VIII ERMAC-R3

5º Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional

20 a 22-Novembro-2008

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - Natal/RN

Extensões de T-normas em Reticulados Limitados

E. S. Palmeira **G. I. Gomero**,

Depto. de Ciências Exatas e Tecnológicas - DCET, UESC,

45662-000, Ilhéus, BA

E-mail: espalmeira@uesc.br, gigferrer@uesc.br,

Resumo

Dados um reticulado limitado L, um subreticulado N e uma t–norma T_N, mostramos que é possível estender T_N a uma t–norma em L, entretanto esta extensão não é única. Apresentamos exemplos onde não é possível encontrar uma extensão natural, e exemplos onde esta extensão natural existe. Um caso interessante desta última situação surge ao identificarmos o reticulado dos intervalos $\mathbb{I}L$ como subreticulado do produto $L \times L$.

Palavras-chave

Reticulados, t-norma, extensão, morfismo de reticulados.

Introdução

Como é bem conhecido, existem duas maneiras de definir reticulados, uma com estrutura algébrica e a outra com estrutura de conjunto parcialmente ordenado, as quais são equivalentes.

Entretanto as definições de morfismos em cada uma dessas estruturas não se equivalem. Mais especificamente, mostramos que todo morfismo de reticulados definidos algebricamente é um morfismo de reticulados como conjuntos parcialmente ordenados, mas a recíproca não é verdadeira. Fazermos aqui uma comparação entre essas inferências.

Em seguida, buscamos explorar o conceito de extensão de t-normas dada sobre um subreticulado e exibimos uma maneira geral, mas não única, de produzir este tipo de extensão.

Reticulado Limitado

Definição 1.1: Se $\leqslant$ é uma ordem parcial sobre o conjunto L, dizemos que $\langle L, \leqslant\rangle$ é um reticulado se para todo $a, b \in L$ o conjunto $\{a, b\}$ possuir um supremo e um ínfimo.

Se existirem elementos 1 e 0 de L tais que $x \leqslant 1$ e $0 \leqslant x$ para todo $x \in L$, $\mathbf{L} = \langle L, \leqslant, 1, 0\rangle$ é dito ser um reticulado limitado.

Exemplo 1.1: O conjunto das partes de um conjunto X munido da ordem parcial $\subset$ é um reticulado limitado.

Exemplo 1.2: $(\mathbb{N}, \leqslant)$ é um reticulado limitado inferiormente pelo zero e que não possui limitante superior.

A definição de reticulado limitado como uma estrutura algébrica é dada como segue.

Definição 1.2: Sejam L um conjunto não vazio e $\wedge$ e $\vee$ duas operações binárias sobre L. Dizemos que $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee\rangle$ é um reticulado se para quaisquer $x, y, z \in L$ valem as seguintes propriedades:
(i) $x \wedge y = y \wedge x$ e $x \vee y = y \vee x$
(ii) $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$ e $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \wedge z)$
(iii) $x \wedge (x \vee y) = x$ e $x \vee (x \wedge y) = x$

Se existirem no reticulado $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee\rangle$ elementos 1 e 0 tais que para todo $x \in L$, tenha-se $x \wedge 1 = x$ e $x \vee 0 = x$ dizemos que $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee, 1, 0\rangle$ é um reticulado limitado.

Exemplo 1.3: $\mathbf{I} = \langle [0, 1], \wedge, \vee, 1, 0\rangle$, onde $x \wedge y = \min\{x, y\}$ e $x \vee y = \max\{x, y\}$ é um reticulado limitado.

Exemplo 1.4: Sejam X um conjunto não vazio e $\mathcal{P}(X)$ o seu conjunto das partes. Para todo $A, B \in \mathcal{P}(X)$ definimos $A \wedge B = A \cap B$ e $A \vee B = A \cup B$. Então $\mathbf{X} = \langle \mathcal{P}(X), \wedge, \vee, 1, 0\rangle$ é um reticulado limitado, onde $1 = X$ e $0 = \emptyset$.

Exemplo 1.5: Sejam $\mathbf{L} = \langle L, \wedge_L, \vee_L, 1_L, 0_L\rangle$ e $\mathbf{M} = \langle M, \wedge_M, \vee_M, 1_M, 0_M\rangle$ reticulados limitados. Para (a, b) e (c, d) elementos do produto $L \times M$ definamos as operações

$$(a, b) \wedge (c, d) = (a \wedge_L c, b \wedge_M d)$$

$$(a, b) \vee (c, d) = (a \vee_L c, b \vee_M d)$$

Logo, $\mathbf{L} \times \mathbf{M} = \langle L \times M, \wedge, \vee, (1_L, 1_M), (0_L, 0_M)\rangle$ é um reticulado limitado. Vale destacar que a ordem em $\mathbf{L} \times \mathbf{M}$ é dada por

$$(x_1, x_2) \leqslant (y_1, y_2) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 \leqslant_L y_1 \text{ e } x_2 \leqslant_M y_2$$

Exemplo 1.6: Um outro exemplo de reticulado limitado construido a partir de um dado reticulado limitado $\mathbf{L}$ é $\mathbb{I}\mathbf{L} = \langle IL, \wedge, \vee, [1, 1], [0, 0]\rangle$ onde $IL = \{[x, y] \mid x, y \in L \text{ e } x \leqslant_L y\}$ e as operações $\wedge$ e $\vee$ são tais que

$$[x_1, y_1] \wedge [x_2, y_2] = [x_1 \wedge x_2, y_1 \wedge y_2]$$

$$[x_1, y_1] \vee [x_2, y_2] = [x_1 \vee x_2, y_1 \vee y_2]$$

A ordem é dada por

$$[x_1, y_1] \leqslant [x_2, y_2] \;\Leftrightarrow\; x_1 \leqslant_L x_2 \text{ e } y_1 \leqslant_L y_2$$

Note que as operações e a ordem em $\mathbb{I}\mathbf{L}$ e $\mathbf{L} \times \mathbf{M}$ se assemelham.

Como citamos na introdução, as definições 1.1 e 1.2 são equivalentes. Com efeito, se $\mathbf{L} = \langle L, \leqslant, 1, 0\rangle$ podemos definir naturalmente, a partir da ordem parcial em L, duas operações binárias:

$$x \wedge y = \inf\{x, y\} \quad e \quad x \vee y = \sup\{x, y\}$$

$\forall\ x, y \in L$. Dessa forma, $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee, 1, 0\rangle$ é um reticulado limitado no sentido algébrico.

Reciprocamente, considerando $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee, 1, 0\rangle$ um reticulado limitado como na definição 1.2, então para todo par de elementos $x, y \in L$ a relação

$$x \leqslant_L y \;\Leftrightarrow\; x \wedge y = x$$

define uma ordem parcial em L. Portanto, o reticulado limitado $\mathbf{L} = \langle L, \leqslant, 1, 0\rangle$ é como na definição 1.1. Vale ressatar que equivalentemente, a relação $x \leqslant y \;\Leftrightarrow\; x \vee y = y$ também define uma ordem parcial em L.

Vejamos agora como definir morfismos de reticulados limitados nos dois sentidos.

Definição 1.3: Sejam $(L, \leqslant_L, 1_L, 0_L)$ e $(M, \leqslant_M, 1_M, 0_M)$ reticulados limitados. Uma aplicação $f : L \longrightarrow M$ é um **homomorfismo**(na ordem) de reticulados limitados se preserva ordem e elementos extremantes, isto é, se para quaisquer $x, y \in L$,

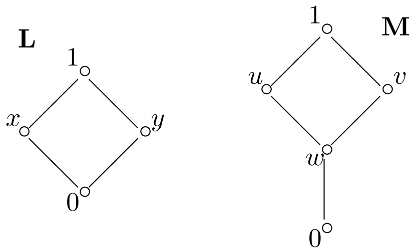
1. $x \leqslant_L y \Rightarrow f(x) \leqslant_M f(y)$
2. $f(0_L) = 0_M$ e $f(1_L) = 1_M$.

Definição 1.4: Uma função $f : L \longrightarrow M$, onde $\mathbf{L} = \langle L, \wedge_L, \vee_L, 1_L, 0_L\rangle$ e $\mathbf{M} = \langle M, \wedge_M, \vee_M, 1_M, 0_M\rangle$ são reticulados limitados, é dita ser um **homomorfismo** (algebricamente) de reticulados limitados se satisfaz as seguintes propriedades:

1. $f(x \wedge_L y) = f(x) \wedge_M f(y)$
2. $f(x \vee_L y) = f(x) \vee_M f(y)$
3. $f(0_L) = 0_M$ e $f(1_L) = 1_M$

Note que, um homomorfismo de reticulados definidos algebricamente é também um homomorfismo na ordem. De fato, se $f : L \longrightarrow M$ é um homomorfismo como na definição 1.4, desde que $x \leqslant y$ se e somente se $x \wedge y = x$, então $f(x) = f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$, e daí, $f(x) \leqslant f(y)$.

Entretanto, a recíproca não vale em geral. Se $f : L \longrightarrow M$ é um homomorfismo na ordem, desde que $x \wedge y \leqslant x$ e $x \wedge y \leqslant y$, segue que $f(x \wedge y) \leqslant f(x)$ e $f(x \wedge y) \leqslant f(y)$. Daí, $f(x \wedge y) \leqslant f(x) \wedge f(y) = \inf\{f(x), f(y)\}$. Contudo, pode acontecer que $f(x \wedge y) \neq \inf\{f(x), f(y)\}$. A exemplo disso, consideremos os reticulados $\mathbf{L}$ e $\mathbf{M}$ dados pelos seguintes diagramas de Hasse



A função $f : L \longrightarrow M$ definida de forma a preservar os extremos e tal que $f(x) = u$ e $f(y) = v$ é um homomorfismo de acordo com a definição 1.3, mas não é um homomorfismo de acordo com a definição 1.4 pois não preserva a operação $\wedge$.

O interessante é que, mesmo não existindo uma equivalência entre as definições de homomorfismo dadas acima, a noção de isomorfismo entre dois reticulados $\mathbf{L}$ e $\mathbf{M}$ coincide independentemente se estivermos considerando-os no sentido da ordem ou algebricamente.

Para provar isso, consider $f : L \longrightarrow M$ um isomorfismo (homomorfismo bijetor, cuja inversa é também um homomorfismo) de reticulados limitados no sentido da ordem. Como $f(x \wedge y) \leqslant f(x) \wedge f(y), \forall\ x, y \in L$ e f^{-1} é um homomorfismo, temos:

$$f^{-1}(f(x) \wedge f(y)) \leqslant f^{-1}(f(x)) \wedge f^{-1}(f(y)) = x \wedge y$$

logo, $f(x) \wedge f(y) \leqslant f(x \wedge y)$ e, daí

$$f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$$

Analogamente, verifica-se que vale a identidade $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$. Portanto, f é homomorfismo como na definição 1.4

Esse fato é o motivo forte pelo qual optamos por definir subreticulado via isomorfismos de reticulados limitados, como vemos a seguir.

Extensão de T-normas

Sejam $\mathbf{L}$ e $\mathbf{M}$ dois reticulados limitados. Uma imersão de L em M é um homomorfismo injetivo $f : L \longrightarrow M$. Um mergulho de L em M é uma imersão f tal que L e $f(L)$ são isomorfos.

Definição 2.1: Dizemos que o subconjunto N do reticulado limitado L é um **subreticulado**, se N é imagem de algum mergulho em L.

Exemplo 2.1:
Uma situação interessante que ilustra essa idéia de subreticulado surge ao identificarmos o reticulado dos intervalos $\mathbb{I}\mathbf{L}$ (veja o exemplo 1.6) como subreticulado de $\mathbf{L} \times \mathbf{L}$. A imersão $i : \mathbb{I}\mathbf{L} \longrightarrow L \times L$ tal que $i([x, y]) = (x, y)$ é naturalmente um isomorfismo sobre sua imagem e, portanto, um mergulho.

Dado um reticulado L, lembremos que uma operação binária $T : L \times L \longrightarrow L$ é uma t-norma se satisfaz:

1. $T(x, y) = T(y, x)$
2. $T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z)$
3. $T(x, 1) = x$
4. Se $x \leqslant y$ então $T(x, z) \leqslant T(y, z)$

Sejam $N \subset L$ um subreticulado e T_N uma t-norma em N. Podemos estender naturalmente T_N a uma t-norma em L, definindo $T : L \times L \longrightarrow L$ por

$$T(x,y) = \begin{cases} T_N(x,y), & se\ (x,y) \in N \times N \\ x, & se\ y = 1_L \\ y, & se\ x = 1_L \\ 0, & demais\ casos \end{cases}$$

Observe que, o idéia usada aqui para estender uma t-norma definida em um subreticulado é essencialmente a de definir a t-norma fraca para os pares $(x, y) \in L \times L$ os quais $(x, y) \notin N \times N$.

Nessa mesma linha de pensamento, se $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ é um subreticulado de $\mathbf{L} \times \mathbf{L}$ e T_1 uma t-norma sobre $N \times N$, uma extensão de T_1 a uma t-norma T em $L \times L$ é dada por

$$T(x,y) = \begin{cases} T_1(x,y), & se\ (x,y) \in (N \times N)^2 \\ x, & se\ y = 1_L \\ y, & se\ x = 1_L \\ 0, & demais\ casos \end{cases}$$

onde $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $\widetilde{x} = (x_2, x_1)$, $\widetilde{y} = (y_2, y_1)$, $0 = (0, 0)$ e $1 = (1, 1)$.

Dessa forma, podemos estender naturalmente uma t-norma dada sobre um subreticulado N qualquer à uma t-norma em L. Entretanto, essa extensão não é única. Isso se deve ao fato de que, em geral, para se fazer outros tipos de extensões precisamos levar em conta as características do subreticulado. A exemplo disso, desde que $\mathbb{I}\mathbf{L}$ pode ser encarado com um subreticulado de $\mathbf{L} \times \mathbf{L}$ (veja exemplo 2.1), podemos estender uma t-norma T_{IL} sobre IL a t-norma T em $L \times L$ como feito acima para o subreticulado $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$.

Por outro lado, considerando o fato de que os elementos de $\mathbb{I}\mathbf{L}$ possuem uma característica particular, isto é, se $[x, y] \in \mathbb{I}\mathbf{L}$ então $x \leqslant y$ (lembremos que estamos considerando aqui $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ e que $x \leqslant y$ *sse* $x_1 \leqslant y_1$ *e* $x_2 \leqslant y_2$), podemos estender a t-norma T_{IL} de maneira diferente para os pares (x, y) de $L \times L$ tais que as coodenadas são comparáveis. Por vias de fatos, temos

$$T(x,y) = \begin{cases} T_1(x,y), & se\ x_1 \leqslant x_2\ e\ y_1 \leqslant y_2 \\ T_1(x,\widetilde{y}), & se\ x_1 \leqslant x_2\ e\ y_2 \leqslant y_1 \\ T_1(\widetilde{x},y), & se\ x_2 \leqslant x_1\ e\ y_1 \leqslant y_2 \\ T_1(\widetilde{x},\widetilde{y}), & se\ x_2 \leqslant x_1\ e\ y_2 \leqslant y_1 \\ x, & se\ y = 1_L \\ y, & se\ x = 1_L \\ 0, & demais\ casos \end{cases}$$

onde $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $\widetilde{x} = (x_2, x_1)$, $\widetilde{y} = (y_2, y_1)$, $0 = (0, 0)$ e $1 = (1, 1)$.

Em geral, não parece ser simples e direta a tarefa de descrever uma outra forma de estender t-normas sobre subreticulados. Entretanto, acreditamos ser plausível em face do que podemos perceber na maioria dos casos particulares. Ainda, é evidente que a solução desse problema está intimamente ligada à possibilidade de se determinar certas funções $\psi : L \times L \longrightarrow N \times N$ e $\alpha : N \longrightarrow L$ de forma que, se T_N é uma t-norma definida sobre o subreticulado N de L, a função $T = \alpha \circ T_N \circ \psi$ seja uma t-norma em L que estende T_N.

Nessa direção, um caminho que parece ser viável é o de tentar olhar para o fato de que a t-norma fraca T_W satisfaz a seguinte desigualdade provada em [2]:

$$T_W \leqslant T \leqslant T_G$$

onde T_G é a t-norma de Gödel.

Considerações finais

Estamos também interessados em saber se, dada uma t-norma T_N em N subreticulado de L e T_L uma t-norma em L, é possível determinar uma extensão T em L da t-norma T_N, levando-se em conta T_L. Ainda, se isso for possível, existe uma maneira natural de se proceder?

Referências

[1] B.C. Bedregal, H.S. Santos, R.C. Bedregal, "T-norms on bounded lattices: t-norm morphisms and operators", 2006 IEEE International Conference on Fuzzy Systems, 22–28 (2006)

[2] E. P. Klement, R. Mesiar, E. Pap, "Triangular Norms", Kluwer academic publisher, Dordrecht, 2000.