

ANÁLISE VIBRATÓRIA DE PLACAS

Herbert Ricardo Garcia Viana

Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, UFPB,
58039-120, João Pessoa, PB.
herbert.viana@vale.com

Ângelo Vieira Mendonça

Depto de Engenharia Civil, UFPB,
58039-120, João Pessoa, PB.
mendonca@ct.ufpb.br

Resumo: *O foco deste trabalho está direcionado para análise vibratória de placas utilizando-se tanto o elemento finito DST (Discrete Shear Triangle), que leva em conta o efeito da deformação transversa por cortante, quanto o elemento finito DKT (Discrete Kirchhoff Triangle) onde esse efeito é desprezado. Outro aspecto abordado neste trabalho é a aplicação de duas estratégias (linear e pseudoconsistente) para compor funções de forma para os deslocamentos ao longo do domínio do elemento. Exemplos numéricos cobrindo vários aspectos tais como: geometria, condições de contorno e carregamentos, que podem influenciar o desempenho das estruturas matemáticas utilizadas nas formulações desses elementos tanto na análise estática quanto na vibratória, são apresentados. A partir desses estudos, apontam-se potenciais intervalos de relações geométricas e mecânicas em que a negligência dos fenômenos de deformação por cortante e/ou inércia de rotação combinadas com a estratégia de aproximação da função de forma dos deslocamentos transversais no domínio podem comprometer a resposta numérica face ao comportamento físico da placa.*

Palavras-chave: *MEF, Placas, Vibração, DST, DKT.*

Introdução

Uma das áreas de estudo mais importantes da mecânica dos sólidos é sem dúvida a elastodinâmica. A pesquisa nesta área não é recente, existindo registros de investigações já no século XIX, de forma que os principais teoremas e princípios foram estabelecidos basicamente até a primeira metade do século XX, e equações para muitos problemas dinâmicos transientes e permanentes, formuladas tanto no domínio do tempo quanto no domínio transformado, foram disponibilizadas nesse período. Contudo, a obtenção de soluções analíticas para essa classe de equações são extremamente difíceis e restritas a casos particulares de geometria, carregamentos, etc.

Como alternativa, soluções aproximadas foram propostas nesse período, empregando-se técnicas numéricas, que geralmente conduzem a manipulação de um grande número de operações algébricas, o que limitava sensivelmente esta estratégia de solução até então. Só a partir da década de 1960 com a evolução dos computadores, as técnicas numéricas tornaram-se uma ferramenta viável na busca de soluções das equações governantes de muitos problemas.

Dentre essas técnicas tem-se o Método dos Elementos finitos (MEF) e Método dos Elementos de Contorno (MEC). No primeiro caso, o MEF é um método de cálculo a partir da discretização do meio contínuo, de maneira que o sólido é subdividido em um número finito de partes, denominados de “Elementos”, conectados entre si por intermédio de pontos discretos, chamados de “Nós”. Nota-se que a escolha correta do tipo e tamanho dos “Elementos” depende das propriedades do problema em questão, e tem papel preponderante na análise.

Segundo CLOUGH & WILSON [1] a análise estrutural anteriormente a 1952 estava restrita à discretização do contínuo via elementos conectados a dois pontos no espaço. Os problemas de membrana e flexão de placas eram modelados até então explorando analogias de “grelhas” propostas por HRENNIKOFF[2] e McHENRY [3]. Contudo, tais analogias são em geral restritas a geometrias retangulares, de forma que outras técnicas de análise foram propostas para lidar com problemas de geometria mais complexos, sendo que os primeiros passos da versão atual MEF foram publicados principalmente nos últimos cinco anos da década de 1950.

A designação de Método dos Elementos Finitos foi cunhada por CLOUGH [4] em um artigo sobre análise de estados planos de tensão. O trabalho pioneiro do MEF aplicado a problemas de placas foi apresentado por TOCHER [5], contudo, esse elemento finito triangular proposto conduzia a respostas mais flexíveis (maiores) que as soluções analíticas disponíveis para o modelo. Além disso, a convergência para a resposta analítica não era obtida à medida que se enriquecia a

malha. Três anos depois, CLOUGH & TOCHER[6] apresentaram um novo elemento finito triangular em que, dentre outros aspectos, a compatibilidade de rotações e deslocamentos entre os lados de elementos contíguos eram garantidas, a partir de funções de formas propostas por Hsieh, o que levou esse elemento finito a ser denominado de HCT (Hsieh, Clough, Tocher).

Após essas primeiras propostas de elementos de placas, várias outras técnicas e formulações se sucederam nas últimas quatro décadas tanto envolvendo elementos de geometria triangular quanto quadrangulares conforme apontada a literatura [7-14] e outros.

Dentre essas técnicas, as mais importantes contribuições para os elementos triangulares com três nós funcionais posicionados nos vértices são: a) Elemento DKT (Discrete Kirchoff Theory), BATOZ et al. [15]; b) conjunto explícito de funções de formas para componentes covariantes das distorções transversas BATHE & DVORKIN [8]; c) modelo de tensão híbrida PIAN & WANG [16]; d) elemento DST (Discrete Shear Triangle), BATOZ & LARDEUR [17]; e) termos de correção de cisalhamento para as distorções KABIR [11].

Na literatura existem várias técnicas analíticas e aproximadas, incluindo o MEF, para problemas de vibração de placas. Recomenda-se a consulta, pelo menos, ao trabalho de MACKERLE [18] para acesso a referências associadas a diversos assuntos de estruturas laminadas, já que é um estudo de revisão com mais de 350 artigos para vibração de placas e cascas no período de 1994 a 1998.

Representação Matemática da Placa

Para o estabelecimento das equações governantes da placa, é necessária admissão de hipóteses do modelo de comportamento desse componente estrutural. Dentre os diversos modelos para placas, os mais populares são a Teoria Clássica de Placas (TCP) KIRCHHOFF [19] e a Teoria de Placas de Reissner-Mindlin.

Neste trabalho serão utilizados dois elementos finitos para discretização do radiê. O primeiro é conhecido na literatura por DST (Discrete Shear Triangle) proposto originalmente por LARDEUR & BATOZ [17], baseadas no modelo de Reissner-Mindlin e as seguintes hipóteses: a) as rotações das seções variam quadraticamente sobre o domínio do elemento; b) o deslocamento vertical varia cubicamente ao longo dos lados; c) A rotação normal da seção varia linearmente ao longo do lado do elemento; d) material homogêneo, isotrópico e elastolinar; e) campos pequenos de deslocamentos, rotações e deformações.

O DST possui nove graus de liberdade sendo duas rotações e uma translação por nó, vide Fig. 1, e sua

formulação matemática contempla as hipóteses da teoria de flexão de placas de Reissner-Mindlin, de forma que ele tem capacidade de capturar os efeitos de índices de rigidezes relativas (vão/espessura) no comportamento da placa. O segundo elemento de placas a ser utilizado é o bem conhecido DKT (Discrete Kirchoff Triangle), foi originalmente apresentado por Stricklin apud [15], onde a principal hipótese que distingue o DST do DKT, é que no último é imposta de modo discreto (pontual) nos nós funcionais dos vértices e do meio dos lados, a nulidade das distorções ao longo da espessura, conduzindo o elemento à supressão da deformação por cortante.

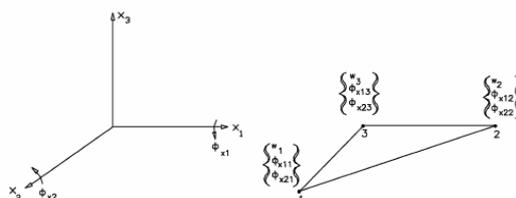


Figura 1: Graus de liberdade finais do DKT e DST.

Segundo LARDEUR & BATOZ [17], o DKT pode ser considerado uma forma degenerada do DST. De fato, VIANA[20], mostra explicitamente as alterações na matriz de rigidez do DST para se obter a forma exata da matriz de rigidez do DKT. Embora a construção da matriz de rigidez dos elementos DKT e DST não requeira a interpolação dos deslocamentos transversais no domínio do elemento, para o cálculo do vetor nodal equivalente e da massa de matriz, tal interpolação é vital. Diversos trabalhos, tais como BATOZ et al. [17] têm assumido uma aproximação linear para os deslocamentos transversais de domínio, o que é inconsistente com a adoção de variação cúbica desses mesmos deslocamentos ao longo dos lados. Para remediar parcialmente esse problema, SYDENSTRICKER et. al.[14] propuseram um modelo chamado de Pseudoconsistente para os elementos DKT e DST, onde os deslocamentos transversais são interpolados por uma função cúbica ao longo do domínio. Além disso, eles apresentaram o vetor nodal equivalente e matriz de massa, gerados implicitamente via integrações numéricas. Já em VIANA[20], os cálculos, que geraram esses vetores a partir do modelo Pseudoconsistente, foram apresentados as formas explícitas (gerados por integração analítica). No presente trabalho, a geração do sistema algébrico do radiê será obtido usando os elementos de finitos de DKT e DST incorporando os modelos Linear e Pseudoconsistente para geração do vetor nodal equivalente e a matriz de massa.

A equação de movimento algébrica do MEF para uma fundação de máquina em regime harmônico, desprezando-se os efeitos viscosos, para um único elemento finito é dada por:

$$\underline{\underline{A}}_e \underline{\underline{U}}_e = \underline{\underline{F}}_e \quad (1)$$

onde $\underline{\underline{U}}_e, \underline{\underline{F}}_e$ são os vetores de deslocamento e forças externas associados aos nós funcionais de um único elemento finito de placas.

Os vetores na Equação (1) são escritos como:

$$\underline{\underline{U}}_e^T = \{W_1 \ \phi_{x1i} \ \phi_{x2i} \ W_2 \ \phi_{x1j} \ \phi_{x2j} \ W_2 \ \phi_{x1k} \ \phi_{x2k}\}$$

$$\underline{\underline{F}}_e^T = \left\{ \begin{matrix} F_1 & M_{x1i} & M_{x2i} & F_2 & M_{x1j} & M_{x2j} \\ F_2 & M_{x1k} & M_{x2k} \end{matrix} \right\}$$

onde $\{W_1 \ \phi_{x1i} \ \phi_{x2i}\}$ são o deslocamento vertical e as duas rotações nas direções (x_1, x_2) no primeiro nó, vide Figura 1; $\{F_1 \ M_{x1i} \ M_{x2i}\}$ são as ações aplicadas no primeiro nó constituídas da força vertical e os dois momentos nas direções (x_1, x_2) .

Já a matriz $\underline{\underline{A}}_e$, Equação (1), é dada por:

$$\underline{\underline{A}}_e = \underline{\underline{K}}_e - \omega^2 \underline{\underline{M}}_e$$

onde ω é a frequência da fonte excitadora; $\underline{\underline{K}}_e, \underline{\underline{M}}_e$ são as matrizes de rigidez e de massa elementar do DKT ou DST, cujas formas explícitas podem ser encontradas em VIANA[20].

Exemplos Numéricos

Neste item são apresentados alguns exemplos numéricos a fim de investigar tanto o desempenho quanto a aplicabilidade da presente formulação. Os exemplos são analisados de forma a se determinar as frequências naturais das placas levando-se em conta os efeitos dos parâmetros mecânicos, geométricos e os modelos linear e pseudoconsistente para concepção da matriz de massa de translação. Convém notar que duas relações vão/espessura para as placas são analisadas em conjunto com utilização de dois tipos preferências de orientação das malhas. Convém que os resultados em marcados com (*) implica em desconsideração da inércia de rotação, (L) modelo linear e (P) modelo pseudoconsistente. Os resultados são mostrados em função de formas adimensionalizadas de frequências circulares incorporando-se a inércia de rotação $f_c = \omega_c a^2 \sqrt{\rho h / D}$ e $f_s = \omega_s a^2 \sqrt{\rho h / D}$ quando esse efeito é ignorado. Nesses casos, (ω_c, ω_s) são as frequências circulares dadas em rad/s; a é o lado da placa; ρ , a densidade; h , a espessura; e, D , o módulo de rigidez da placa. Os valores analíticos

indicados nas tabelas 1, 2, 4 e 5 podem ser encontrados em SOEBEL[21] e em LEISSA [22].

Esses valores analíticos são soluções do autosistema correspondente ao modelo de placas onde são desprezadas a deformação transversal por cortante e a inércia de rotação.

Placa quadrada simplesmente apoiada

Neste exemplo tem-se uma placa quadrada simplesmente apoiada. Nas tabelas 1 e 2 são apresentadas respectivamente algumas frequências naturais adimensionalizadas obtidos com o DKT e DST com e sem a incorporação da rotação por inércia.

A partir dos valores da tabela 1 percebem-se diferenças significativas para os pares de frequências naturais obtidas utilizando-se os modelos linear e pseudoconsistente para formar a matriz de massa da placa simplesmente apoiada.

Tais diferenças tornam-se ainda mais severas para os modos mais altos, sendo que os resultados do modelo pseudoconsistente são mais estáveis.

Examinando-se os valores da tabela 1 pode-se também notar que a discretização mais indicada para as análises depende do valor da frequência a ser calculada. Isto é, quanto maior for a frequência, mais enriquecida deve ser a malha.

No caso do exemplo em discussão, para o primeiro modo, uma malha 6x6 pode ser aceitável. Contudo, pode-se notar uma tendência de convergência para o trigésimo modo só a partir da utilização de uma malha 8x8.

Em muitos trabalhos tais como PETYT[23] sugerem que a discretização recomendada está correlacionada com a razão entre o tamanho do elemento e o comprimento de onda da frequência natural a ser analisada.

Na tabela 2 estão apresentados algumas frequências naturais para a relação vão-espessura $L/h = 80$ desprezando-se a rotação por inércia.

Convém notar que apenas as análises com o modelo pseudoconsistente são apresentadas na tabela 2, já que nos modelos lineares requer a eliminação das linhas e colunas de zeros, que surgem na matriz de massa, quando as contribuições da inércia de rotação são desprezadas. Existem técnicas para lidar com a eliminação de zeros indesejados nas matrizes dos sistemas algébricos, contudo, neste trabalho optou-se por não implementá-las.

A partir da tabela 3 pode-se notar que os erros relativos obtidos pela consideração ou não da inércia de rotação são um pouco mais severos, nos resultados do DKT, principalmente nos modos mais altos, até mesmo para caso de uma rigidez relativa elevada de 80 (conforme indica tabela 3 para o caso estático onde efeito de deformação por cortante tem influência secundária). Já na tabela 3, estão indicados os erros

relativos para o modelo pseudoconsistente quando analisadas pelo DKT e o DST, na malha mais rica, 30x30.

Tabela 1: Frequências adimensionalizadas (f_c).

Modo	L/h=80	Malha 4x4	Malha 6x6	Malha 8x8	Malha 12x12	Malha 30x30
1 (19,74)	DKT(L)	21,25	20,40	20,10	19,90	19,76
	DKT(P)	20,40	20,03	19,90	19,81	19,75
	DST(L)	21,24	20,40	20,10	19,89	19,76
	DST(P)	20,39	20,03	19,89	19,80	19,74
5 (98,67)	DKT(L)	132,49	118,02	109,73	103,57	99,42
	DKT(P)	113,02	107,93	104,22	101,22	99,05
	DST(L)	132,18	117,77	109,51	103,37	99,22
	DST(P)	112,87	107,75	104,04	101,04	98,86
10 (167,78)	DKT(L)	405,40	222,02	201,04	182,64	169,96
	DKT(P)	281,94	192,33	184,14	175,49	168,90
	DST(L)	405,28	221,13	200,41	182,01	169,38
	DST(P)	282,05	192,01	183,39	174,95	168,33
30 (444,13)	DKT(L)	807,5,24	641,5,14	584,13	541,01	457,90
	DKT(P)	646,03	654,33	497,47	483,06	450,21
	DST(L)	8068,34	6412,15	579,08	536,33	454,00
	DST(P)	647,82	654,75	495,06	479,91	446,51
50 (720,48)	DKT(L)	---	8596,87	7782,54	934,79	758,24
	DKT(P)	---	1037,04	1094,56	810,23	738,06
	DST(L)	---	8511,33	7784,23	921,61	747,40
	DST(P)	---	1038,14	1097,28	801,83	728,08
100 (1431,09)	DKT(L)	---	---	11713,47	1737,51	1547,13
	DKT(P)	---	---	1903,70	1448,59	1477,78
	DST(L)	---	---	11610,00	1699,16	1508,18
	DST(P)	---	---	1912,08	1432,65	1444,61

Tabela 2: Frequências adimensionalizadas (f_s).

Modo	L/h=80	Malha 4x4	Malha 6x6	Malha 8x8	Malha 12x12	Malha 30x30
1 (19,74)	DKT(P)*	20,40	20,03	19,91	19,81	19,75
	DST(P)*	20,39	20,03	19,90	19,80	19,74
5 (98,67)	DKT(P)*	113,10	108,01	104,30	101,28	99,11
	DST(P)*	112,94	107,82	104,11	101,10	98,92
10 (167,78)	DKT(P)*	282,37	192,76	184,36	175,69	169,08
	DST(P)*	282,49	192,24	183,81	175,14	168,51
30 (444,13)	DKT(P)*	650,30	657,05	499,02	484,60	451,53
	DST(P)*	652,12	657,46	496,56	481,38	447,78
50 (720,48)	DKT(P)*	---	1045,02	1100,51	814,32	741,62
	DST(P)*	---	1046,17	1103,12	805,64	731,37
100 (1431,09)	DKT(P)*	---	---	1924,92	1459,39	1491,91
	DST(P)*	---	---	1932,94	1442,25	1456,90

Tabela 3: Diferenças relativas (inércia rotatória)

Modo	Elemento	f_s	f_c	$E\% = 100 * f_c - f_s / f_s$
1	DKT	19,75	19,75	0,00
	DST	19,74	19,74	0,00
5	DKT	99,11	99,05	-0,06
	DST	98,92	98,86	-0,06
10	DKT	169,08	168,90	-0,11
	DST	168,51	168,33	-0,11
30	DKT	451,53	450,21	-0,29
	DST	447,78	446,51	-0,28
50	DKT	741,62	738,06	-0,48
	DST	731,37	728,08	-0,45
100	DKT	1491,91	1477,78	-0,95
	DST	1456,90	1444,61	-0,84

Placa quadrada engastada-apoiada

Neste exemplo tem-se intenção de estudar tanto os efeitos da deformação por cortante combinado com ou sem os da inércia de rotação. Para tanto, tomou-se uma relação menor que o exercício anterior, atribuindo-se $L/h=50$. Na tabelas 4 e 5 são apresentadas respectivamente algumas frequências naturais adimensionalizadas obtidos com o DKT e DST sem e com a incorporação da rotação por inércia.

Tabela 4: Frequências adimensionalizadas (f_s).

Modo	L/h=50	Malha 4x4	Malha 6x6	Malha 8x8	Malha 12x12	Malha 30x30
1 (28,9)	DKT(P)*	29,34	20,03	29,08	29,01	28,96
	DST(P)*	29,27	20,02	29,01	28,93	28,87
5 (102,2)	DKT(P)*	117,23	108,01	107,67	104,69	102,61
	DST(P)*	116,79	107,54	107,14	104,13	101,98
10 (199,9)	DKT(P)*	289,87	192,76	205,78	203,87	200,69
	DST(P)*	290,08	191,42	203,92	201,69	198,05
30 (498,4)	DKT(P)*	807,94	657,05	525,17	536,58	506,56
	DST(P)*	816,43	657,90	518,06	523,13	490,66
50	DKT(P)*	---	1045,02	1107,69	839,00	777,26
	DST(P)*	---	1047,48	1112,82	809,19	747,25
100	DKT(P)*	---	---	2123,99	1484,88	1530,98
	DST(P)*	---	---	2138,86	1435,13	1420,80

Tabela 5: Frequências adimensionalizadas (f_c).

Modo	L/h=50	Malha 4x4	Malha 6x6	Malha 8x8	Malha 12x12	Malha 30x30
1 (28,9)	DKT(L)	30,52	29,73	29,39	29,14	28,97
	DKT(P)	29,33	20,03	29,08	29,00	28,94
	DST(L)	30,44	29,65	29,32	29,07	28,88
	DST(P)	29,26	20,01	29,00	28,92	28,86
5 (102,2)	DKT(L)	138,08	122,33	113,45	107,02	102,82
	DKT(P)	117,02	107,81	107,49	104,51	102,44
	DST(L)	137,25	121,62	112,81	106,42	102,20
	DST(P)	116,59	107,34	106,95	103,96	101,81
10 (199,9)	DKT(L)	2.537,08	227,39	219,89	210,48	201,39
	DKT(P)	288,74	192,17	205,16	203,24	200,07
	DST(L)	2.538,29	225,23	217,57	208,09	198,73
	DST(P)	288,96	190,84	203,33	201,09	197,47
30 (498,4)	DKT(L)	7073,40	4010,81	600,16	576,77	511,23
	DKT(P)	787,88	650,14	521,69	532,30	502,45
	DST(L)	7113,98	4012,23	586,37	562,79	495,15
	DST(P)	795,60	651,08	514,97	519,40	487,30
50	DKT(L)	---	5373,52	4865,16	947,06	789,89
	DKT(P)	---	1024,86	1092,71	828,94	767,55
	DST(L)	---	5397,23	4866,84	912,12	758,95
	DST(P)	---	1026,99	1098,48	801,09	739,30
100	DKT(L)	---	---	7586,45	1732,91	1572,66
	DKT(P)	---	---	2054,15	1457,72	1494,90
	DST(L)*	---	---	7271,09	1639,67	1459,78
	DST(P)	---	---	2069,51	1414,95	1394,99

Convém ressaltar novamente que os valores analíticos das tabelas 4 e 5 são as soluções para teoria vibração de placas onde os efeitos de deformação por cortante e inércia de rotação são desprezados.

Além disso, apenas os modos 1, 2, 5, 10 e 30 estão explicitamente mostrados em LEISSA [22]. Os resultados da tabela 4 e 5 conduzem a comportamento similar ao exemplo da placa simplesmente apoiada, contudo, as diferenças entre o DKT e o DST tornam mais evidentes devido a atuação mais efetiva da deformação por cortante, já que a rigidez relativa foi reduzida de 80 para 50.

Na tabela 6, consta os erros referentes a diferença entre o modelo considera a rotação por inércia, e o modelo não considerando, tendo a configuração da malha 30x30.

A partir da tabela 3 e 6 pode-se notar comportamento similar ao da placa simplesmente apoiada, mesmo que tenha sido reduzida a relação h/L de 80 para 50. Os maiores erros relativos obtidos pela consideração ou não da inércia de rotação são um pouco mais severos, nos resultados do DST.

Tabela 3: Diferenças relativas

Modo	Elemento	f_s	f_c	$E(\%) = 100 * (f_c - f_s) / f_s$
1	DKT	28,96	28,94	-0,07
	DST	28,87	28,86	-0,03
5	DKT	102,61	102,44	-0,17
	DST	101,98	101,81	-0,17
10	DKT	200,69	200,07	-0,31
	DST	198,05	197,47	-0,29
30	DKT	506,56	502,45	-0,81
	DST	490,66	487,30	-0,68
50	DKT	777,26	767,55	-1,25
	DST	747,25	739,30	-1,06
100	DKT	1530,98	1494,91	-2,36
	DST	1420,80	1394,99	-1,82

Conclusões

Neste trabalho foi apresentado um estudo para análise vibratória de placas, utilizando-se os elementos finitos DKT e DST que foram formulados nas décadas de 1970 e 1980, respectivamente desprezando-se ou incorporando-se os efeitos de deformação por cortante nas suas estruturas matemáticas. Exemplos numéricos cobrindo vários aspectos tais como: espessura, condições de contorno e carregamentos foram analisados. Os resultados sugerem que:

a) As frequências associadas a modos mais baixos podem ser aceitavelmente analisadas com malhas mais pobres, no entanto, as frequências dos modos superiores requerem necessariamente discretizações mais enriquecidas;

b) O efeito da deformação por cortante pode tornar-se mais crítica nas rigidezes relativas mais baixas, contudo podem não ser os mesmos limites dados no caso estático;

c) O efeito da rotação de inércia torna-se mais importante nos casos de frequências associadas aos modos superiores;

d) O modelo pseudoconsistente mostra-se ser mais robusto e mais estável para formação da matriz de massa que o linear. Além disso, diferentemente do caso estático, existiram diferenças de respostas em ambos os modelos indiferentemente do tipo de vinculação utilizado.

Alguns trabalhos podem ser direcionados a partir do estudo feito neste artigo e em VIANA[20], como por exemplo, a análise de fundações de máquinas, tendo placas como componente, inserindo na análise do solo, o método dos elementos de contorno, posteriormente realizando o acoplamento MEC-MEF.

Referências

[1] R. W. Clough, e E. L. Wilson, “Early finite element method research at Berkeley”. In: Fifth U.S. National Conference on Computational Mechanics, Aug. 4-6, p. 1-35, 1999.

[2] A. Hrennikoff, “Solution of Problems in Elasticity by the Framework Method”, J. Appl. Mech. 8, p. 169–175, 1941.

[3] D. Mchenry, “A Lattice Analogy for the Solution of Plane Stress Problems”, J. Inst. Civil Eng. 21 (2), 1943.

[4] R. W. Clough, “The Finite Element Method in Plane Stress Analysis”, Proc. 2nd ASCE Conf. On Electronic Computation, Pittsburg, Pa. Sept. 1960.

[5] J. L. Tocher, “Analysis of Plate Bending Using Triangular Elements”, University of California, Berkeley, Ph.D. Dissertation, 1962.

[6] R. W. Clough, J. L. Tocher, “Finite Element Stiffness Matrices For the Analysis of Plate Bending”, Proc. Matrix Methods in Structural Analysis, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, October 26-28, 1965.

[7] E. N. Dvorkin e K. J. Bathe, “A continuum mechanics based four-node shell element for general nonlinear analysis,” Engineering and Computation, Volume 1, p. 77–88, 1984.

[8] K.J. Bathe, e E.H Dvorkin, “Short communication – a four-node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and mixed interpolation. International Journal for Numerical Methods in Engineering Volume 21, p. 367–383, 1985.

[9] O. C. Zienkiewicz e D. Lefebvre, “Three-field mixed approximation and the plate bending problem,” Communication in Applied Numerical Methods, Volume 3, p. 301–309, 1987.

[10] M. H. Verwood e A. W. M. Kok, “A shear locking free six-node Mindlin plate bending element,” Computers and Structures, Volume 36, p. 547–555, 1990.

[11] H. R. H. Kabir, “A shear-locking free isoparametric three-node triangular element for moderately-thick and thin plates,” *Computers and Structures*, Volume 35, p. 503–519, 1992.

[12] H. R. H. Kabir, “A shear locking free robust isoparametric three-node triangular element for general shells,” Computers and Structures, Volume 51, p. 425–436, 1994.

[13] E. Onate, F. Zarate e F. Flores, “Simple triangular element for thick and thin plate and shell analysis,” International Journal for Numerical Methods in Engineering, Volume 37, p. 2569–2582, 1994

- [14] R. M. Sydenstricker, e L. Landau, “Study of some triangular discrete Reissner-Mindlin plate shell elements. Computers and Structures, Volume 78, p. 21–33, 2000.
- [15] J.L Batoz, K.J. Bathe e L.W. Ho, “A study of three-node triangular plate bending elements.”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Volume 15, p. 1771 – 1812, 1980.
- [16] T. H. H. Pian e D. K. C. Wang, “Hybrid plate elements based on balanced stresses and displacements,” Finite Element Method for plates and shell structures, Volume 1, Pineridge Press, Swansea, U.K, 1986.
- [17] J.L Batoz, e P. Lardeur, “A discrete shear triangular nine d.o.f. element for the analysis of thick to very thin plates.” International Journal for Numerical Methods in Engineering, Volume 28, p. 533 – 560, 1989.
- [18] J. Mackerle, “Finite element vibration analysis of beams, plates and shells, ” Shock and Vibration, Volume 6, p. 97–109, 1999.
- [19] G. Kirchhoff, “Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe” J. Crelle, Volume 40, p. 51 – 88, 1850.
- [20] H. R. G. Viana, “Análise estática e vibratória de placas utilizando-se do Método dos Elementos Finitos”. Dissertação (Mestrado), Centro de Tecnologia. Universidade Federal da Paraíba, 2008.
- [21] W. Soebel, “Vibration of shells and plates.” 3rd edition. Marcel Denkel, Inc. New York, 2005.
- [22] A. W. Leissa, “Vibration of plates.” NASA SP-160, Washington, D.C. US Government Printing Office, 1969.
- [23] M. Petyt, “Introduction to finite element vibration analysis.”Cambridge University Press, 1990.