

ANÁLISE DINÂMICA DE UMA VIGA DE TIMOSHENKO APOIDA SOBRE BASE ELÁSTICA UTILIZANDO EQUAÇÕES INTEGRAIS

Souza, M. R. A.

Depto de Engenharia Mecânica, LES, UFPB,
BR 230, João Pessoa, PB
marciosouza@ct.ufpb.br

Mendonça, A. V.

Depto de Tecnologia da Construção, LABEME, UFPB,
BR 230, João Pessoa, PB
mendonca@ct.ufpb.br

Resumo: *Em geral, o emprego da teoria de Timoshenko na concepção do modelo de vigas submetidas a carregamentos dinâmicos traz, como consequência, resultados mais consistentes do que os obtidos com o modelo de viga de Euler-Bernoulli. Especialmente quando se trata de elevados valores de frequência de excitação ou menores razões de aspecto na viga. Métodos numéricos como os de elementos finitos e elementos de contorno têm sido utilizados em análises desse tipo. No entanto, a solução de tais problemas por meio de elementos de contorno é muito dependente da disponibilidade ou deduzibilidade das chamadas soluções fundamentais. No presente trabalho, uma aplicação específica da teoria de Timoshenko a uma viga apoiada sobre uma base elástica, representando, nesse contexto, uma fundação ou tipo de amortecimento, exige alterações na equação diferencial governante da deflexão, bem como na solução fundamental do sistema de equações, representado no domínio de Laplace. Dessa forma, os valores desconhecidos dos contornos podem ser determinados (método de elementos de contorno). Em consequência disso, os valores de rotação e deflexão também podem ser obtidos em pontos arbitrários ao longo do vão da viga.*

Palavras-chave: Viga de Timoshenko, Método de elemento de contorno, Base elástica, Domínio de Laplace.

Introdução

O modelo proposto por Timoshenko para vigas é, em determinadas situações, bem mais próximo da realidade do que aquele advindo da teoria de Euler-Bernoulli [11]. Tal “refinamento” se deve a contribuição do efeito do cisalhamento no comportamento desses corpos (deslocamentos e rotações), verificado em vigas sob a ação de carregamentos quaisquer, principalmente nos casos com moderadas razões de aspecto (relação entre o

comprimento da viga e a altura de sua seção transversal).

Outra vantagem do referido modelo se dá em análises dinâmicas, que são essenciais para a determinação das frequências naturais, e faixas de ressonância em projetos de vigas e eixos. Nesse contexto o destaque se dá devido a natureza hiperbólica das equações, em contraponto à característica elíptica da viga de Euler-Bernoulli [7].

A solução das equações constituintes do modelo de Timoshenko é, para casos muito restritos, obtida na literatura especializada por métodos analíticos [1,3,4,13]. Quando esses métodos não atendem às condições impostas pelo problema, faz-se uso de métodos numéricos [9,10,5]. Nesse último, o método de elementos finitos (MEF) é mais frequentemente aplicado.

Nos últimos anos, o método de elementos de contorno (MEC) têm sido uma opção cada vez mais aplicável na solução de problemas de engenharia, sendo então uma alternativa ao uso do já consolidado MEF. Para a viga de Euler-Bernoulli, Providakis e Beskos [2] foram os primeiros a aplicar o MEC em problemas de vibração devido a flexão forçada. Antes [5] desenvolveu, também via MEC, a solução para o problema de flexão estática utilizando o modelo de Timoshenko e, recentemente, para problemas dinâmicos avaliados no domínio de Laplace e da frequência [6].

Diante desse contexto, o presente trabalho se propõe a aplicar o método de elemento de contorno na solução do clássico problema da viga de Timoshenko sobre uma base elástica [8], afim de avaliar a influência da rigidez da fundação no deslocamento, rotação e frequências ressonantes da viga em questão. Para isso, o problema foi avaliado no domínio de Laplace e posteriormente no domínio da frequência para simplificar a dedução das equações fundamentais, necessariamente reformuladas devido à inserção do termo de rigidez nas equações que constituem o modelo de avaliado.

Equações governantes

Quando submetidas a carregamentos estáticos ou dinâmicos, as vigas se deformam devido a deflexão e rotação. No modelo proposto por Euler-Bernoulli a parcela dessa rotação devido ao cisalhamento γ não é considerada, uma vez que uma de suas hipóteses é a perpendicularidade da seção transversal à linha neutra em todos os pontos da viga durante a flexão. A contribuição da rotação devido ao cisalhamento γ é considerada no modelo proposto por Timoshenko [1] na forma:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = -\varphi(x,t) + \gamma(x,t) \quad (1)$$

Assim, substituindo a equação 1 na relação elementar do esforço cortante (equação 3) e considerando a equação 2 para o momento fletor, tem-se:

$$M(x,t) = EI \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x} \quad (2)$$

$$V(x,t) = \kappa GA \gamma = \kappa GA \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \varphi(x,t) \right) \quad (3)$$

Onde EI é a rigidez de flexão da viga, A é a área da seção transversal, G é módulo de elasticidade transversal e κ é o fator de correção de cisalhamento, necessário para converter a distribuição de tensão de cisalhamento ao longo da seção transversal em um valor médio.

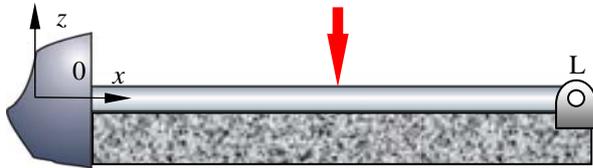


Figura 1: Ilustração da viga sobre base elástica

Considerando o equilíbrio dinâmico na direção z realizado na viga ilustrada na figura 1, tem-se as seguintes equações que regem o problema proposto:

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} + q(x,t) + Ku(x,t) = \rho A \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad (4)$$

$$\frac{\partial M(x,t)}{\partial x} - V(x,t) + m(x,t) = \rho I \frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial t^2} \quad (5)$$

Onde $q(x,t)$ e $m(x,t)$ são, respectivamente, o carregamento e momento fletor dinâmicos distribuídos ao longo da viga. O parâmetro K é a rigidez da base elástica (figura 1).

Substituindo as relações (2) e (3) nas equações que regem o modelo proposto chega-se ao sistema acoplado de equações.

$$\mathbf{B} \begin{bmatrix} u(x,t) \\ \varphi(x,t) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} q(x,t) \\ m(x,t) \end{bmatrix} \quad (6)$$

Onde:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \kappa GA \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} + K & \kappa GA \frac{\partial}{\partial x} \\ -\kappa GA \frac{\partial}{\partial x} & EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \kappa GA - \rho I \frac{\partial^2}{\partial t^2} \end{bmatrix}$$

Tendo em vista a necessidade de suprimir a dependência do tempo nas equações 4 e 5, convém utilizar a técnica da transformada de Laplace com respeito ao tempo. Dessa forma

$$\mathbf{B}_s = \begin{bmatrix} \kappa GA \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \rho A s^2 + K & \kappa GA \frac{\partial}{\partial x} \\ -\kappa GA \frac{\partial}{\partial x} & EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \kappa GA - \rho I s^2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

No presente trabalho a análise dinâmica da viga é desenvolvida também no domínio da frequência, considerando que a excitação é harmônica [6]. Em função disso $s = i\omega$, onde $i = -1$ e ω é a frequência de excitação da viga.

Solução fundamental

Para a teoria de Timoshenko as soluções fundamentais são o deslocamento, a rotação, bem como as reações de uma viga infinita submetida a uma força ou momento pontuais $\hat{q}(x) = \delta(x - \hat{x})$ e $\hat{m}(x) = \delta(x - \hat{x})$, respectivamente, atuando em um ponto qualquer \hat{x} que esteja contido entre os extremos 0 e L (figura 1). No domínio de Laplace o sistema de equações acopladas resulta em

$$\mathbf{B}_s \mathbf{G} = -\mathbf{I} \delta(x - \hat{x}) \quad (8)$$

Onde,

$$\mathbf{B}_s = \begin{bmatrix} D_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - S_1 + K & D_1 \frac{\partial}{\partial x} \\ -D_1 \frac{\partial}{\partial x} & D_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - D_1 - S_2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \hat{u}_q^*(x, \hat{x}) & \hat{u}_m^*(x, \hat{x}) \\ \hat{\varphi}_q^*(x, \hat{x}) & \hat{\varphi}_m^*(x, \hat{x}) \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$-\mathbf{I} \delta(x - \hat{x}) = - \begin{bmatrix} \delta(x - \hat{x}) & 0 \\ 0 & \delta(x - \hat{x}) \end{bmatrix} \quad (11)$$

Para os quais, $D_1 = \kappa GA$, $D_2 = EI$, $S_1 = \rho A s^2$ e $S_2 = \rho I s^2$. As soluções fundamentais são determinadas a partir da relação entre o escalar ψ e a matriz de cofatores, tal qual proposto por Hörmander [12], logo:

$$\mathbf{G} = (\mathbf{B}_s)^{CO} \psi \quad (11)$$

$$\mathbf{B}_s (\mathbf{B}_s)^{-1} = \mathbf{I}, \text{ onde } (\mathbf{B}_s)^{-1} = \frac{(\mathbf{B}_s)^{CO}}{\det(\mathbf{B}_s)} \quad (12)$$

$$\mathbf{B}_s \mathbf{G} = \mathbf{B}_s (\mathbf{B}_s)^{CO} \psi = \det(\mathbf{B}_s) \mathbf{I} \psi = -\mathbf{I} \delta(x - \hat{x}) \quad (13)$$

Dessa forma,

$$\det(\mathbf{B}_s) = \left(D_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - S_1 + K \right) \left(D_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - D_1 - S_2 \right) - \left(D_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(-D_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (14)$$

$$\det(\mathbf{B}_s) = D_1 D_2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} - (D_1 S_2 + S_1 D_2 - D_2 K) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (D_1 S_1 + S_1 S_2 - D_1 K - S_2 K) \quad (15)$$

Fazendo $\lambda = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, e substituindo na equação 15, tem-se como raízes da equação de segundo grau λ_1 e λ_2 :

$$\lambda_{1,2} = \frac{s^2}{2} \left[\left(\frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{c_2^2} - \frac{K}{D_1 s^2} \right) \pm \frac{1}{c_1^2} \sqrt{\Delta} \right] \quad (16)$$

Onde,

$$\Delta = \left(1 + \frac{c_1^2}{c_2^2} - \frac{K c_1^2}{D_1 s^2} \right)^2 - 4 \left[\frac{A c_1^2}{I s^2} + A \frac{c_1^2}{c_2^2} - \frac{K c_1^2}{s^2} \left(\frac{c_1^2}{D_2 s^2} + \frac{1}{D_1} \right) \right] \quad (17)$$

Assim, substituindo na equação 15 as raízes λ_1 e λ_2 , obtidas na equação 16 e seguindo a equação 13, tal qual detalhado em [6], obtem-se, para uma faixa de frequência onde $\omega^2 < \kappa GA/\rho I$, uma expressão para ψ :

$$\psi = \frac{1}{2D_1 D_2 (\lambda_2 - \lambda_1)} \left[\frac{\sin(\sqrt{-\lambda_1} r)}{\sqrt{-\lambda_1}} - \frac{\sinh(\sqrt{\lambda_2} r)}{\sqrt{\lambda_2}} \right] \quad (18)$$

e conseqüentemente determina-se \mathbf{G} pela relação 11, determinando-se por fim as soluções fundamentais do deslocamento e rotação para as duas equações propostas (equações 4 e 5).

$$\hat{u}_q^*(x, \hat{x}) = \frac{1}{2D_1 D_2 (\lambda_2 - \lambda_1)} \left[\frac{\sin(\sqrt{-\lambda_1} r)}{\sqrt{-\lambda_1}} \left(\lambda_1 - \frac{D_1 + S_2}{D_2} \right) - \frac{\sinh(\sqrt{\lambda_2} r)}{\sqrt{\lambda_2}} \left(\lambda_2 - \frac{D_1 + S_2}{D_2} \right) \right] \quad (19)$$

$$\hat{u}_m^*(x, \hat{x}) = \frac{-\text{sgn } r}{2D_2 (\lambda_2 - \lambda_1)} \left[\cos(\sqrt{-\lambda_1} r) - \cosh(\sqrt{\lambda_2} r) \right] \quad (20)$$

$$\hat{\phi}_q^*(x, \hat{x}) = \frac{\text{sgn } r}{2D_2 (\lambda_2 - \lambda_1)} \left[\cos(\sqrt{-\lambda_1} r) - \cosh(\sqrt{\lambda_2} r) \right] \quad (21)$$

$$\hat{\phi}_m^*(x, \hat{x}) = \frac{1}{2D_1 D_2 \sqrt{-\lambda_1} (\lambda_1 - \lambda_2) \sqrt{\lambda_2}} \left[\sqrt{-\lambda_1} (K - S_1 + D_1 \lambda_2) \sinh(\sqrt{\lambda_2} r) - (K - S_1 + D_1 \lambda_1) \sqrt{\lambda_2} \sin(\sqrt{-\lambda_1} r) \right] \quad (22)$$

Utilizando as relações 2 e 3 é possível determinar os momentos e cortantes fundamentais para as duas equações acopladas. Logo:

$$\hat{V}_q^*(x, \hat{x}) = \frac{\text{sgn } r}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} \left[\left(\lambda_1 - \frac{S_2}{D_2} \right) \cos(\sqrt{-\lambda_1} r) - \left(\lambda_2 - \frac{S_2}{D_2} \right) \cosh(\sqrt{\lambda_2} r) \right] \quad (23)$$

$$\hat{V}_m^*(x, \hat{x}) = \frac{1}{2D_2 \sqrt{-\lambda_1} (\lambda_2 - \lambda_1) \sqrt{\lambda_2}} \left[(K - S_1) (\sqrt{-\lambda_1} \sinh(\sqrt{\lambda_2} r) - \sqrt{\lambda_2} \sin(\sqrt{-\lambda_1} r)) \right] \quad (24)$$

$$\hat{M}_q^*(x, \hat{x}) = \frac{-1}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} \left[\sqrt{-\lambda_1} \sin(\sqrt{-\lambda_1} r) + \sqrt{\lambda_2} \sinh(\sqrt{\lambda_2} r) \right] \quad (25)$$

$$\hat{M}_m^*(x, \hat{x}) = \frac{1}{2D_1 \sqrt{-\lambda_1} (\lambda_1 - \lambda_2) \sqrt{\lambda_2}} \left[\sqrt{-\lambda_1} \sqrt{\lambda_2} (K - S_1 + D_1 \lambda_2 \cosh(\sqrt{\lambda_2} r)) - (K - S_1 + D_1 \lambda_1) \sqrt{-\lambda_1} \sqrt{\lambda_2} \cos(\sqrt{-\lambda_1} r) \right] \quad (26)$$

Formulação da equação integral

A equação integral do sistema (6) é obtida multiplicando-se por sua integral o ponderador \mathbf{G} , que é a matriz de soluções fundamentais

$$\int_0^L \left(\mathbf{B}_s \begin{bmatrix} \hat{u}(x) \\ \hat{\phi}(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{q}(x) \\ \hat{m}(x) \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \hat{u}_q^*(x, \hat{x}) & \hat{u}_m^*(x, \hat{x}) \\ \hat{\phi}_q^*(x, \hat{x}) & \hat{\phi}_m^*(x, \hat{x}) \end{bmatrix} dx = 0 \quad (27)$$

Integrando por partes a equação 27 chega-se em:

$$\left[\hat{V}_q^* \hat{u}_q^* - \hat{V}_q^* \hat{u} + \hat{M}_q^* \hat{\phi}_q^* - \hat{M}_q^* \hat{\phi} \right]_{x=0}^{x=L} + \int_0^L \left\{ \left[D_1 \hat{u}_q^* - S_1 \hat{u}_q^* + K \hat{u}_q^* + D_1 \hat{\phi}_q^* \right] \hat{u} + \left[D_2 \hat{\phi}_q^* - (D_1 + S_2) \hat{\phi}_q^* - D_1 \hat{u}_q^* \right] \hat{\phi} \right\} dx = - \int_0^L \left(\hat{q} u_q^* + \hat{m} \phi_q^* \right) dx \quad (28)$$

$$\left[\hat{V}_m^* \hat{u}_m^* - \hat{V}_m^* \hat{u} + \hat{M}_m^* \hat{\phi}_m^* - \hat{M}_m^* \hat{\phi} \right]_{x=0}^{x=L} + \int_0^L \left\{ \left[D_1 \hat{u}_m^* - S_1 \hat{u}_m^* + K \hat{u}_m^* + D_1 \hat{\phi}_m^* \right] \hat{u} + \left[D_2 \hat{\phi}_m^* - (D_1 + S_2) \hat{\phi}_m^* - D_1 \hat{u}_m^* \right] \hat{\phi} \right\} dx = - \int_0^L \left(\hat{q} u_m^* + \hat{m} \phi_m^* \right) dx \quad (29)$$

Utilizando o efeito de filtragem do delta de Dirac ($\delta(x, \hat{x})$) e considerando a relação estabelecida na equação 8, obtém-se a equação integral dos deslocamentos e rotações da viga.

$$\begin{bmatrix} \hat{u}(x) \\ \hat{\phi}(x) \end{bmatrix} = \int_0^L \begin{bmatrix} \hat{u}_q^*(x, \hat{x}) & \hat{\phi}_q^*(x, \hat{x}) \\ \hat{u}_m^*(x, \hat{x}) & \hat{\phi}_m^*(x, \hat{x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{q}(x) \\ \hat{m}(x) \end{bmatrix} dx + \begin{bmatrix} \hat{u}_q^*(x, \hat{x}) & \hat{\phi}_q^*(x, \hat{x}) \\ \hat{u}_m^*(x, \hat{x}) & \hat{\phi}_m^*(x, \hat{x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{V}(x) \\ \hat{M}(x) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{V}_q^*(x, \hat{x}) & \hat{M}_q^*(x, \hat{x}) \\ \hat{V}_m^*(x, \hat{x}) & \hat{M}_m^*(x, \hat{x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}(x) \\ \hat{\phi}(x) \end{bmatrix}_0 \quad (30)$$

Validação do numérica

Para validar a equação integral obtida (equação 30) no modelo da viga sobre base elástica é necessário que se faça uma avaliação do método numérico utilizado. Desse modo, os resultados obtidos fazendo $K = 0$ (sem base elástica) devem ser suficientemente próximos daqueles publicados por Antes *et al.*, 2004 [6] para as mesmas condições simuladas. Na tabela 1 estão elencados os valores das frequências que provocam ressonância para uma excitação harmônica pulsante no ponto médio do vão de uma viga de aço com 1 m de comprimento.

Tabela 1: Valores de frequência de excitação ressonantes para validação de modelo numérico

Valores de frequência ω (Hz)	
Antes <i>et al.</i> , 2004	Souza e Mendonça
352,5	352,53
1076,5	1076,46
1277,2	1277,23
2084,9	2084,56

Resultados obtidos

Tendo em vista os dados contidos na tabela 1, a equação integral desenvolvida neste trabalho resolve, com razoável confiabilidade, o problema proposto em [6] de maneira que a inserção de K na equação integral resulta na equação 30. Na tabela 2 estão disponíveis os dados de entrada do presente caso.

Tabela 2: Dados de entrada do problema proposto

$E = 210 \text{ GPa}$	$h = b = 0,1 \text{ m}$
$G = 80 \text{ GPa}$	$L = 1 \text{ m}$
$\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$	$\kappa = 5/6$
$\hat{q}(L/2) = 1000 \text{ N/m}$	$K = 20,68 \text{ MPa}$

Com a base elástica se espera que os deslocamentos e rotações sejam menores do que aquelas obtidas sem essa rigidez ao longo da viga. Isso pode ser constatado na figura 2, onde os modos de ressonância da viga ilustrada na figura 1 são comparados com e sem o termo correspondente a fundação elástica K .

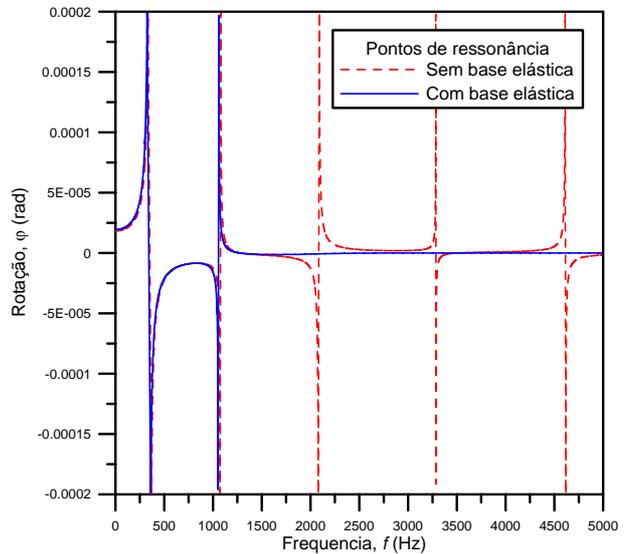


Figura 2: Modos de ressonância para a viga apoiada sobre base elástica e com vão livre (linha vermelha)

Verifica-se na figura 2 que ocorre ressonância na viga sobre a fundação elástica em faixas limitadas de frequência (linha azul) quando se compara com a quantidade dessas faixas verificada na viga sem base elástica (linha vermelha). Nas figuras 3 a 6 constata-se a redução das deflexões e rotações nas vigas apoiadas em base elástica para faixas de frequência distantes dos pontos de ressonância.

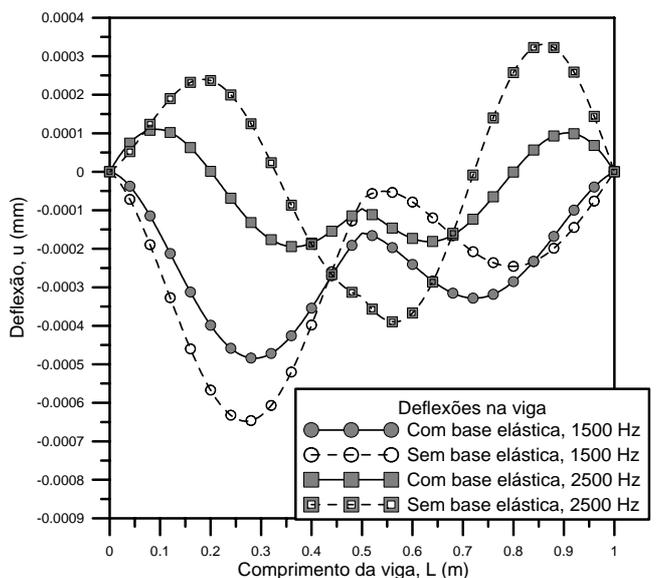


Figura 3: Deflexão de viga para ω de 1500 e 2500 Hz

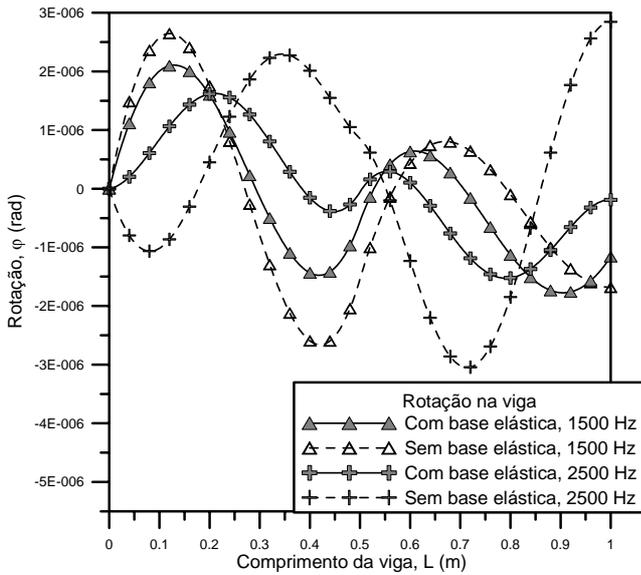


Figura 4: Rotação de viga para ω de 1500 e 2500 Hz

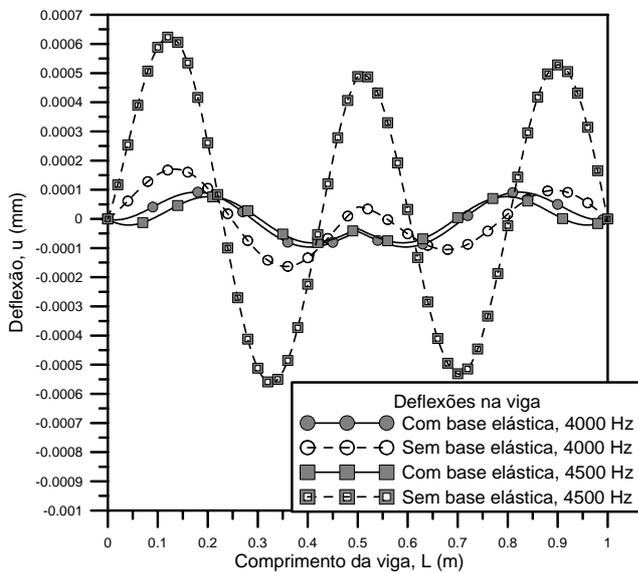


Figura 5: Deflexão de viga para ω de 4000 e 4500 Hz

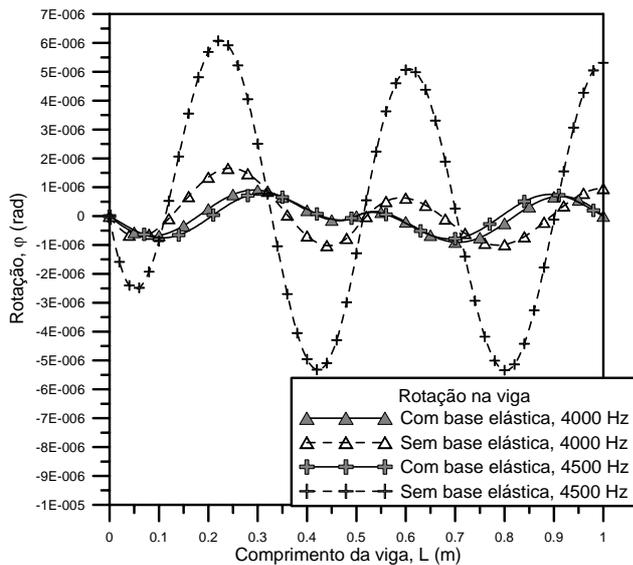


Figura 6: Rotação de viga para ω de 4000 e 4500 Hz

Para valores de frequência próximos dos pontos de ressonância (figuras 7 e 8) se verifica deslocamentos e rotações mais significativos do que os verificados nas figuras 3 a 6. Próximo à ressonância ($\omega = 300$ e 400 Hz) as deflexões da viga sem base elástica são mais moderadas do que aquelas obtidas com base elástica. Tal situação é, a princípio, distante da resposta esperada, uma vez que a rigidez da base elástica amortece as deflexões da viga, se justificando pelo efeito da ressonância, comum aos dois casos para a faixa de frequência avaliada (figura 2).

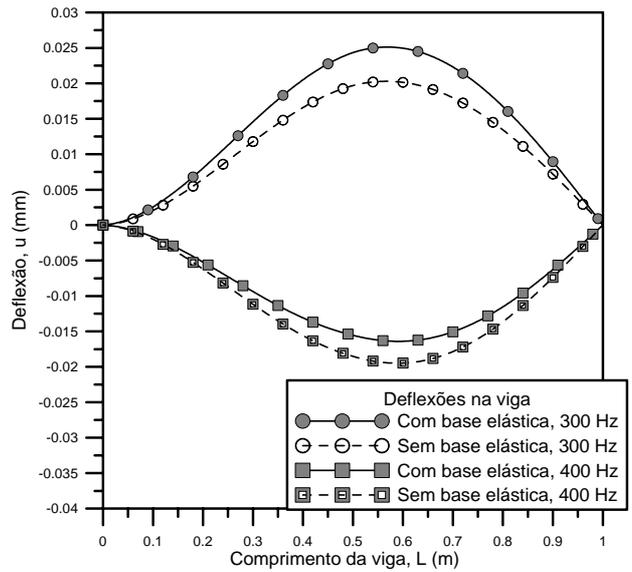


Figura 7: Deflexão de viga para ω de 300 e 400 Hz

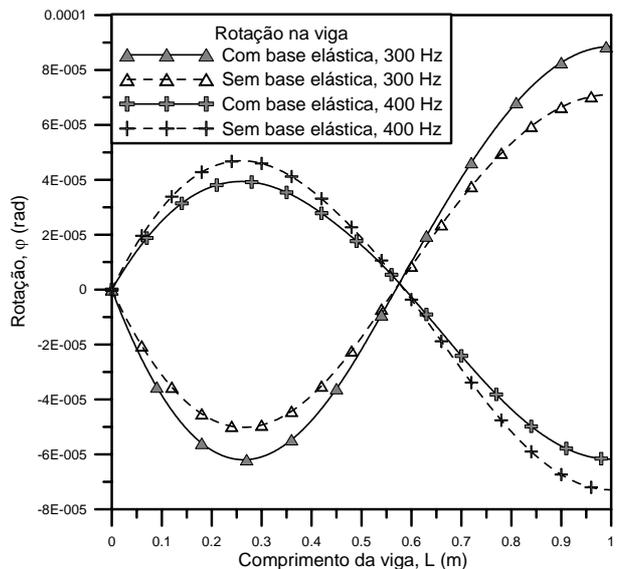


Figura 8: Rotação de viga para ω de 300 e 400 Hz

Conclusão

No que se refere ao modelo da viga aqui idealizado segundo as hipóteses de Timoshenko, verificou-se o já esperado. Isto é, que a inserção do termo referente à

base elástica nas equações que regem seu comportamento tiveram por consequência uma amenização dos deslocamentos e rotações para faixas de frequência suficientemente distantes das excitações causadoras de ressonância. Já para os valores de frequência que provocam ressonância, verifica-se que os deslocamentos da viga sem base elástica é inferior aos da viga amortecida pela fundação.

No que se refere ao método de elementos de contorno, nota-se a contribuição aqui presente na formulação da equação integral com a admissão do termo referente a fundação elástica de maneira a adaptar uma situação, já avaliada numericamente por Antes *et al.*, 2004, ao método dos elementos de contorno.

Referências

- [1] B.A. Ovunc, Dynamics of frameworks by continuous mass method, *Computers and Structures* 4 (1974), 1061–1089
- [2] C.P. Providakis, D.E. Beskos, Dynamic analysis of beams by the boundary element method, *Computers and Structures* 22 (1986), 957–964
- [3] D.E. Beskos, B.A. Boley, Use of dynamic influence coefficients in forced vibration problems with the aid of Laplace transform, *Computers and Structures* 5 (1975), 263–269
- [4] D.E. Beskos, G.V. Narayanan, Dynamic response of frameworks by numerical Laplace transform, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 37 (1983), 289–307
- [5] H. Antes, Fundamental solution and integral equations for Timoshenko beams, *Computers and Structures* 81 (2003), 383–396
- [6] H. Antes, M. Shanz, S. Alvermann, Dynamic analyses of plane frames by integral equations for bars and Timoshenko beams, *Journal of sound and vibration* (2004), 807-836
- [7] J. Prescott, Elastic waves and vibrations of thin rods, *Philosophical Magazine* 33 (1942), 703–754
- [8] Hetenyi, M. Beams of elastic foundations, University of Michigan Press, Ann Arbor, Michigan (1946)
- [9] K.K. Kapur, Vibrations of a Timoshenko beam, using a finite element approach, *Journal of the Acoustical Society of America* 40 (1966) 1058–1063
- [10] R.E. Nickel, G.A. Secor, Convergence of consistently derived Timoshenko beam finite elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 5 (1972) 243–253
- [11] S. Timoshenko, D.Y. Young, *Vibration Problems in Engineering*, 3rd Edition, D. van Nostrand, New York, 1961, pp. 329–331
- [12] L. H.ormander, *Linear Partial Differential Operators*, Springer, Berlin, 1963.