

Existência de soluções para um problema de ressonância via espaços com peso

Moisés Dantas dos Santos

*Departamento de Ciências Ambientais, Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Br
110-Km 47, Cep 59625-900: Mossóro-RN, Brasil*

0.1 Introdução

Neste trabalho vamos utilizar os métodos variacionais para determinar soluções fracas para um problema do tipo

$$\begin{cases} -\Delta u + u &= \lambda_k h u + g(x, u), \mathbb{R}^N \\ u &\in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases} \quad (P)$$

onde $N \geq 3$, com as funções $h : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}_+$ e $g : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ contínuas verificando as seguintes condições:

- (i) $h \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$;
- (ii) Existe $Z \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$; $Z(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}^N$, satisfazendo

$$|g(x, t)| \leq Z(x) \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \quad (1)$$

e considere λ_k o k-ésimo autovalor associado ao problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u &= \lambda h u, \mathbb{R}^N \\ u &\in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases} \quad (P_\lambda)$$

Além disso, vamos supor que g satisfaz uma das condições (g_2^+) ou (g_2^-) , listadas abaixo:

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(x, v(x)) dx \longrightarrow \pm \infty \quad \text{quando} \quad \|v\| \longrightarrow \infty ; v \in N_{\lambda_k} \quad (g_2^\pm)$$

sendo N_{λ_k} o auto espaço associado a λ_k e $G(x, \cdot) = \int_0^\cdot g(x, \tau) d\tau$ designa a primitiva de $g(x, \cdot)$.

É importante ressaltar, que a primeira versão referente a existência de solução do problema (P) , para $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitado é devido a Lazer, Ahmad e Paul [6]. O que fizemos foi completar o resultado provado por eles, considerando o domínio como sendo o $\mathbb{R}^N$. Encontrar uma solução fraca para o problema (P) equivale a determinar pontos críticos do funcional energia associado definido por

$$\begin{aligned} \Phi : H^1(\mathbb{R}^N) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \Phi(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + |u|^2) dx - \frac{\lambda_k}{2} \int_{\mathbb{R}^N} u^2 h dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(x, u) dx. \end{aligned}$$

0.2 Espaços com Peso

Nesta seção vamos definir espaços com peso e mostrar algumas propriedades envolvendo tais espaços. Para isto, começaremos com a seguinte definição:

Definição 0.1 *Seja $h : \mathbb{R}^N \mapsto (0, +\infty)$ uma função mensurável e $1 < p < \infty$. Definimos o espaço $L^p(\mathbb{R}^N, hdx)$ como sendo o seguinte conjunto:*

$$L^p(\mathbb{R}^N, hdx) = \left\{ f : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R} \text{ mensuráveis ; } \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^p h(x) dx < \infty \right\}.$$

No que segue denotaremos por

$$\|u\| = \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + |u|^2) dx \right)^{1/2}$$

e

$$\|f\|_{p,h} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f|^p h dx \right)^{1/p}$$

as normas em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e $L^p(\mathbb{R}^N, hdx)$, respectivamente.

Teorema 0.2 *O espaço $(L^p(\mathbb{R}^N, hdx), \|\cdot\|_{p,h})$ com $1 \leq p < \infty$ é Banach.*

Teorema 0.3 *Se $h \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, então vale a imersão contínua*

$$H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N, hdx)$$

para $p \in [1, 2^]$ se $N \geq 3$.*

Teorema 0.4 *Se $h \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, tem-se a imersão compacta*

$$H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N, hdx)$$

para $p \in [1, 2^)$ se $N \geq 3$.*

0.3 Teorema do Ponto de Sela

Para mostrarmos a existência de solução fraca para o problema (P) vamos utilizar o teorema do ponto de sela de Rabionowitz.

Teorema 0.5 (*Ponto de Sela*) *Seja $X = V \oplus W$ um espaço de Banach, de modo que $\dim V < \infty$, e seja $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ uma aplicação satisfazendo a condição de Palais-Smale. Se D é uma vizinhança limitada de 0 em V tal que*

$$a = \max_{\partial D} \phi < \inf_W \phi \equiv b, \quad (2)$$

então

$$c = \inf_{h \in \Gamma} \max_{u \in \overline{D}} \phi(h(u))$$

é um valor crítico de ϕ com $c \geq b$, onde

$$\Gamma = \{h \in C(\overline{D}, X) ; h(u) = u, \forall u \in \partial D\}.$$

Preliminares: Definindo o operador linear

$$Lu = u - \lambda_k S(u),$$

segue que

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} (Lu, u)_{H^1(\mathbb{R}^N)} - \int_{\mathbb{R}^N} G(x, u) dx.$$

Agora, vamos fixar a seguinte decomposição ortogonal de $X = H^1(\mathbb{R}^N)$,

$$X = X_- \oplus X_0 \oplus X_+,$$

onde

$$X_0 = N_{\lambda_k},$$

$$X_- = N_{\lambda_1} \oplus N_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus N_{\lambda_{k-1}}$$

e

$$X_+ = N_{\lambda_{k+1}} \oplus N_{\lambda_{k+2}} \oplus \dots$$

Assim, obtemos os seguintes resultados:

Proposição 0.6 *Se $u \in X_0$, então $(Lu, u)_{H^1(\mathbb{R}^N)} = 0$.*

Proposição 0.7 *Se $u \in X_-$, então existe $\alpha > 0$ tal que $(Lu, u)_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq -\alpha \|u\|^2$, ou seja, L é definido negativo em X_- .*

Proposição 0.8 *Se $u \in X_+$, então existe $\alpha > 0$ tal que $(Lu, u)_{H^1(\mathbb{R}^N)} \geq \alpha \|u\|^2$, ou seja, L é definido positivo em X_+ .*

Teorema 0.9 *Suponha válidas as condições (1) e (g_2^-) . Então,*

- (a) $\Phi(u) \longrightarrow -\infty$ quando $\|u\| \rightarrow +\infty$; $u \in X_-$.
- (b) $\Phi(u) \longrightarrow +\infty$ quando $\|u\| \rightarrow +\infty$; $u \in X_0 \oplus X_+$.

Mostraremos no que segue, que Φ satisfaz a condição (PS) , isto é, dada uma sequência $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ com

$$|\Phi(u_n)| \leq c \quad e \quad \Phi'(u_n) \rightarrow 0$$

temos que (u_n) possui uma subsequência convergente.

De fato, sendo

$$\Phi(u_n) = \frac{1}{2}(Lu_n, u_n)_{H^1(\mathbb{R}^N)} - \int_{\mathbb{R}^N} G(x, u_n)dx,$$

então

$$\left| \Phi'(u_n)v \right| = \left| (Lu_n, v) - \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n)v dx \right|. \quad (3)$$

Além disso,

$$\left| \Phi'(u_n)v \right| \leq \left\| \Phi'(u_n) \right\| \|v\|$$

de onde temos

$$\left| \Phi'(u_n)v \right| \leq \|v\| \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

para n suficientemente grande, pois

$$\Phi'(u_n) \rightarrow 0 \Leftrightarrow \left\| \Phi'(u_n) \right\| \rightarrow 0$$

logo,

$$\left\| \Phi'(u_n) \right\| \leq 1.$$

Agora, nosso próximo passo é mostrar que

$$u_n = P_0 u_n + P_- u_n + P_+ u_n$$

é limitada. Observe que

(i) Se $v = P_+ u_n$, substituindo em (3) segue

$$\left| \Phi'(u_n) P_+ u_n \right| = \left| (Lu_n, P_+ u_n) - \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n) P_+ u_n dx \right|.$$

Note que

$$(Lu_n, P_+ u_n) = (L(P_- u_n) + L(P_0 u_n) + L(P_+ u_n), P_+ u_n) = (L(P_+ u_n), P_+ u_n).$$

Daí, usando o fato de L ser positivo definido em X_+ temos

$$(Lu_n, P_+ u_n) = (L(P_+ u_n), P_+ u_n) \geq \alpha \|P_+ u_n\|^2.$$

Além disso,

$$\|P_+ u_n\| \geq \left| \Phi'(u_n) P_+ u_n \right| \geq |(Lu_n, P_+ u_n)| - \left| \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n) P_+ u_n dx \right|$$

o que implica,

$$\|P_+ u_n\| \geq \alpha \|P_+ u_n\|^2 - \|P_+ u_n\|_{1,Z}.$$

Do **Teorema 3** temos

$$\|P_+ u_n\| \geq \alpha \|P_+ u_n\|^2 - C \|P_+ u_n\|$$

portanto, $\|P_+ u_n\|$ é limitada.

(ii) Usando raciocínio semelhante, considerando $v = P_- u_n$ em (3) podemos concluir que $\|P_0 u_n\|$ é limitada.

Veja que pela ortogonalidade das projeções temos

$$\|u_n\|^2 = \|P_0 u_n\|^2 + \|P_- u_n\|^2 + \|P_+ u_n\|^2,$$

mostrando que (u_n) é limitada.

Sabemos que

$$\Phi'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + uv) dx - \psi'(u)v; \quad u, v \in H^1(\mathbb{R}^N)$$

onde

$$\psi(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{\lambda_k}{2} u^2 h + G(x, u) \right) dx,$$

logo

$$(\nabla\Phi(u), v)_{H^1(\mathbb{R}^N)} = (u, v)_{H^1(\mathbb{R}^N)} - (\nabla\psi(u), v)_{H^1(\mathbb{R}^N)}$$

assim,

$$(\nabla\Phi(u), v)_{H^1(\mathbb{R}^N)} = (u - \nabla\psi(u), v)_{H^1(\mathbb{R}^N)}$$

e consequentemente,

$$\nabla\Phi(u) = u - \nabla\psi(u).$$

Considerando $T(u) = \nabla\psi(u)$ temos

$$\nabla\Phi(u) = u - T(u)$$

portanto,

$$\nabla\Phi(u_n) = u_n - T(u_n)$$

o que implica,

$$u_n = \nabla\Phi(u_n) + T(u_n).$$

Agora, sendo $T : H^1(\mathbb{R}^N) \mapsto H^1(\mathbb{R}^N)$ compacto, existe $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ tal que

$$T(u_{n_j}) \longrightarrow u \text{ quando } n_j \rightarrow \infty,$$

e usando o fato de que

$$\Phi'(u_n) \rightarrow 0 \Leftrightarrow \|\Phi'(u_n)\| \rightarrow 0 \Leftrightarrow \|\nabla\phi(u_n)\| \rightarrow 0 \Leftrightarrow \nabla\Phi(u_n) \rightarrow 0,$$

passando ao limite em

$$u_{n_j} = \nabla\Phi(u_{n_j}) + T(u_{n_j})$$

encontramos

$$u_{n_j} \longrightarrow u \text{ quando } n_j \rightarrow \infty,$$

mostrando que Φ satisfaz a condição (PS).

Finalmente, temos que $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, Φ satisfaz a condição de Palais-Smale e usando a **Proposição 9** podemos aplicar o Teorema do Ponto de Sela com

$$V = X_- \quad , \quad W = X_0 \oplus X_+$$

e garantir a existência de um ponto crítico para Φ , isto é, uma solução fraca do problema (P) . ■

Bibliografia

- [1] Adams, R. A., *Sobolev spaces*. Academic Press, New York, 1975.
- [2] Brézis, Haim, *Analyse fonctionnelle*. 2^a ed. Masson, 1987.
- [3] Costa, David Goldstein, *Tópicos em análise não-linear e Aplicações às Equações Diferenciais*. CNPq-IMPA, 1986.
- [4] Cavalcante, Luís Paulo de Lacerda, *Existência de soluções positivas para uma classe de problemas elípticos não lineares em domínios não limitados*. Dissertação de Mestrado. UFCG, 2004.
- [5] Willem, Michel, *Lectures on Critical Point Theory*, Michel Willem, 1983.
- [6] Willem, Michel, *Minimax Theorems*. Birkhäuser, 1996.