VIII ERMAC-R3

5º Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional
20 a 22-Novembro-2008
Universidade Federal do Rio Grande do Norte - Natal/RN

Uma Aritmética Contínua para Números Fuzzy Trapezoidais

Claudilene Gomes da Costa,
Depto. de Ciências Exatas, CCAE, UFPB,
58.297-000, Rio Tinto, PB
E-mail: claudilene@ccae.ufpb.br,

Benjamín Callejas Bedregal
Depto. de Informática e Matemática Aplicada, CCET, UFRN,
59.072-970, Natal, RN
E-mail: bedregal@dimap.ufrn.br.

Roberto Callejas-Bedregal
Depto. de Matemática, CCEN, UFPB,
58.051-900, João Pessoa, PB
E-mail: roberto@mat.ufpb.br.

Resumo

Neste trabalho analisamos propriedade algébricas satisfeitas pelos números fuzzy trapezoidais munidos de novas operações aritméticas que não coincidem com as operações usuais sobre números fuzzy, pois estas últimas não são fechadas para este tipo de números fuzzy. Verificamos que os números fuzzy com a nova adição, assim como com a nova multiplicação, são um monoide comutativo. Porém, essas operações não têm inversos o que acaba com qualquer possibilidade de constituir estruturas algébricas mais ricas. De fato, esta aritmética fuzzy tem propriedades análogas às propriedades de pseudo-inversos da aritmética intervalar, uma outra teoria que lida com incertezas, mas no caso numéricas. Depois introduzimos uma noção de distancia para o conjunto de números fuzzy trapezoidais e por conseguinte uma noção de continuidade para funções fuzzy sobre números trapezoidais. Finalmente mostramos que as operações aritméticas são contínuas.

Palavras-chave

Números fuzzy, operações aritméticas, métrica, continuidade.

Introdução

A teoria dos conjuntos fuzzy, introduzida por Lotfi Zadeh em [18], objetiva lidar com conjunto definidos a partir de conceitos vagos, tais como o conjunto das pessoas altas e assim tem-se tornado adequada para o raciocínio aproximado. Esta teoria tem sido alvo de intensa pesquisa em diversas frentes tais como lógica fuzzy, reconhecimento de padrões fuzzy, topologia fuzzy, linguagens formais e computabilidade fuzzy, sistemas especialistas e de controle fuzzy, números e aritmética fuzzy, etc.

Os números fuzzy foram introduzidos em 1978 com os trabalhos de Nahmias [13] e Dubois e Prade [5], porém o primeiro texto a abordar de forma profunda e rigorosa a aritmética fuzzy foi o livro de Kaufmann e Gupta [8]. Desde então esta área tem sido alvo de intensas pesquisas com aplicações nas mais diversas áreas, tais como em Geologia [3], em eletricidade [17], em engenharia [6], administração financeira [15], etc.

Existem diversas noções não equivalentes para o conceito de números fuzzy (veja por exemplo [2, 6, 10, 11, 14]). Já para as operações aritméticas entre números fuzzy, existem basicamente duas definições equivalentes: uma baseada nos α-cortes e a outra baseada no princípio da extensão de Zadeh [2]. Operações aritméticas sobre números fuzzy, além de ser uma estrutura algébrica pobre [4], não são simples de determinar. Porém existem algumas subclasses de números fuzzy que são mais simples de manipular, tais como números fuzzy triangulares, trapezoidais, L-R, quadráticos, etc. [6]. Mas é conhecido que essas classes de números fuzzy não são fechadas sobre a multiplicação definida em termos de α-cortes. Porém, essas definições de operações aritméticas, embora bem embasadas e justificadas, são muito específicas para uma teoria tão aberta e vaga como a teoria fuzzy. De fato, elas poderiam ser generalizadas assim como foram generalizadas as operações de união e intersecção de conjuntos fuzzy via a noção de t-normas e t-conormas [9]. Aqui não pretendemos dar uma tal generalização das operações aritmética, mas simplesmente novas operações aritméticas para a classe de números fuzzy trapezoidais, também chamados de números fuzzy intervalares, que sejam fechadas sobre essa classe.

Neste trabalho analisamos as propriedade algébricas nos números fuzzy trapezoidais munidos das novas operações aritméticas. Verificamos que que os números fuzzy com a nova adição, assim como com a nova multiplicação, são um monoide comutativo. O problema que se verifica que essas operações não têm inversos o que acaba com qualquer possibilidade de constituir estruturas algébricas mais ricas. Porém nos mostramos que, considerando a inclusão usual de conjuntos fuzzy, essas operações tem um pseudo-inverso aditivo e multiplicativo. Estas propriedades são análogas às propriedades de pseudo-inversos da aritmética intervalar [12], uma outra teoria que lida com incertezas, mas no caso numéricas. Depois introduzimos uma noção de distancia para o conjunto de números fuzzy trapezoidais e por conseguinte uma noção de continuidade para funções fuzzy sobre números trapezoidais. Finalmente mostramos que as operações aritméticas são contínuas.

1 Números Fuzzy

Um **subconjunto fuzzy** $\mathcal{A}$ de um universo U (conjunto clássico) é uma função $U \to [0,1]$. Como usual na literatura, usaremos $\mathcal{A}$ como um rótulo lingüístico e $\mu_{\mathcal{A}}$ para a função, também chamada de função de pertinência por indicar quanto um elemento pertence ao conjunto fuzzy. Quando o universo estiver implícito o for irrelevante, simplesmente chamaremos $\mathcal{A}$ de conjunto fuzzy.

Um conjunto fuzzy $\mathcal{A}$ é **normal**, se existe ao menos um elemento $x \in U$ tal que $\mu_{\mathcal{A}}(x) = 1$.

Dado qualquer $\alpha \in (0,1]$, o **α-corte** de um conjunto fuzzy $\mathcal{A}$, é o conjunto clássico
$\mathcal{A}_\alpha = \{x \in U/\mu_{\mathcal{A}}(x) = 1\}$.

Observe que qualquer conjunto fuzzy é completamente determinado pelos seus α-cortes.

O **suporte** de um conjunto fuzzy $\mathcal{A}$ é o conjunto
$S(\mathcal{A}) = \{x \in U/\mu_{\mathcal{A}}(x) \neq 0\}$.

O **núcleo** de um conjunto fuzzy $\mathcal{A}$ é o conjunto
$N(\mathcal{A}) = \{x \in U/\mu_{\mathcal{A}}(x) = 1\}$.

Um conjunto fuzzy $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}^n$ é **convexo** se todos seus α-cortes são conjuntos convexos (clássicos).

Um número fuzzy [2] é um conjunto fuzzy $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}$ tal que

1. $\mathcal{A}$ é normal;
2. $\mathcal{A}$ é convexo;
3. $\mu_{\mathcal{A}}$ é semi-contínua superior[1]
4. $S(\mathcal{A})$ é limitado.

Observe que para qualquer conjunto fuzzy $\mathcal{A}$ sobre $\mathbb{R}$, $\mu_{\mathcal{A}}$ é semi-contínua superior se e somente se $\mathcal{A}_\alpha$ é fechado para todo $\alpha \in (0,1]$. Assim, para cada α-corte de um número fuzzy $\mathcal{A}$ temos que

$$\mathcal{A}_\alpha = [\mathcal{A}_\alpha^L, \mathcal{A}_\alpha^R] \tag{1}$$

para algum valor $\mathcal{A}_\alpha^L \in [0,1]$ e $\mathcal{A}_\alpha^R \in [0,1]$.

Analogamente como todo conjunto clássico é um conjunto fuzzy, chamado de "crisp", temos que cada número real, pode ser visto como um número "crisp". Seja $r \in \mathbb{R}$, então o conjunto fuzzy (crisp) r tem a seguinte função de pertinência:

$$\mu_r(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = r \\ 0 & \text{se } x \neq r \end{cases}$$

Para facilitar o processamento computacional sobre números fuzzy, usualmente se usam tipos simples de números fuzzy. Entre os mais conhecidos estão os **números fuzzy triangulares** e os **números fuzzy trapezoidais**. Ou seja, números fuzzy onde a forma no plano cartesiano da função de pertinência tem essas formas. Nos consideraremos aqui os números trapezoidais, por serem mais gerais que os triangulares (todo número fuzzy triangular é um número fuzzy trapezoidal). Um número fuzzy trapezoidal $\mathcal{A}$, é completamente determinado ou especificado por 4 valores (a,b,c,d): a indica o limite inferior do suporte de $\mathcal{A}$, b indica o limite inferior do núcleo de $\mathcal{A}$, c indica o limite superior do núcleo de $\mathcal{A}$ e d indica o limite superior do suporte de $\mathcal{A}$.

Note que, a função de pertinência de um número fuzzy trapezoidal $\mathcal{A} = (a,b,c,d)$ tem o seguinte comportamento:

$$\mu_{\mathcal{A}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq a \text{ ou } x \geq d \\ 1 & \text{se } b \leq x \leq c \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{se } a < x < b \\ \frac{d-x}{d-c} & \text{se } c < x < d \end{cases} \tag{2}$$

A seguir daremos algumas definições básicas para os números fuzzy trapezoidais. Seja $\mathcal{A} = (a,b,c,d)$ um número fuzzy trapezoidal. então

- O **α-corte** de $\mathcal{A}$ é $\mathcal{A}_\alpha = [a+\alpha(b-a), d-\alpha(d-c)]$
- $\mathcal{A}$ é **simétrico** se $a = -d$ e $b = -c$.
- $\mathcal{A}$ é **degenerado** ou **crisp** se $a = b = c = d$.

2 Aritmética de Números Fuzzy Trapezoidais

Na maioria dos textos, por exemplo [2, 11], que definem operações sobre números fuzzy trapezoidais, no caso da multiplicação, podem resultar em números fuzzy não trapezoidais. A seguir nos introduziremos operações aritméticas sobre números fuzzy trapezoidais as quais são fechadas, ou seja sempre resultam em um número fuzzy trapezoidal. Sejam $\mathcal{A} = (a_1,b_1,c_1,d_1)$ e $\mathcal{B} = (a_2,b_2,c_2,d_2)$ dois números fuzzy trapezoidais. Então definamos
$\mathcal{A} + \mathcal{B} = (a_1+a_2, b_1+b_2, c_1+c_2, d_1+d_2)$

[1] Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é semi-contínua superior, se para todo $\alpha \in (0,1]$, o conjunto $\{x/f(x) \geq \alpha\}$ é fechado [14].

$\mathcal{A} - \mathcal{B} = (a_1 - d_2, b_1 - c_2, c_1 - b_2, d_1 - a_2)$

$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = (\min A, \min B, \max B, \max A)$
onde $A = \{a_1 \cdot a_2, a_1 \cdot d_2, d_1 \cdot a_2, d_1 \cdot d_2\}$ e $B = \{b_1 \cdot b_2, b_1 \cdot c_2, c_1 \cdot b_2, c_1 \cdot c_2\}$.

$\mathcal{A}/\mathcal{B} = (\min A, \min B, \max B, \max A)$
onde $0 \notin S(A)$ e $A = \{\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_1}{d_2}, \frac{d_1}{a_2}, \frac{d_1}{d_2}\}$ e $B = \{\frac{b_1}{b_2}, \frac{b_1}{c_2}, \frac{c_1}{b_2}, \frac{c_1}{c_2}\}$.

Proposição 2.1 *Seja $\digamma_T$ o conjunto dos números fuzzy trapezoidais. Então $\langle \digamma_T, +\rangle$ e $\langle \digamma_T, \cdot\rangle$ são monóides comutativos.*

Demonstração: Apresentaremos somente o caso da adição, ou seja temos que mostrar que a soma é associativa, tem elemento neutro (monoide) e que além disso é comutativa.

Observe que $\digamma_T \subseteq \mathbb{R}^4$ e portanto as componente de um número fuzzy trapezoidal são números reais.

Sejam $\mathcal{A} = (a, b, c, d)$, $\mathcal{B} = (e, f, g, h)$, $\mathcal{C} = (i, j, k, l)$ e $\mathcal{Z} = (0, 0, 0, 0)$.

Associativa: Trivialmente da associatividade da + em $\mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} + (\mathcal{B} + \mathcal{C}) &= \\
\mathcal{A} + (e+i, f+j, g+k, h+l) &= \\
(a+(e+i), b+(f+j), c+(g+k), d+(h+l)) &= \\
((a+e)+i, (b+f)+j, (c+g)+k, (d+h)+l) &= \\
(a+e, b+f, c+g, d+h) + \mathcal{C} &= \\
(\mathcal{A} + \mathcal{B}) + \mathcal{C}
\end{aligned}$$

Elemento neutro: Trivialmente do fato de ser 0 ser um elemento neutro da + em $\mathbb{R}$, temos que $\mathcal{A}+\mathcal{Z} = (a+0, b+0, c+0, d+0) = (a, b, c, d) = \mathcal{A}$

Comutatividade: Trivialmente da comutatividade da + em $\mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} + \mathcal{B} &= (a+e, b+f, c+g, d+h) \\
&= (e+a, f+b, g+c, h+d) \\
&= (e, f, g, h) + (a, b, c, d) \\
&= \mathcal{B} + \mathcal{A} \blacksquare
\end{aligned}$$

Lamentavelmente $\langle \digamma_T, +\rangle$ e $\langle \digamma_T, \cdot\rangle$ não têm inversos e portanto não constituem um grupo.

Dizemos que um número fuzzy $\mathcal{A}$ está **contido ou é igual** a um número fuzzy $\mathcal{B}$, denotado por $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, se para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$\mu_{\mathcal{A}}(x) \leq \mu_{\mathcal{B}}(x). \tag{3}$$

Proposição 2.2 *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ dois números fuzzy trapezoidais. Então $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ se, e somente se, para todo $\alpha \in (0, 1]$, $\mathcal{A}_\alpha \subseteq \mathcal{B}_\alpha$.*

Proposição 2.3 *Sejam $\mathcal{A} = (a_1, b_1, c_1, d_1)$ e $\mathcal{B} = (a_2, b_2, c_2, d_2)$ dois números fuzzy trapezoidais. Então $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ se, e somente se, $a_2 \leq a_1 \leq d_1 \leq d_2$ e $b_2 \leq b_1 \leq c_1 \leq c_2$.*

Demonstração:($\Rightarrow$) Se $x \leq a_2$ então pela equação (2), $\mu_{\mathcal{B}}(x) = 0$ e como $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, então pela equação (3), $\mu_{\mathcal{A}}(x) = 0$ e portanto $a_2 \leq a_1$. Analogamente, se $d_2 \leq x$ então pela equação (2), $\mu_{\mathcal{B}}(x) = 0$ e portanto, $\mu_{\mathcal{A}}(x) = 0$. Logo, como $a_1 < x$, então necessariamente $d_1 \leq x$ e consequentemente, $d_1 \leq d_2$. Se, $b_1 \leq x \leq c_1$ então $\mu_{\mathcal{A}}(x) = 1$ e como $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, então pela equação (3), $\mu_{\mathcal{B}}(x) = 1$. Logo, pela equação (2), $b_2 \leq x \leq c_2$. Portanto, $b_2 \leq b_1 \leq c_1 \leq c_2$.

($\Leftarrow$) Direto da proposição 2.2, uma vez que $a_2 \leq a_1 \leq d_1 \leq d_2$ e $b_2 \leq b_1 \leq c_1 \leq c_2$, implica que $\mathcal{A}_\alpha \subseteq \mathcal{B}_\alpha$ para todo $\alpha \in (0, 1]$. $\blacksquare$

Dizemos que uma função de $f : \digamma_T^n \rightarrow \digamma_T$ é **inclusão monotônica** se para todo par de vetores n-dimensionais de números fuzzy trapezoidais $\vec{\mathcal{A}} = (\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n)$ e $\vec{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n)$ temos que se $\mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{B}_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$ então $f(\vec{\mathcal{A}}) \subseteq f(\vec{\mathcal{B}})$.

Proposição 2.4 *As operações aritméticas sobre $\digamma_T$ são inclusão monotônicas.*

Demonstração: Provaremos só o caso da adição. Sejam $\mathcal{A} = (a_1, b_1, c_1, d_1)$, $\mathcal{B} = (a_2, b_2, c_2, d_2)$, $\mathcal{C} = (a_3, b_3, c_3, d_3)$ e $\mathcal{B} = (a_4, b_4, c_4, d_4)$ números fuzzy trapezoidais tais que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{D}$. Então, pela proposição 2.3, $a_2 \leq a_1 \leq d_1 \leq d_2$, $b_2 \leq b_1 \leq c_1 \leq c_2$, $a_4 \leq a_3 \leq d_3 \leq d_4$ e $b_4 \leq b_3 \leq c_3 \leq c_4$. Assim, pela monotonicidade da soma em $\mathbb{R}$, temos que $a_2 + a_4 \leq a_1 + a_3 \leq d_1 + d_3 \leq d_2 + d_4$ e $b_2 + b_4 \leq b_1 + b_3 \leq c_1 + c_3 \leq c_2 + c_4$. Logo, pela proposição 2.3, $(a_1 + a_3, b_1 + b_3, c_1 + c_3, d_1 + d_3) \subseteq (a_2 + a_4, b_2 + b_4, c_2 + c_4, d_2 + d_4)$, ou seja $\mathcal{A} + \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B} + \mathcal{D}$. $\blacksquare$

Embora os números fuzzy trapezoidais, como dito anteriormente, não têm inversos aditivos nem multiplicativos, eles têm um pseudo-inverso aditivo e multiplicativo. Seja $\mathcal{A} = (a, b, c, d)$ um número fuzzy trapezoidal. Então o número fuzzy trapezoidal $-\mathcal{A} = (-d, -c, -b, -a)$ é chamado de **pseudo-inverso aditivo** de $\mathcal{A}$, pois $\mathcal{A} + (-\mathcal{A})$ é um número fuzzy trapezoidal simétrico e por tanto $\mathbf{0} \subseteq \mathcal{A} + (-\mathcal{A})$. Analogamente, o número fuzzy trapezoidal $\frac{1}{\mathcal{A}} = (\frac{1}{d}, \frac{1}{c}, \frac{1}{b}, \frac{1}{a})$ é chamado de **pseudo-inverso multiplicativo** de $\mathcal{A}$, pois $\mathcal{A} + (\frac{1}{\mathcal{A}})$ é um número fuzzy trapezoidal tal que $\mathbf{1} \subseteq \mathcal{A} + (-\mathcal{A})$.

Uma outra propriedade que números fuzzy trapezoidais não satisfazem é a distributividade. Porém eles são sub-distributivos no seguinte sentido:

Proposição 2.5 *Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ números fuzzy trapezoidais. Então*

$$\mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} + \mathcal{C}) \subseteq \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} + \mathcal{A} \cdot \mathcal{C}$$

3 Topologia sobre $\digamma_T$

Uma **distância crisp** para números fuzzy trapezoidais, é a seguinte: Sejam $\mathcal{A} = (a_1, b_1, c_1, d_1)$ e $\mathcal{B} = (a_2, b_2, c_2, d_2)$ dois números fuzzy trapezoidais. Então

$$d_\digamma(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \max\{|a_1 - a_2|, |b_1 - b_2|, |c_1 - c_2|, |c_1 - c_2|\}$$

Proposição 3.1 *$\langle \digamma_T, d_\digamma \rangle$ é um espaço métrico.*

Uma vez que temos uma métrica para números fuzzy trapezoidais, temos também naturalmente a noção de módulo. O módulo de um número fuzzy trapezoidal $\mathcal{A}$, denotado por $|\mathcal{A}|$, é $d_\digamma(\mathcal{A}, \mathbf{0})$.

Assim, como a distancia usual da reta é estendida para um distancia Euclideana (ou seja para $\mathbb{R}^n$), também podemos estender de forma análoga a distancia $d_\digamma$ para $\digamma_T^n$. Seja $d_\digamma^n : \digamma_T^n \to \digamma_T$ a função definida por:

$$d_\digamma^n((\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n), (\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n)) = \sqrt{d_\digamma(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1)^2 + \cdots + d_\digamma(\mathcal{A}_n, \mathcal{B}_n)^2}$$

Métricas estabelecem uma noção de continuidade sobre funções. Assim dizemos que uma função $f : \digamma_T^n \to \digamma_T$ é **contínua** se $\forall \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n \in \digamma_T$ e $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que $\forall \mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n \in \digamma_T$, temos que

$$d_\digamma^n((\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n), (\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n)) < \delta \Rightarrow d_\digamma(f(\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n), f(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n)) < \epsilon$$

Teorema 3.1 *As operações aritméticas sobre $\digamma_T$ são contínuas.*

4 Conclusões

A adição e multiplicação usual sobre números fuzzy, não são fechadas para a subclasse de números fuzzy trapezoidais. Isto motivou a usar uma noção de adição e multiplicação não convencional (não satisfaz o principio da extensão de Zadeh) e específica para esta classe de números fuzzy. Constamos que, mesmo usando estas operações naturais para números fuzzy trapezoidais, suas propriedades algébricas ainda são relativamente pobres. De fato eles têm propriedades algébricas similares às da aritmética intervalar [12, 7].

Na última seção, introduzimos uma noção de distância para números fuzzy trapezoidais, que segue a mesma idéia da distancia de Moore para intervalos [12, 1, 16]. Constatamos que essa distância é uma métrica, no sentido topológico, para números fuzzy trapezoidais e portanto proporciona uma topologia de Hausdorff sobre $\digamma_T$. Finalmente mostramos que as operações aritméticas sobre números fuzzy trapezoidais são contínuas com respeito a esta topologia.

Referências

[1] Benedito M. Acióly and Benjamín C. Bedregal, A quasi-metric topology compatible with inclusion monotonicity on interval space, *Reliabel Computing*, 3 (1997) 305–313.

[2] C.R. Bector and Suresh Chandra, "Fuzzy Mathematical programming and Fuzzy Matrix Games", Springer-Verlag, Berlin-Heildelberg, 2005.

[3] Barnabás Bede and János Fodor, Product Type Operations between Fuzzy Numbers and their Applications in Geology, *Acta Polytechnica Hungarica* 3(2006) 123–139.

[4] Claudilene G. da Costa, Roberto Callejas-Bedregal e Benjamín C. Bedregal. O Corpo Local dos Números Fuzzy com Operações Baseadas em α-Cortes. Submetido ao VIII ERMAC, Natal-RN, Novembro de 2008.

[5] Didier Dubois and Henri Prade. Operations on fuzzy numbers. *International Journal of Systems Sciences*, 9 (1978) 613–626.

[6] Michael Hanss, "Applied Fuzzy Arithmetic An Introduction with Engineering Applications", Springer-Verlag, Berlin-Heildelberg, 2005.

[7] Luc Jaulin, Michel Kieffer, Olivier Didrit and Éric Walter, "Applied Interval Analysis: With examples in parameter and state estimation, robust control and robotic". Springer-Verlag, London, 2001.

[8] Arnold Kaufmann and Madan M. Gupta, "Introduction to Fuzzy Arithmetic: Theory and Applications", Van Nostrand Reinhold, New York, 1985.

[9] Erich P. Klement, Radko Mesiar and Endre Pap, "Triangular Norms", Kluwer, Dordrecht, 2000.

[10] George J. Klir and Bo Yuan, "Fuzzy Sets and Fuzzy Logic", Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1995.

[11] Kwang H. Lee, "First Course on Fuzzy Theory and Applications", Springer-Verlag, Berlin-Heildelberg, 2005.

[12] Ramon E. Moore, "Methods and Applications of Interval Analysis", SIAM, Philadelphia, 1979.

[13] Steven Nahmias. Fuzzy variables. *Fuzzy sets and systems*, 1 (1978) 97–110.

[14] Hung T. Nguyen and Elbert A. Walker, "A first Course in Fuzzy Logic", 2nd edition, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2000.

[15] Alexandre F. de Pinho, José A. B. Montevechi e Edson de O. Pamplona. Aplicação de números fuzzy triangulares em análise de investimentos em situações de incerteza: Método baseado na teoria dos jogos. *Pesquisa e Desenvolvimento Tecnológico*, 21 (1997) 102–107.

[16] Regivan H.N. Santiago, Benjamín C. Bedregal and Benedito M. Acióly, Comparing continuity of interval functions based on Moore and Scott topologies, *Electronical Journal on Mathematics of Computation*, 2 (2005) 1–14.

[17] Rogério Rodrigues de Vargas, "Técnicas Matemático-Computacionais para o Tratamento de Incertezas Aplicadas ao Problema do Fluxo de Potência em Sistemas de Transmissão de Energia Elétrica". Dissertação de Mestrado, PPgInf-UCPel, DM-2008-1-002, Pelotas-RS, 2008.

[18] Lotfi A. Zadeh. Fuzzy Sets. *Information and Control*, 8 (1965) 338–353.