

Caracterização de Matróides binárias 3-conexas com circunferência 6

Ademakson S. Araújo

Depto. Química e Exatas, UESB

45.206-190, Jequié, BA

E-mail: ademakson@gmail.com.

Manoel Lemos

Depto. de Matemática, CCEN, UFPE.

50.670-901, Recife, PE

E-mail: manoel@dmat.ufpe.br.

Resumo

Neste trabalho caracterizamos as matrôides 3-conexas binárias com circunferência seis e posto menor ou igual a sete. O trabalho conta com programas escritos em Linguagem C capazes de gerar e classificar as matrôides por isomorfismo.

Palavras-chave

Matróides. Circunferência. Conexidade.

Introdução

A teoria de matrôides foi introduzida em 1935 por Whitney na tentativa de analisar a essência abstrata da teoria de dependência. Quando da definição de matrôides Whitney tentou capturar as propriedades fundamentais que são comuns em grafos e matrizes, essa definição acabou por abraçar uma diversidade maior de estruturas combinatórias.

Matróides aparecem naturalmente em Otimização Combinatória pois sob elas trabalham o algoritmo ambicioso.

Entre os problemas de maior interesse nas pesquisas em matrôides estão os problemas relacionados com conectividade. Os circuitos desempenham papel importante no grau de conectividade de uma matrôide, assim é de fundamental importância seu estudo pormenorizado.

Em sua tese de doutorado, Bráulio Maia Junior sob a orientação de Manoel Lemos deu início ao estudo que tem como objetivo conhecer todas as matrôides com respeito a sua circunferência, ou seja, seu circuito de comprimento máximo. Esta tese rendeu dois artigos: *Matroids Having Small Circumference, Combinatorics, Probability and Computing* [2] e *Connected matroids with a small circumference*, [3]. Nestes artigos, eles descreveram analiticamente todas as matrôides com circunferência menor igual a 5. Recentemente, Manoel Lemos, Bráulio Junior e Raul Cordovil [1] caracterizaram, também analiticamente, todas as matrôides binárias 3-conexas de circunferência 6 e 7, mas apenas para

posto maior ou igual a 8. Notamos que existia uma lacuna nas matrôides de circunferência 6 e posto menor que 8, isto é, posto 5, 6, e 7. Este fato se deve ao grande número de exemplos encontrados para tais matrôides, tornando muito difícil descrevê-las analiticamente de maneira satisfatória.

Com o objetivo de conhecer e classificar estas matrôides, desenvolvemos dois algoritmos em linguagem C, capazes de gerar e classificar via isomorfismo todas as matrôides binárias 3-conexas. Esses algoritmos tornaram possível cobrir uma significativa etapa do processo de caracterização de circuitos em matrôides.

1 Preliminares

Uma *matrôide* M é um par ordenado $(E, \mathcal{I})$ consistindo de um conjunto finito E e uma coleção $\mathcal{I}$ de subconjuntos de E satisfazendo as seguintes três condições:

(I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$.

(I2) Se $I \in \mathcal{I}$ e $I' \subseteq I$, então $I' \in \mathcal{I}$.

(I3) Se I_1 e I_2 estão em $\mathcal{I}$ e $|I_1| < |I_2|$, então existe um elemento $e \in I_2 - I_1$ tal que $I_1 \cup e \in \mathcal{I}$.

Se M é uma matrôide $(E, \mathcal{I})$, então M é chamada uma matrôide em E . Os membros de $\mathcal{I}$ são chamados de conjuntos independentes. Um membro maximal de $\mathcal{I}$ é chamado uma base de M . Um subconjunto que não está em $\mathcal{I}(M)$ é um conjunto dependente. Um conjunto dependente minimal de M será chamado um circuito de M e denotaremos o conjunto dos circuitos de M por $\mathcal{C}(M)$. Também chamaremos de circunferência e denotaremos por $\text{circ}(M)$ ao comprimento máximo de um circuito $C \in \mathcal{C}(M)$.

Teorema 1 *Seja E o conjunto dos rótulos das colunas de uma $m \times n$ matriz A sobre um corpo $\mathbb{F}$, e seja $\mathcal{I}$ coleção de subconjuntos I de E para o qual o conjunto das colunas rotuladas por I é linearmente independente sobre o espaço vetorial $V(m, \mathbb{F})$. Então $(E, \mathcal{I})$ é uma matrôide.*

VIII ERMAC-R3

5º Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional

20 a 22-Novembro-2008

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - Natal/RN

Duas Matróides M_1 e M_2 são isomorfas, denotamos por $M_1 \cong M_2$, se existe uma bijeção φ de $E(M_1)$ para $E(M_2)$ tal que, para todo $X \subseteq E(M_1)$, $\varphi(X)$ é independente em M_2 se e somente se X é independente em M_1 . A matróide obtida da matriz A como no Teorema 1 será denotada por $M[A]$. Esta matróide é chamada de matróide vetorial de A . Uma matróide M que é isomorfa a uma matróide vetorial $M[A]$ para alguma matriz A sobre um corpo $\mathbb{F}$ é dita $\mathbb{F}$ -representável, e A é chamada uma $\mathbb{F}$ -representação de M . Uma matróide que é $\mathbb{Z}_2$ -representável é chamada simplesmente de matróide binária. Neste trabalho consideraremos apenas matróides binárias.

Seja M uma matróide e $\{X, Y\}$ uma partição de $E(M)$. Seja k um inteiro positivo. Dizemos que (X, Y) é uma k -separação para M se

$$\min\{|X|, |Y|\} \geq k$$

e

$$r(X) + r(Y) - r(M) + 1 \leq k.$$

Uma matróide M é dita ser n -conexa se e somente se M não possui uma k -separação para todo inteiro positivo $k < n$.

Agora suponha que l, m e n são inteiros tais que $0 \leq l \leq 3 \leq n$ e $0 \leq m \leq n$. Seja $\{U, V\}$ uma partição dos vértices do grafo bipartido completo $K_{3,n}$ tal que U e V são conjuntos estáveis, $|U| = 3$ e $|V| = n$, digamos $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Seja $K_{3,n}^{(l)}$ o grafo simples obtido de $K_{3,n}$ pela adição de l arestas unindo dois vértices de U . Definimos $M_{n,m,l}$ como a matróide binária obtida de $M(K_{3,n}^{(l)})$ completando-se as triádes $st(v_1), st(v_2), \dots, st(v_m)$ para circuitos-circuitos com 4 elementos. A figura 1 dá uma idéia geométrica da matróide $M_{n,m,3}$.

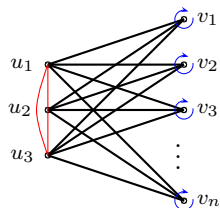


Figura 1: $M_{n,m,3}$

A partir de agora e durante todo o trabalho nos referiremos a M como uma matróide binária 3-conexa com circunferência 6. Se $r(M) \leq 5$, então Junior e Lemos [3] mostraram que:

Teorema 2 *Se M é uma matróide 3-conexa tal que $r(M) \leq 5$, então $\text{circ}(M) = r(M) + 1$ exceto quando M for isomorfa a $U_{1,1}$, F_7^* , $AG(3, 2)$, J_9 ou J_{10} .*

Como consequência deste resultado temos que:

Corolário 1 *Seja M uma matróide 3-conexa. Se $r(M) \leq 5$, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) $\text{circ}(M) = 6$;
- (ii) $r(M) = 5$ e M não é isomorfa a J_9 ou J_{10} .

Portanto, necessitamos caracterizar apenas as matróides 3-conexas possuindo circunferência 6 com posto pelo menos 6. Mas Cordovil, Junior e Lemos em [1] construíram todas as matróides binárias 3-conexas com circunferência 6 e posto pelo menos 8, a saber:

Teorema 3 *Seja M uma matróide 3-conexa binária tal que $r(M) \geq 8$. Então, $\text{circ}(M) = 6$ se e somente se M é isomorfa a $M_{n,m,l}$, para alguns inteiros l, m e n tal que $0 \leq l \leq 3$, $6 \leq m \leq n$.*

Algumas definições encontradas no texto que não foram explicitadas nesta seção podem ser encontradas em [5].

2 Resultados Principais

Os resultados obtidos até agora deixam apenas uma lacuna na construção das matróides binárias 3-conexas com circunferência 6: aquelas com posto 6 ou 7. Portanto devemos caracterizar as matróides binárias 3-conexas, com circunferência 6 e posto 6 ou 7. Construiremos estas matróides em 2 seções: Na primeira seção caracterizamos as matróides com posto 7 e na seção seguinte caracterizamos as matróides com posto 6.

2.1 Matróides de Posto 7

O próximo resultado nos fornece uma primeira caracterização de matróides binárias 3-conexas possuindo circunferência 6.

Proposição 2.1 *Suponha que M é uma matróide binária 3-conexa tal que $\text{circ}(M) = 6$. Então:*

- (i) M é isomorfa a Z_{11} , Y_{12} , Z_{12} ou Z_{13} ; ou
- (ii) Toda componente conexa de M/C possui posto 0 ou 1, para todo circuito máximo C de M .

Para efeito de comparação, enunciamos um resultado similar obtido por Cordovil, Junior e Lemos [1].

Proposição 2.2 *Suponha que M é uma matróide binária 3-conexa tal que $\text{circ}(M) \in \{6, 7\}$ e $r(M) \geq \text{circ}(M) + 2$. Se C é um circuito de comprimento máximo de M , então o posto de toda componente conexa de M/C é no máximo um.*

VIII ERMAC-R3

5º Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional

20 a 22-Novembro-2008

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - Natal/RN

O Teorema a seguir caracteriza todas as matrôides binárias, 3-conexas de circunferência 6 e posto 7 tal que toda componente conexa de M/C tem posto no máximo um, para algum circuito C de comprimento máximo de M .

Teorema 4 *Seja M uma matrôide binária 3-conexa de posto 7. Suponha que M não é isomorfa às matrôides Z_{11}, Y_{12}, Z_{12} ou Z_{13} . Então $\text{circ}(M) = 6$ se e somente se M é isomorfo à matrôide $M_{5,m,l}$, com $0 \leq l \leq 3$ e $0 \leq m \leq 5$.*

2.2 Matrôides de posto 6

Nesta seção caracterizaremos todas as matrôides 3-conexas, binárias que possui circunferência e posto 6. Devido ao grande número de exemplos encontrados para tais matrôides, tornando muito difícil descrevê-las analiticamente de maneira satisfatória, desenvolvemos dois algoritmos em linguagem C que deram origem a dois programas, que chamaremos aqui de programa 1 e programa 2, capazes de gerar e classificar via isomorfismo todas as matrôides binárias 3-conexas. Antes, definiremos algumas matrôides que serão utilizadas ao longo da seção.

Sejam $L_1 = M[A_1]$ e $L_2 = M[A_2]$ as matrôides representadas pelas matrizes binárias A_1 e A_2 , respectivamente, cuja co-simplificação é isomorfa a F_7 . As matrizes A_1 e A_2 e as representações geométricas para as matrôides $(M[A_1])^*$ e $(M[A_2])^*$, são mostradas nas figuras 2 e 3, respectivamente.



Figura 2: A matriz A_1 e uma representação geométrica para $(L_1)^*$.

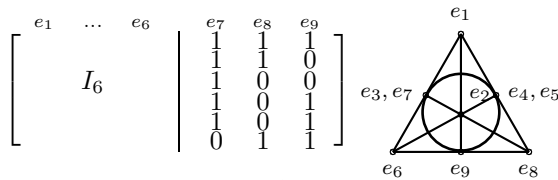


Figura 3: A matriz A_2 e uma representação geométrica para $(L_2)^*$.

Observe que L_1 e L_2 não são isomorfas, pois L_1 possui 1 classe em série contendo 3 elementos e 6 classes em série triviais e L_2 possui 2 classes em série contendo 2 elementos e 5 classes em série triviais. Seja $L_3 = M[A_3]$ a matrôide representada pela matriz binária A_3 , cuja co-simplificação é isomorfo a $M(K_4)$. A figura 4 mostra a matriz A_3 e uma representação geométrica para a matrôide $(L_3)^*$.

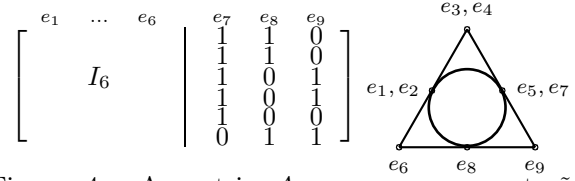


Figura 4: A matriz A_3 e uma representação geométrica para $(L_3)^*$.

Seja M uma matrôide 3-conexa binária de posto e circunferência 6 e C um circuito de comprimento máximo de M . Seja H uma componente conexa de M/C de posto não nulo. Pela Proposição 2.1, $r_{M/C}(H) = r(M/C) = 1$ e H é única com essa característica. O próximo Lema mostra que o posto de H em M é pelo menos 3.

Lema 1 *Seja M uma matrôide 3-conexa de posto e circunferência 6 e C é um circuito de comprimento máximo de M . Se H é uma componente conexa de M/C de posto não nulo, então $r_M(H) \geq 3$.*

Para facilitar nossa caracterização iremos classificar as matrôides binárias 3-conexas de posto e circunferência 6 quanto ao número de elementos independentes de H em M , isto é $r_M(H)$. A partir de agora e durante todo o capítulo nos referimos a C como um circuito de comprimento máximo de M , H uma componente conexa de posto não nulo de M/C e I um subconjunto independente maximal de H . Note que todo 3-subconjunto $Z \subseteq H$ é uma estrela com respeito a C . Assim a simplificação de $M|(C \cup Z)$ é isomorfa a $M(K_4)$ ou F_{7*} , ou seja, $M|(C \cup Z)$ é isomorfa à uma das matrôides: L_1 , L_2 ou L_3 .

Proposição 2.3 *Seja M uma matrôide 3-conexa binária de posto e circunferência 6. Se Z é um 3-subconjunto de I , então $M|(C \cup Z)$, é isomorfo a L_1 , L_2 ou L_3 .*

Com base na Proposição 2.3, o programa 1 gera a partir de uma matriz representante inicial, A_1 , A_2 ou A_3 , todas as extensões binárias dessa matrôide acrescentando-se novas colunas a essa matriz assegurando-se limites a sua circunferência e $r_M(H)$. Este programa gera também a matriz de circuitos de cada extensão binária assim obtida. O segundo programa classifica as matrôides obtidas no programa 1 segundo sua classe de isomorfismo.

Começaremos caracterizando as matrôides com $r(H) = 3$. Iniciaremos descrevendo a matrôide 3-conexas binárias cuja restrição a $C \cup I$ é isomorfa à matrôide L_1 , L_2 ou L_3 .

Teorema 5 *Seja M uma matrôide binária 3-conexa de posto e circunferência 6. Então $r_M(H) = 3$ e $M|(C \cup I)$ é isomorfa L_1 , se e somente se M é isomorfa à matrôide $A_{n,q}$, onde n e q são inteiros positivos tais que $0 \leq q \leq k$ e $(n, k) \in \{(11, 2),$*

VIII ERMAC-R3

5º Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional

20 a 22-Novembro-2008

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - Natal/RN

(12, 6), (13, 12), (14, 14), (15, 11), (16, 9), (17, 5), (18, 3), (19, 2), (20, 0)}.

Teorema 6 *Seja M uma matróide binária 3-conexa de posto e circunferência 6. Então $r_M(H) = 3$ e $M|(C \cup I)$ é isomorfa L_2 , se e somente se M é isomorfa às matróides L_{12} , L_{11} , N_{11} ou L_{10} .*

Teorema 7 *Seja M uma matróide binária 3-conexa de posto e circunferência 6. Então $M|(C \cup I)$ é isomorfa a L_3 e $r_M(H) = 3$, se e somente se M é isomorfa a $M_{4,m,l}$ ou $N_{4,m,q}$, onde m, l e q são inteiros tais que $0 \leq m \leq 4$, $0 \leq l \leq 3$ e $1 \leq q \leq 4$.*

Agora caracterizaremos todas as matróides que possuem $r(H) = 4$. As restrições dessas matróides a $C \cup I$ são necessariamente extensões binárias das matróides L_1 , L_2 ou L_3 obtidas acrescentando-se um novo elemento a H de modo que $|I| = 4$.

Construímos cada extensão $M|(C \cup I)$ de L_i , $i \in \{1, 2, 3\}$, acrescentando um novo elemento e_{10} de maneira que $r(H \cup e_{10}) = 4$, onde e_{10} é gerado pelos elementos da base $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ de L_i e $3 \leq |D| \leq 6$, para todo circuito $D \in \mathcal{C}(M)$. Para simplificar e reduzir o número de cálculos, e_{10} foi gerado de modo a não pertencer ao fecho de C . Denotamos as extensões binárias de cada L_i obtida, acrescentando-se o elemento e_{10} , por $L_{i,X}$, onde $i \in \{1, 2, 3\}$ e X representa a sequência dos rótulos na matriz A_i dos elementos da base que geraram e_{10} . Rodando os programas 1 e 2, verificamos que as possíveis extensões binárias de L_1 para $M|(C \cup I)$, a menos de isomorfismo, são $L_{1,146}$, $L_{1,246}$ e $L_{1,1456}$; da mesma forma verificamos que existem, a menos de isomorfismo, 2 extensões binárias de L_2 para $M|(C \cup I)$, a saber: $L_{2,136}$ e $L_{2,1346}$ e semelhantemente mostramos que a menos de isomorfismo, existe somente uma extensão binária da matróide L_3 para $M|(C \cup I)$, a matróide denotada por $L_{3,136}$.

Como a matróide $L_{1,246}$ é isomorfa à matróide $L_{3,136}$ com $\varphi(12345678910) = (1\ 3\ 2\ 4\ 5\ 6\ 7\ 10\ 8\ 9)$ e a matróide $L_{1,1456}$ é isomorfa à matróide $L_{2,136}$ com $\varphi(12345678910) = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 10\ 9)$, temos que a menos de isomorfismo, existem apenas 4 matróides binárias para $M|(C \cup I)$ de posto e circunferência 6 tal que $r_M(H) = 4$, as matróides: $L_{1,146}$, $L_{1,246}$, $L_{1,1456}$ e $L_{2,1346}$.

Teorema 8 *Seja M uma matróide binária 3-conexa de posto e circunferência 6. Se $M|(C \cup I)$ é isomorfa à matróide $L_{1,146}$ ou a $L_{1,246}$, então M é isomorfa à matróide $AZ_{n,q}$, onde n e q são inteiros positivos.*

Teorema 9 *Seja M uma matróide binária 3-conexa de posto e circunferência 6. Se $M|(C \cup I)$ é isomorfa à matróide $L_{1,1456}$, então M é isomorfa a H_{12} ou H_{11} .*

Teorema 10 *Seja M uma matróide binária 3-conexa de posto e circunferência 6. Se $M|(C \cup I)$ é isomorfa à matróide $L_{2,1346}$, então M é isomorfa à DB_{11} , DB_{10} ou DV_{11} .*

Agora caracterizaremos as matróides binárias 3-conexas de posto e circunferência 6 com $r(H) = 5$. De forma análoga a construção das matróides com $r(H) = 4$, construímos as matróides $M|(C \cup I)$ com $r_M(H) = 5$ acrescentando um novo elemento e_{11} às matróides $L_{1,146}$, $L_{1,246}$, $L_{1,1456}$ e $L_{2,1346}$ de forma que o elemento e_{11} seja linearmente independente com os elementos de I e $3 \leq |D| \leq 6$, para todo circuito $D \in \mathcal{C}(M)$. Semelhantemente, denotamos cada matróide assim construída por $L_{i,X,Y}$, onde $i \in \{1, 2\}$, $X \in \{146, 246, 1456, 1346\}$ e Y representa a sequência dos rótulos dos elementos da base que geraram e_{11} . Novamente rodando os programas para as matrizes de $L_{1,146}$, $L_{1,246}$, $L_{1,1456}$ e $L_{2,1346}$ encontramos a menos de isomorfismo, que as matróides de posto e circunferência 6 com $r(H) = 5$ para $M|(C \cup I)$ são: $L_{1,146,156}$, $L_{1,146,256}$, $L_{1,146,2346}$, $L_{1,246,356}$ e $L_{1,1456,2346}$.

A matróide $L_{1,146,256}$ é isomorfa à matróide $L_{1,246,156}$ com $\varphi(1234567891011) = (1\ 2\ 3\ 5\ 4\ 6\ 7\ 8\ 9\ 11\ 10)$, a matróide $L_{1,146,2346}$ é isomorfa à matróide $L_{1,1456,23456}$ com $\varphi(1234567891011) = (1\ 2\ 3\ 7\ 4\ 6\ 5\ 8\ 9\ 11\ 10)$ e a matróide $L_{1,1456,2346}$ é isomorfa à matróide $L_{2,1346,246}$ com $\varphi(1234567891011) = (1\ 2\ 4\ 3\ 7\ 8\ 5\ 6\ 11\ 9\ 10)$. Como procuramos por extensões dessas matróides obtidas, acrescentando o fechos de C e de I que sejam 3-conexas, temos que a menos de isomorfismo, existem 4 matróides para $M|(C \cup I)$ cuja extensão é 3-conexa, pois a matróide $L_{1,146,2346}$ não possui extensão 3-conexa, conforme mostramos no próximo resultado. Assim, são matróides 3-conexas, as matróides $L_{1,146,156}$, $L_{1,146,256}$, $L_{1,246,356}$, $L_{1,1456,2346}$ e suas extensões.

Teorema 11 *Se M é uma extensão binária da matróide $L_{1,146,2346}$ de posto e circunferência 6, então M não é 3-conexa.*

Teorema 12 *Seja M uma matróide binária 3-conexa de posto e circunferência 6. Se $M|(C \cup I)$ é isomorfa a uma das matróides $L_{1,146,156}$, $L_{1,146,256}$ ou $L_{1,246,356}$, então M é isomorfa a todo menor de AT_{32} que contenha uma das matróides $L_{1,146,156}$, $L_{1,146,256}$ ou $L_{1,246,356}$ como menor.*

Teorema 13 *Seja M uma matróide binária 3-conexa de posto e circunferência 6. Se $M|(C \cup I)$ é isomorfa à $L_{1,1456,2346}$, então M é isomorfa à DN_{12} ou DN_{11} .*

Finalmente, acrescentando a cada matróide $M = L_{1,146,156}$, $L_{1,146,256}$, $L_{1,146,2346}$, $L_{1,246,356}$ ou $L_{1,1456,2346}$ um novo elemento e_{12} de forma que a extensão binária M' assim obtida tenha $r_{M'}(H) =$

VIII ERMAC-R3

5º Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional

20 a 22-Novembro-2008

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - Natal/RN

6, posto e circunferência iguais a 6 e $|D| \geq 3$, para todo circuito $D \in \mathcal{C}(M')$, encontramos a matróide 3-conexa $L_{1,1456,2346,2356}$, extensão binária da matróide $L_{1,1456,2346}$ obtida acrescentando-se o elemento e_{12} gerado pelos elementos e_2, e_3, e_5 e e_6 .

Teorema 14 *Seja M uma matróide binária 3-conexa de posto e circunferência 6. Se $r_M(H) = 6$ para alguma componente conexa H de M/C , onde C é um circuito de comprimento máximo, então M é isomorfa à matróide JL .*

Agradecimentos

O primeiro autor agradece o apoio financeiro da UESB, UFPE e FAPESB.

Referências

- [1] R.Cordovil, B. M. Junior and M. Lemos, *The 3-connected binary matroids with circumference 6 or 7*. European Journal of Combinatorics (a ser publicado)
- [2] B. M. Junior, *Connected matroids with a small circumference*, Discret Math. 259 (2002), 147-161.
- [3] B. M. Junior and M. Lemos, *Matroids having small circumference*, Combin. Probab. Comput. 10 (2001), 349-360.
- [4] M. Lemos and J. Oxley, *On size, circumference and circuit removal in 3-connected matroids*, Discret Math. 220 (2000), 145-157.
- [5] J. G. Oxley, *Matroid Theory*, Oxford University Press, New York, 1992.
- [6] P.D. Seymour, *Decomposition of regular matroids*, J. Combin. Theory Ser. B 28 (1980), 305-359.
- [7] P. Wu, *On large circuits and matroids*, Graphs and Combinatorics (2001) 17, 365-388.