)

O conjunto das fórmulas bem formadas $\mathcal{W}$ é definido indutivamente:

- Se P é uma fórmula atômica $P \in \mathcal{W}$
- $P \in \mathcal{W} \land Q \in \mathcal{W} \Rightarrow \{\neg P, P \land Q, P \lor Q, P \Rightarrow Q\} \subseteq \mathcal{W}$
- $x \in \mathcal{V} \land P \in \mathcal{W} \Rightarrow \{\forall x P, \exists x P\} \subseteq \mathcal{W}$

Exemplo

Seja $L = \{>\}$ onde $> \in \mathcal{R}_2$. As seguintes fórmulas são bem formadas:

- $\forall x \exists y (x > y)$
- $\forall x \forall y \forall z ((x > z) \land (z > y) \Rightarrow (y > x))$

Porque "primeira ordem" ?

- Uma linguagem de primeira ordem permite o uso de quantificadores sobre $\mathcal{V}$
- Uma linguagem de segunda ordem permite o uso de quantificadores sobre $\mathcal{V} \cup \mathcal{R}_1$
- Uma linguagem de ordem superior permite o uso de quantificadores sobre $\mathcal{V} \cup \mathcal{R}$

Exemplo

- $\forall x \exists y \; P(x, y)$ é uma fórmula de primeira ordem
- $\forall x \exists Q \; P(x, Q)$ é uma fórmula de ordem superior

Escopo

- Seja $A \in wff$, $Q \in \{\forall, \exists\}$ uma ocorrência de um quantificador em A
- Seja B uma subfórmula de A tal que B começa com Qx, i.e. $B = QxC$.
- C é o escopo de Qx.

Exemplo

- $P(x,y) \Rightarrow \forall x \ \underbrace{(\exists y \ \underbrace{R(x,y)}_{scope\exists y} \Rightarrow \forall x \ \underbrace{Q(x,y)}_{scope\forall x})}_{scope\forall x}$
- $\exists y \ \underbrace{\forall x \ \underbrace{(\exists y \ \underbrace{R(x,y)}_{scope\ \exists y} \Rightarrow Q(x,y))}_{scope\ \forall x}}_{scope\ \exists y}$

Variáveis livres

Definição (Variáveis livres)

As variáveis livres de $P \in \mathit{wff}$ são definidas indutivamente:

$$
\begin{array}{rcl}
FV(P \circ Q) & = & FV(P) \cup FV(Q) \\
FV(\neg P) & = & FV(P) \\
FV(\Box x\ P) & = & FV(P) \backslash \{x\} \\
FV(P(t_1, \ldots, t_n) & = & \mathbf{var}(t_1) \cup \ldots \cup \mathbf{var}(t_n)
\end{array}
$$

onde

- $\circ \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$;
- $\Box \in \{\forall, \exists\}$;
- $\mathbf{var}(t)$ é o conjunto das variáveis que ocorrem em t.

Variáveis ligadas e livres

Calcular os conjuntos BV e FV para a fórmula

$$\Phi = \forall x\, \exists y\, (R(f(x,y),c)) \Rightarrow \exists z\, Q(y,z)$$

Variáveis ligadas e livres

Calcular os conjuntos BV e FV para a fórmula

$$\Phi = \forall x \; \exists y \; (R(f(x,y),c)) \Rightarrow \exists z \; Q(y,z)$$

Resposta

$$\begin{array}{rcl} FV(\Phi) & = & \{y\} \\ BV(\Phi) & = & \{x,y,z\} \end{array}$$

Substituição (fórmulas)

Definição (Notação)

Seja σ uma substituição, y uma variável. σ_x é definida como:

$$y\sigma_x = \begin{cases} y\sigma \text{ if } y \neq x \\ x \text{ if } y = x \end{cases}$$

Definição (Substituição)

$$\begin{array}{rcl} (A(t_1, \ldots, t_n))\sigma & = & A(t_1\sigma, \ldots, t_n\sigma) \text{ se } A \text{ is atômica} \\ (\neg P)\sigma & = & \neg(P\sigma) \\ (P \circ Q)\sigma & = & P\sigma \circ Q\sigma, \circ \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow\} \\ (\Box x\ P)\sigma & = & \Box x\ (P\sigma_x) \end{array}$$

Modelos

Definição

Seja $L = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathcal{R}_n$. Um modelo $M = (D, [\cdot]_I)$ para L consiste em:

- Um conjunto não vazio D: o domínio
- Um mapeamento $[\cdot]_I : L \to D$, a *interpretação
  - Uma função $[f]_I : M^n \to M$ para toda $f \in \mathcal{F}_n$;
  - Uma relação $[R]_I \subseteq M^m$ para toda $R \in \mathcal{R}_m$;

$$\mathcal{M} = (M, \{[f]_\mathcal{M}\}_{f\in\bigcup n\in\mathbb{N}\mathcal{F}_n}, \{[R]_\mathcal{M}\}_{R\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathcal{R}_n})$$

f^M é a intepretação de f e R^M a interpretação de R em $\mathcal{M}$

Atribuição

Definição

Uma atribuição num modelo $M = (D, [\cdot]_I)$ é um mapeamento $[\cdot]_A : \mathcal{V} \to D$.
A imagem duma variável v numa atribuição é denotada $[\cdot]_A$ by v^A.

Observação

- Uma interpretação dá um significado aos símbolos da linguagem
- Uma atribuição dá um significado às variáveis

Modelos e interpretações

Definição

Seja $M = (D, [\cdot]_I)$ um modelo de L e $[\cdot]_A$ uma atribuição nesse modelo Para todo termo t de L, associamos um valor $[t]_{I,A}$ assim:

$$\begin{array}{rcl} [c]_{I,A} & = & c^I, c \in \mathcal{F}_0 \\ [v]_{I,A} & = & v^A \\ [f(t_1, \ldots, t_n)]_{I,A} & = & f^I([t_1]_{I,A}, \ldots, [t_n]_{I,A}), f \in \mathcal{F}_n \end{array}$$

Exemplo

Seja $L_a = \{0, S, +, *, <\}$.

- $N = \{\mathbb{N}, 0, S, +, *, <\}$ é uma estrutura para L_a. É a estrutura padrão.
- $A = \{A, 0^A, S^A, +^A, *^A, <^A\}$ onde
  - $A = \mathbb{R}$;
  - $[0]_A = \pi$;
  - $[S(a)]_A = e^{[a]_A}$;
  - $[a + b]_A = [a]_A +_{\mathbb{R}} [b]_A$
  - $[a * b]_A = [a]_A *_{\mathbb{R}} [b]_A$
  - $[a < b]_A = \top$ if $ b = cos(a) $

Valor de verdade

Definição

Seja $M = (D, [\cdot]_I)$ um modelo para a linguagem $L(R, F)$, e $[\cdot]_A$ uma atribuição nesse modelo. Para toda fórmula ϕ de $L(R, F)$, associamos um valor de verdade $[\phi]_{I,A}$ ($\top$ ou $\bot$) assim:

$$\begin{array}{rcl}
[P(t_1, \ldots, t_n)]_{I,A} = \top & \iff & ([t_1]_{I,A}, \ldots, [t_m]_{I,A}) \in [P]_I \\
[\neg P]_{I,A} & = & \neg [P]_{I,A} \\
[P \circ Q]_{I,A} & = & [P]_{I,A} \circ [Q]_{I,A} \\
[\forall x\ P]_{I,A} = \top & \iff & [P]_{I,B} = \top \text{ for every assignment } B \text{ in } M \\
[\exists x\ P]_{I,A} = \top & \iff & [P]_{I,B} = \top \text{ for some assignment } B \text{ in } M
\end{array}$$

Validade, satisfazibilidade

* Seja $\phi \in wff$ de $L(F,R)$. ϕ é verdadeira no modelo $\vdash$ para $L(F,R)$ se $[\phi]_{I,A} = \top$ para todas as atribuições A.

Definição (Fórmula válida)

Uma fórmula ϕ é válida se ϕ é verdadeira em todos os modelos da linguagem.

Definição (Conjunto satisfazível)

Um conjunto de fórmulas S é satisfazível em $\vdash$ se existe uma atribuição A tal que $\forall\phi \in S, [\phi]_{I,A} = \top$
S é satisfazível se é satisfazível em algum modelo.

Modelos de Herbrand

- Atribuições são quase substituições
- Atribuições são mapeamentos de variáveis ao domínio D
- Elementos de D podem ser qualquer coisa, inclusive termos da linguagem L

Definição (Modelo de Herbrand)

Um modelo $M = (D, I)$ da linguagem L é um modelo de Herbrand se:

- D é exatamente o conjunto dos termos fechados de L.
- Para todo termo t, $t^I = t$.

Indução

Os vários princípios de indução são representáveis na lógica de primeira ordem como esquema de axiomas.

Definição (Indução simples)

$(P(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N}\ P(n) \Rightarrow P(n+1)) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$

Definição (Indução forte)

$(P(0) \wedge \forall k \in \mathbb{N}, k \leq n\ P(n) \Rightarrow P(n+1)) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$

Definição (Indução estrutural)

Seja S um conjunto, $\preccurlyeq$ uma ordem parcial bem fundada sobre S e $M \subseteq S$ o conjunto de estruturas minimais de S.
$(\forall m \in M, P(m) \wedge \forall k \in S, k \preccurlyeq n\ P(n) \Rightarrow P(Succ(n))) \Rightarrow \forall x \in S, P(x)$

Dedução natural

A dedução natural para a lógica de primeira ordem é uma extensão natural da dedução natural para lógica proposicional.

Regras adicionais para quantificadores

Regra $\forall$

$$\frac{\Gamma \vdash \Phi[x \mapsto a]}{\Gamma \vdash \forall x\ \Phi}\ \forall_I$$

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x\ \Phi}{\Gamma \vdash \Phi[x \mapsto t]}\ \forall_E$$

a é um novo parâmetro. Ele não pode ocorrer em qualquer outra hipótese não descarregada da prova.

Regra $\exists$

$$\frac{\Gamma \vdash \Phi[x \mapsto t]}{\Gamma \vdash \exists x \;\; \Phi} \exists_I$$

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x \; \Phi \qquad \Delta, \Phi[x \mapsto a] \vdash \Psi}{\Gamma, \Delta \vdash \Psi} \exists_E$$

a é um novo parâmetro. Ele não pode ocorrer em qualquer outra hipótese não descarregada da prova.

Uma prova

Goal

$$\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x)), P(c) \vdash Q(x)$$

Rule

Proof

$$\dfrac{\dfrac{\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x)) \vdash \forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x))}{\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x)) \vdash P(c) \Rightarrow Q(c)} \qquad P(c) \vdash P(c)}{\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x)), P(c) \vdash Q(c)}$$

Uma prova

Goal

$$\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x)), P(c) \vdash Q(x)$$

Rule

$$\Gamma, \Phi \vdash \Phi$$

Proof

$$\dfrac{\dfrac{\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x)) \vdash \forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x))}{\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x)) \vdash P(c) \Rightarrow Q(c)} \qquad P(c) \vdash P(c)}{\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x)), P(c) \vdash Q(c)}$$

Uma prova

Goal

$$\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x)), P(c) \vdash Q(x)$$

Rule

$$\Gamma, \Phi \vdash \Phi$$

Proof

$$\dfrac{\dfrac{\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x)) \vdash \forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x))}{\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x)) \vdash P(c) \Rightarrow Q(c)} \qquad P(c) \vdash P(c)}{\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x)), P(c) \vdash Q(c)}$$

Uma prova

Goal

$$\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x)), P(c) \vdash Q(x)$$

Rule

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x\ \Phi}{\Gamma \vdash \Phi[x \mapsto t]}\ \forall_E$$

Proof

$$\dfrac{\dfrac{\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x)) \vdash \forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x))}{\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x)) \vdash P(c) \Rightarrow Q(c)} \qquad P(c) \vdash P(c)}{\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x)), P(c) \vdash Q(c)}$$

Uma prova

Goal

$$\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x)), P(c) \vdash Q(x)$$

Rule

$$\frac{\Gamma \vdash \Phi \Rightarrow \Psi \qquad \Delta \vdash \Phi}{\Gamma, \Delta \vdash \Psi} \Rightarrow_E$$

Proof

$$\cfrac{\cfrac{\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x)) \vdash \forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x))}{\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x)) \vdash P(c) \Rightarrow Q(c)} \qquad P(c) \vdash P(c)}{\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x)), P(c) \vdash Q(c)}$$

Exercícios

Mostre que

1. $\forall x(B \Rightarrow A) \Rightarrow (B \Rightarrow \forall y A[x \mapsto y])$ se $(x \notin FV(B)), y = x$ ou $y \notin FV(A))$
2. $\forall x(B \Rightarrow A) \Rightarrow (\exists y B[x \mapsto y] \Rightarrow A)$ se $(x \notin FV(B)), y = x$ ou $y \notin FV(A))$
3. $\exists x \forall y R(x, y) \Rightarrow \forall y \exists x R(x, y)$
4. $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow (\exists x P(x) \vee \exists x Q(x))$

Resumo

1. Lógica proposicional

2. Lógica da primeira ordem

Referências

Melvin Fitting, *First-order logic and automated theorem proving (2nd ed.)*, Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA, 1996.

A. S. Troelstra and H. Schwichtenberg, *Basic proof theory (2nd ed.)*, Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2000.

Perguntas ?

http://dimap.ufrn.br/~richard/dim0436